MECANICA de CONSTRUCCION en ejemplos y problemas

✦

Editorial Mir
Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

В. А. КИСЕЛЕВ, А. М. АФАНАСЬЕВ, В. А. ЕРМОЛЕНКО,
И. А. МЕДНИКОВ, М. В. ОВСЯННИКОВА, А. Я. СЛОБОДЧИКОВ,
Н. Н. ТЯЖЕЛОВ, Ю. П. ФЕДОРОВ, И. Ю. ЦВЕЙ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

СТРОЙИЗДАТ МОСКВА

V. A. Kiseliov, A. M. Afanasiev, V. A. Ermólenko,
Yu. P. Fiódorov, I. A. Médnikov, M. V. Ovsiánnikova,
A. Ya. Slobódchikov, N. N. Tiazhelov, I. Yu. Zvei

MECÁNICA
de
CONSTRUCCION
en ejemplos y problemas

Revisado por el profesor
V. A. KISELIOV

Editorial Mir • Moscú

CDU 624.0,4 = 60

Traducido del ruso por el ingeniero
Julio Juan Manuel

Impreso en la URSS 1973

На испанском языке

© Traducción al español. Mir. 1973.

K $\frac{0325-292}{041(01)-73}$

INDICE

CAPITULO 1. * INTRODUCCION 7

CAPITULO 2. * ANALISIS CINEMATICO Y METODOS GENERALES DE DETERMINACION DE LAS REACCIONES DE VINCULOS DE LOS SISTEMAS ISOSTATICOS PLANOS 11

CAPITULO 3. * CALCULO DE VIGAS ISOSTATICAS Y PORTICOS PLANOS BAJO CARGA MOVIL 31

CAPITULO 4. * CALCULO DE ARMADURAS DE VIGA ARTICULADAS ISOSTATICAS 45

CAPITULO 5. * CALCULO DE SISTEMAS TRIARTICULADOS . . . 65

CAPITULO 6. * CALCULO DE LOS SISTEMAS PLANOS COMBINADOS ISOSTATICOS 89

CAPITULO 7. * CARGAS LIMITES DE LOS SISTEMAS ISOSTATICOS PLANOS 101

CAPITULO 8. * DESPLAZAMIENTOS DE SISTEMAS LINEALES PLANOS 107

CAPITULO 9. * FORMACION Y CALCULO DE SISTEMAS ESPACIALES ISOSTATICOS 130

CAPITULO 10. * CALCULO DE LOS PORTICOS PLANOS HIPERESTATICOS POR EL METODO DE FUERZAS 143

CAPITULO 11. * CALCULO DE VIGAS CONTINUAS 171

CAPITULO 12. * CALCULO DE ARMADURAS PLANAS ARTICULADAS HIPERESTATICAS Y DE SISTEMAS COMBINADOS 199

CAPITULO 13. * CALCULO DE ARCOS HIPERESTATICOS 233

CAPITULO 14. * CALCULO DE SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS POR EL METODO DE DESPLAZAMIENTOS 253

CAPITULO 15. * CALCULO DE SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS POR LOS METODOS MIXTO Y COMBINADO 279

CAPITULO 16. * CALCULO DE PORTICOS PLANOS POR EL METODO DE DISTRIBUCION DE MOMENTOS (METODO DE G. KANI) . . 281

CAPITULO 17. * CARGAS LIMITES DE LOS SISTEMAS HIPERESTATICOS 308

CAPITULO 18. * CALCULO DE SISTEMAS ESPACIALES HIPERESTATICOS 317

CAPITULO 19. * FORMA MATRIZ DE LOS CALCULOS EN LA MECANICA DE CONSTRUCCION 329

CAPITULO 20. * ELEMENTOS DE PROGRAMACION DE LOS PROBLEMAS DE LA MECANICA DE CONSTRUCCION 360

CAPITULO 21. * CALCULO DE SISTEMAS PLANOS POR EL ESTADO DEFORMADO 381

CAPÍTULO I * INTRODUCCIÓN

La mecánica de construcción es la ciencia que trata del cálculo de la resistencia mecánica, estabilidad y rigidez de las estructuras. Su tarea inmediata es determinar las fuerzas internas (los esfuerzos), las que, hablando en rigor, ha de calcularse en el estado deformado del sistema, lo cual es demasiado engorroso. Por eso, considerando pequeñas las variaciones de las formas de las estructuras bajo carga, las fuerzas internas se determinan corrientemente en el estado no deformado de la estructura. Aunque esto no es exacto (lo cual es necesario saber y recordar), de todos modos, en muchos casos de la práctica es aceptable, y se aplica precisamente en los cálculos.

En la mecánica de construcción las estructuras son reemplazadas por sus esquemas, que representan en sí las imágenes (esqueletos) simplificadas de éstas, donde las barras son sustituidas por sus líneas axiles; las placas, por sus superficies; los apoyos reales de la construcción, por vínculos ideales, etc.; las áreas o superficies se determinan por los momentos de inercia y las dimensiones de las secciones y propiedades de los materiales, por sus características mecánicas.

El cálculo de las estructuras se efectúa por un esquema teórico o de cálculo. Si el esquema completo de la estructura es simple y accesible para el cálculo, el mismo se adopta, también, como esquema de cálculo. Pero si el esquema completo es complicado para el cálculo, entonces, se simplifica, complementariamente, ignorando ciertas propiedades que juegan un papel secundario en el trabajo de la estructura.

Las estructuras y sus esquemas completos y de cálculo se dividen en sistemas según los criterios básicos que determinan el trabajo de la estructura bajo carga.

Por el modo de formación, los sistemas se dividen en:

invariantes, que admiten desplazamientos relativos de los cuerpos unidos entre sí, sólo a cuenta de la deformación del material;

variantes, que admiten desplazamientos relativos de los cuerpor unidos entre sí, sin deformación del material;

y *de variación instantánea* que admiten solamente desplazamientos infinitesimales de los cuerpos unidos entre sí, sin deformación del material.

Los sistemas invariantes pueden soportar cargas de cualquier tipo dentro de los límites de la resistencia mecánica del material (fig. 1.1), por lo cual, precisamente, son empleados en las construcciones portantes.

Los sistemas variantes y de variación instantánea pueden soportar, no modificando su forma sin deformación del material, sólo cargas de tipos particulares, resultando poco aptos para estructuras que porten diferentes tipos de carga. En particular, los sistemas variantes, no modificando su forma, pueden recibir y equilibrar sobre sí sólo aquellas cargas cuyo trabajo sobre cualesquiera desplazamientos posibles, infinitesimales, calculado con la precisión de hasta una infinitesimalidad del primer orden, es igual a cero. El sistema variante representado en la fig. 1.2, *a* puede equilibrar la carga ubicada sobre él. Efectivamente, el trabajo sobre un desplazamiento infinitesimal posible de las fuerzas aplicadas al sistema (fig. 1.2, *b*) va a ser igual a cero:

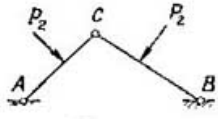


Fig. 1.1

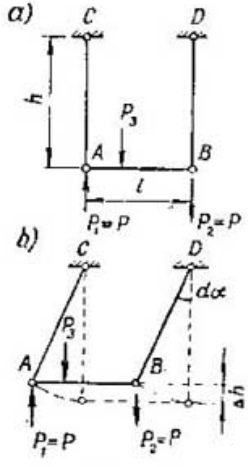


Fig. 1.2

$$\Delta T = (P_1 - P_3 - P_2)\,\Delta h = \\ = (P_1 - P_3 - P_2)\,h\,(1 - \cos d\alpha) = \\ = (P_1 - P_3 - P_2)\,h\left(\frac{d\alpha^2}{2!} - \frac{d\alpha^4}{4!} + \ldots\right). \quad (1.1)$$

Como se ve, con la precisión de una infinitesimalidad del primer orden, este trabajo es igual a cero.

El equilibrio de cualquier estructura cargada en estado deformado deberá ser, necesariamente, estable, lo que se puede saber también por el trabajo de las fuerzas sobre los desplazamientos infinitesimales posibles de la estructura en estado deformado (estabilidad en pequeño) o sobre los desplazamientos pequeños finitos (estabilidad en grande).

Si el trabajo de todas las fuerzas externas e internas sobre los desplazamientos infinitesimales (finitos pequeños) posibles, cuales sean, considerando todas las magnitudes infinitesimales (finitas), resulta *negativo*, entonces, el equilibrio en pequeño (en grande) es *estable*, si *positivo, inestable* y, si *igual a cero, indiferente.*

Mostremos que el equilibrio del sistema (fig. 1.2*a*) es estable. El trabajo de las fuerzas (1.1), con una precisión de hasta las infinitesimalidades de órdenes superiores, resulta negativo, esto es, $\Delta T = -P_3 h \frac{d\alpha^2}{2} < 0$, lo cual significa que el equilibrio es estable.

Si $P_3 = 0$, este mismo trabajo, con cualquier precisión, es igual a cero y el equilibrio, indiferente.

De admitir que $P_3 = 0$ (fig. 1.2*a*) y aumentar la longitud del colgante derecho, dejando el punto B en su sitio, entonces, la fuerza $P_2 = P$ efectúa un trabajo negativo menor que el de la fuerza $P_1 = P$. El trabajo en total será positivo ($\Delta T > 0$) y el equilibrio del sistema, inestable.

Los métodos de cálculo de las estructuras dependen de si el sistema dado es isostático (estáticamente determinado) o hiperestático (estáticamente indeterminado), lo que se condiciona por el tipo de sistema, el carácter de la carga y las premisas relativas a la determinación de las fuerzas internas por el estado no deformado o deformado de la estructura.

Si las fuerzas internas se determinan por el estado *no deformado*, entonces, independientemente de la carga, los sistemas se pueden dividir en isostáticos y hiperestáticos. Isostáticos son aquellos, en donde todas las reacciones y fuerzas internas pueden ser halladas de las condiciones de equilibrio e hiperestáticos, son los que no se hallan.

En la mecánica de construcción juega un gran papel el así llamado principio de independencia de acción de las fuerzas (principio de superposición), por el cual, cualquier magnitud (una reacción de apoyo, una fuerza interna, una tensión, un desplazamiento, etc.), debida a varias fuerzas, es igual a la suma algebraica o geométrica de los valores de esta magnitud, debidos a cada fuerza por separado. La suma algebraica se toma para las magnitudes escalares y los valores numéricos de los vectores (módulos), cuando estos últimos están ubicados sobre una misma recta, y la geométrica, para los vectores que pasan por un mismo punto.

Si las fuerzas internas se determinan por el estado *deformado*, teniendo en cuenta todos los desplazamientos, entonces, hablando en general, el principio de independencia no es correcto. Por eso es necesario considerarlo sólo como condición complementaria de cálculo. Se justifica aproximadamente en los casos cuando:

1) cada carga por separado y todas juntas producen modificaciones pequeñas en la forma y medidas del sistema;

2) la determinación de las reacciones y fuerzas internas se efectúa por el estado no deformado;

3) el material es elástico y cumple la ley de Hooke.

Para poner en claro la validez del principio, en el caso de las hipótesis dadas, es necesario determinar el valor incógnito debido a la fuerza concentrada P, de dirección arbitraria y variable, aplicada a un lugar cualquiera del sistema, determinado con una coordenada variable. Si en este caso, la magnitud escalar incógnita, depende linealmente de la fuerza P y la vectorial posee, o una dirección constante o una independiente del valor de la fuerza P, entonces, el principio es correcto.

Así, por ejemplo, las direcciones de las reacciones de apoyo A y B de una viga simplemente apoyada, debidas a la fuerza de dirección arbitraria P, aplicada sobre un punto cualquiera de la

viga (fig. 1.3), no dependen del valor de la fuerza P, por consiguiente, es empleable el principio de independencia de acción de las fuerzas. Para la reacción A, el principio es aplicable en la forma algebraica, pero para la B, en la geométrica.

Criterios analíticos del principio:

1) la magnitud examinada deberá ser una función lineal homogénea de las fuerzas externas;

2) la ecuación diferencial de la magnitud que se determina deberá ser obligatoriamente *lineal*, con coeficientes que no dependan de las fuerzas con respecto a las cuales se investiga el principio de superposición y, su segundo miembro, si no es igual a cero, deberá depender linealmente de estas fuerzas.

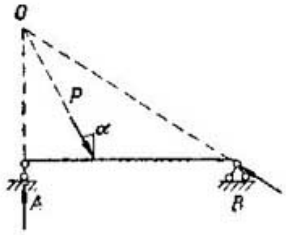


Fig. 1.3

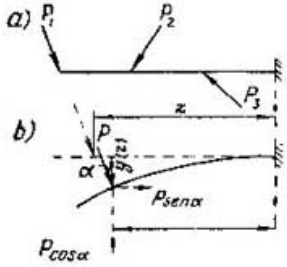


Fig. 1.4

Ejemplo 1.1. Poner en claro con cuales hipótesis es utilizable el principio de independencia de acción de las fuerzas para la determinación del momento flector en el lugar de empotramiento de la viga (fig. 1.4*a*).

En un punto cualquiera aplicamos una fuerza P, cuya dirección arbitraria es determinada por el ángulo α (fig. 1,4, *b*), y examinamos el estado deformado de la viga.

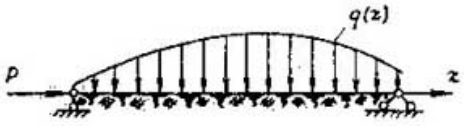


Fig. 1.5

El momento flector en el empotramiento de la viga es

$$M = -P\cos\alpha \times z_1 - P\,\mathrm{sen}\,\alpha \cdot y(z) \quad (1.2)$$

Dado que z_1 e $y(z)$ dependen de la fuerza P, la expresión (1.2) no es lineal con respecto a esta fuerza. El principio de independencia para el cómputo del momento no es utilizable.

De despreciar $\Delta z = z - z_1$, entonces,

$$M = -P\cos\alpha \cdot z - P\,\mathrm{sen}\,\alpha \cdot y(z) \quad (1.3)$$

Esta expresión tampoco es lineal con respecto a la fuerza P. Pero, si despreciamos complementariamente el desplazamiento vertical $y(z)$, entonces,

$$M = -P\cos\alpha \cdot z, \quad (1.4)$$

Esta expresión ya se hizo lineal con respecto a la fuerza P, para cualquier valor del ángulo α. Esto significa que de despreciar los desplazamientos de la viga, esto es, de determinar el momento por el estado no deformado de ésta, el principio de independencia, para el cómputo de este momento, es correcto.

Ejemplo 1.2. ¿En qué condiciones es empleable el principio de independencia, para una viga sobre fundación elástica, comprimida por la fuerza P (fig. 1.5)?

La ecuación diferencial, considerando los momentos flectores debidos a la fuerza axil en el estado deformado de la viga, tiene la forma:

$$y^{IV} + \frac{P}{EJ} y'' + \frac{kb}{EJ} y = \frac{q(z)}{EJ}. \qquad (1.5)$$

Para la utilización del principio:

1) la fuerza P deberá ser constante;

2) EJ puede tener cualquier valor independiente de las cargas;

3) $kb : EJ$ deberá ser una magnitud independiente de las cargas dadas.

La aplicación del principio se puede establecer, aún, del siguiente modo.

Supongamos que $q = q_1 + q_2$. Entonces

$$y_1^{IV} + \frac{P}{EJ} y_1'' + \frac{kb}{EJ} y_1 = \frac{q_1}{EJ};$$

$$y_2^{IV} + \frac{P}{EJ} y_2'' + \frac{kb}{EJ} y_2 = \frac{q_2}{EJ}.$$

Adicionamos estas ecuaciones:

$$(y_1^{IV} + y_2^{IV}) + \frac{P}{EJ}(y_1'' + y_2'') + \frac{kb}{EJ}(y_1 + y_2) = \frac{q_1 + q_2}{EJ} \qquad (1.6)$$

y, confrontando (1.6) y (1.5) obtenemos que $y = y_1 + y_2$.

CAPITULO 2 * ANALISIS CINEMÁTICO Y MÉTODOS GENERALES DE DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES DE VÍNCULOS DE LOS SISTEMAS ISOSTÁTICOS PLANOS

§ 2.1. FORMACIÓN Y ANÁLISIS CINEMÁTICO DE LOS SISTEMAS PLANOS. Los elementos unidos de un sistema se llaman discos. Cada disco D aislado es geométricamente invariante y, en un plano, posee tres grados de libertad. A un nudo suelto N se lo puede considerar como un disco degenerado (disco con superficie nula), poseedor de dos grados de libertad.

Los discos se unen por medio de vínculos. Los tipos de vínculos básicos de los sistemas planos son: a) la barra B con los extremos articulados (vínculo elemental que suprime un grado de libertad); b) la articulación A (vínculo equivalente a dos vínculos elementales) y c) la soldadura S (vínculo equivalente a tres vínculos elementales) (fig. 2.1a — c).

Con la barra se pueden unir simultáneamente, sólo dos discos o nudos. Con la articulación o soldadura, varios. En este caso, el vínculo se llama múltiple. Su multiplicidad es menor en una unidad que el número de discos ligados.

Bajo la acción de una carga sobre un sistema, en cada vínculo pueden surgir las respectivas reacciones (fig. 2.1d — f). Antes de determinar las reacciones de los vínculos es indispensable estudiar el sistema, efectuar su análisis cinemático.

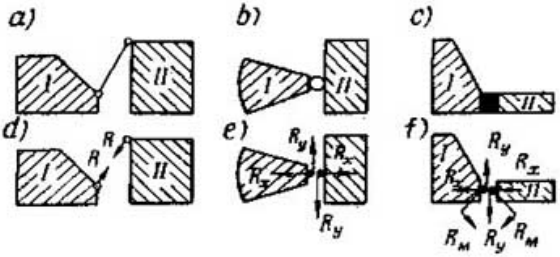


Fig. 2.1

En dependencia del número y disposición de los discos y vínculos, los sistemas se dividen en invariantes, variantes y de variación instantánea. El grado de variabilidad V de un sistema plano compuesto de discos, nudos y vínculos, se puede determinar por las fórmulas:

para los sistemas fijados a la tierra

$$V = (3D + 2N) - (B + 2A + 3S) - V_{ap}; \qquad (2.1)$$

para los sistemas libres

$$V = (3D + 2N) - (B + 2A + 3S) - 3. \qquad (2.2)$$

Aquí, D, N, B, A, S y V_{ap} son el número de discos, nudos, barras, articulaciones, soldaduras y barras de apoyo, respectivamente.

Si en las fórmulas citadas $V > 0$, el sistema, por cierto, es variante. Si $V = 0$, posee el número de vínculos indispensable para poder ser invariante. Si $V < 0$, entonces, posee vínculos "superfluos" y puede ser también invariante.

Señalemos que la condición $V \leqslant 0$ no es suficiente para la invariabilidad geométrica de un sistema. Sólo se puede juzgar sobre ella después de un análisis cinemático basado sea sobre las reglas para la deformación de los sistemas invariantes o sea en

criterios particulares desprendidos de los métodos generales de determinación de las reacciones de vínculos.

En la fig. 2.2*a—c*, *f—h*, se muestran tipos básicos de formación de sistemas invariantes de dos y tres discos. Los sistemas representados en la fig. 2.2*d*, *e*, *i*, *j* son de variabilidad instantánea, dado que la disposición de los vínculos admite que los discos tengan desplazamientos infinitesimales relativos. Aquí, sea dos discos poseen un solo centro instantáneo de rotación (fig. 2.2*d*, *e*), sea tres discos poseen tres centros instantáneos de rotación, colocados sobre una misma línea recta (fig. 2.2*i*, *j*).

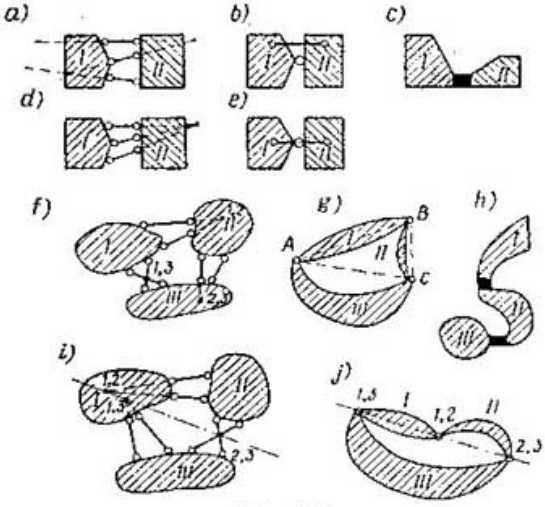


Fig. 2.2

Los elementos unidos (discos o nudos) y los de unión (vínculos) poseen propiedad dual. Los vínculos pueden ser considerados como discos o nudos y los discos, al revés, como vínculos. Por eso, antes de estudiar un sistema, es indispensable establecer qué es lo que se adopta en él por elementos ligados y qué por elementos ligantes.

Por ejemplo, se puede considerar el sistema libre representado en la fig. 2.2*g*: a) como tres discos unidos con articulaciones ($V = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$); b) como tres nudos unidos con los vínculos *AB*, *BC* y *AC* ($V = 2 \cdot 3 - 3 - 3 = 0$); c) como dos discos *I* y *II* unidos con la articulación *B* y el vínculo *AC* ($V = 3 \cdot 2 - 1 - 2 \cdot 1 - 3 = 0$); d) como una fijación del nudo *B* al disco *III* (a "tierra"), por medio de dos vínculos *AB* y *BC* unidos con una articulación y poseedores de articulaciones en los extremos ($V = 2 \cdot 1 - 2 = 0$).

Prestemos atención al último tipo de ligazón, que se utiliza ampliamente al hacer el análisis cinemático de un sistema. Al

conjunto de dos barras o discos que fijan el nudo por medio de charnelas se lo llama diada. En este caso, las tres articulaciones no deberán estar sobre una misma línea recta. La incorporación al sistema (o, al revés, la eliminación) de cualquier cantidad de diadas no altera el grado de variabilidad de dicho sistema.

Señalemos también que, al emplear las fórmulas (2·1) — —(2.2), previamente conviene formar con los elementos sueltos discos grandes, sobre la base de los tipos indicados de formación de sistemas invariantes.

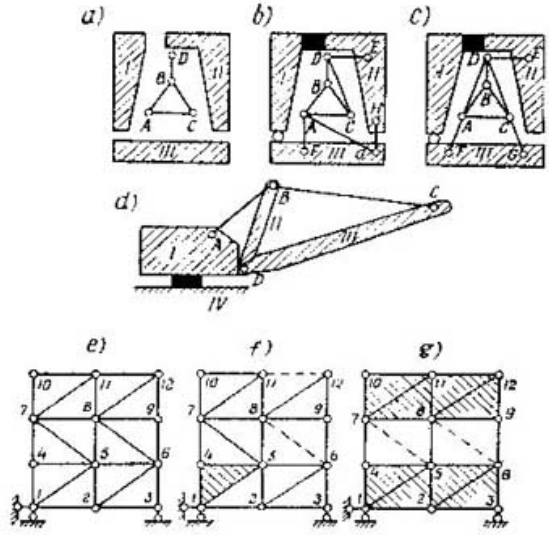


Fig. 2.3

Examinemos algunos ejemplos de formación y análisis cinemático de sistemas.

Ejemplo 2.1. Formar un sistema geométricamente invariante y que no tenga vínculos superfluos, con los elementos representados en la fig. 2.3*a*.

El número de vínculos elementales requeridos, lo determinamos, en concordancia con (2.2), por la fórmula

$$V_{req}^{el} = 3D + 2N - 2A - 3S - 3 \qquad (2.3)$$

Aquí, $D = 5$ (adoptamos como discos, además de los tres indicados en la figura, el triángulo linealarticulado ABC y la barra BD), $N = 0$, $A = 1$ (la articulación B) y $S = 0$. Por consiguiente, $V_{req}^{el} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 3 = 10$.

En lo que se refiere a la elección y disposición de los vínculos, este problema tiene numerosas soluciones. En la fig. 2.3*b* se representa una de éstas, en la que $B = 5$ (las barras DE, AF, AG, GH

y CD), $A = 1$ y $S = 1$. De este modo, $V^{el} = 5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 10$. También en el sistema representado en la fig. 2.3*c*, se introdujeron diez vínculos elementales, pero, al formarlo, se deslizaron los siguientes errores. En primer lugar, el disco BD fue unido al ABC con una articulación y dos barras (esto es, con un número excesivo de vínculos); en segundo lugar, el sistema lineal obtenido fue fijado a los discos *II* y *III* con tres barras que se cortan en el mismo punto D y, por fin, todo el sistema es variante, dado que los discos *I* y *II* no poseen un número suficiente de vínculos para formar, con el disco *III*, un sistema geométricamente invariante.

Ejemplo 2.2. Investigar el sistema representado en la fig. 2.3*d*.

En el sistema dado tomemos como discos los elementos sombreados y "la tierra". Entonces, $D = 4$, $B = 2$, $A = 2$ (dado que la articulación D es doble), $S = 1$ y, de acuerdo con (2.2), $V = 3 \cdot 4 - (2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) - 3 = 0$. De este modo, el sistema puede ser geométricamente invariante. Para confirmar esto, examinemos una de sus posibles vías de formación.

El disco *I* está soldado a "la tierra", es fijo; el *II* está ligado al *I* por medio de la barra AB y la articulación D, por lo que el sistema se conserva invariante. El disco *III* está unido al *II* en forma análoga. Por consiguiente, todo el sistema es geométricamente invariante.

Ejemplo 2.3. Investigar el sistema representado en la fig. 2.3*e*.

Dado que este sistema está formado por triángulos linealarticulados y tiene tres vínculos de apoyo correctamente distribuidos, se puede afirmar, por adelantado, que es invariante.

En el caso dado, $N = 12$, $V = 23$ y $V_{ap} = 3$; por consiguiente, por la fórmula (2.1), $V = 2 \cdot 12 - (23 + 3) = -2$, es decir, el sistema posee dos barras superfluas.

Tal deducción se desprende también del examen directo de la posible formación de un sistema geométricamente invariante e isostático (fig. 2.3*f*). Por ejemplo, al disco 1-4-5, adoptado como básico, se han fijado sucesivamente: el nudo *2* con la diada *1-2* y *5-2*; luego el *6* con la *5-6* y *2-6*; después, el *3* con la *2-3* y *6-3*; el *7* con la *4-7* y *5-7*; el *8* con la *7-8* y *5-8*; el *9* con la *8-9* y *6-9* (la barra *6-8* resultó superflua); el *11* con la *8-11* y *7-11*; el *10* con la *11-10* y *7-10* y, por fin, el último nudo *12* con la *8-12* y *9-12* (el *11-12* resultó ser la segunda barra superflua).

Naturalmente, con otro añadido de diadas, pueden resultar superfluas otras dos barras. Sin embargo, no se puede considerar superfluas dos barras cualesquiera de un sistema dado. Así, por ejemplo, la eliminación de los vínculos *4-5* y *8-9* transforma al sistema en el de variación instantánea. Tampoco es posible eliminar, simultáneamente, los vínculos *5-7* y *6-8*, los que, por separado, pueden ser considerados superfluos. La eliminación de estos vínculos convierte el sistema dado en el variante, representando en sí dos discos unidos por tres barras paralelas de igual longitud (fig. 2.3*g*).

Ejemplo 2.4. Investigar el sistema representado en la fig. 2.4*a*. El examen por medio de una sucesiva incorporación de diadas muestra (proponemos que lo estudie cada uno por sí mismo) que el sistema dado, separado de la tierra, puede ser representado en forma de dos discos unidos sólo con dos vínculos: con la barra *5-6* y el disco-vínculo *16-17-29* (fig. 2.4*b*). De este modo, todo el sistema es variante, aunque cada uno de los discos tiene un vínculo superfluo (por ejemplo, los *5-15* y *6-18*). Es suficiente que uno de estos discos lo "mudemos" al campo *5-6-16-17* para que todo el sistema se transforme en el invariante geométricamente.

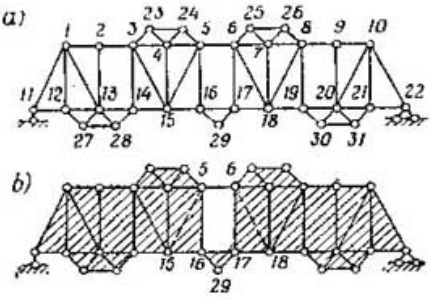


Fig. 2.4

La determinación de la invariabilidad geométrica y el número de vínculos superfluos se puede efectuar también por la vía inversa, eliminando los nudos que contengan diadas. Tal vía puede ser llamada procedimiento de destrucción sucesiva de un sistema.

Ejemplo 2.5. Investigar el sistema representado en la fig. 2.5*a*.

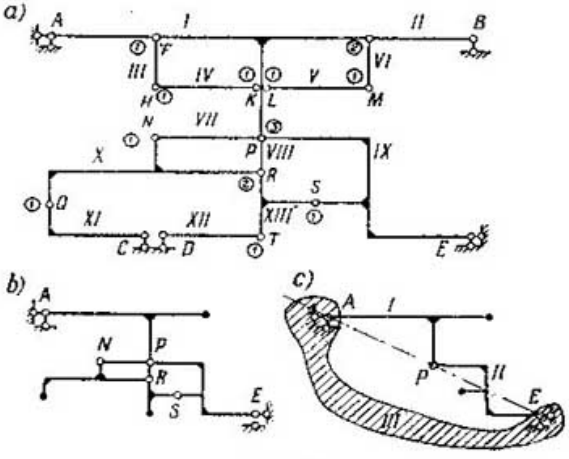


Fig. 2.5

Aquí, $D = 13$, $V_{ap} = 7$ y $A = 16$ (la multiplicidad de cada articulación está indicada dentro de un círculo). De tal manera, por (2.1),

$$V = 3 \cdot 13 - 2 \cdot 16 - 7 = 0,$$

esto es, el sistema puede ser invariante.

Efectuemos el análisis cinemático empleando el procedimiento de destrucción sucesiva. Al principio eliminemos, mentalmente, los nudos H y M, fijados al sistema por las diadas HF y HK (el nudo H) y las MG y ML (el nudo M). Prestemos atención a que en el sistema la articulación G se conserva, ya que ésta une más dos barras AG y GB, además de la MG. Siguiendo, se puede eliminar el nudo B, fijado al sistema por la barra GB y a tierra por

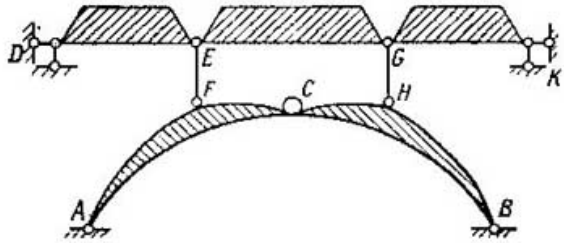


Fig. 2.6

la de apoyo. De modo análogo, eliminemos el nudo C (fijado a tierra por la barra de apoyo y al sistema, por el vínculo CQ) y el D (fijado a tierra por la barra de apoyo y al sistema por la DT).

Luego de esta destrucción parcial, el sistema pasa a tener el aspecto representado en la fig. 2.5*b*. Suprimiendo el nudo N unido

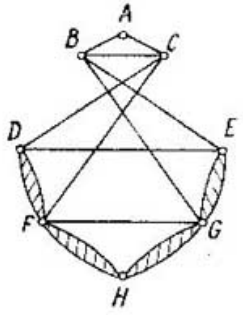


Fig. 2.7

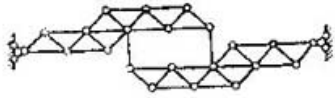


Fig. 2.8

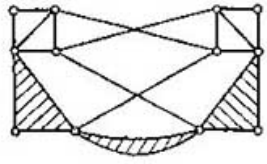


Fig. 2.9

a la parte restante del sistema con la barra NP y el vínculo-disco NR, y luego, el nudo R, unido por la barra RP y el vínculo-disco RS, obtenemos el sistema representado en la fig. 2.5*c*. Este representa en sí tres discos unidos por tres articulaciones pertenecientes a una misma línea recta. Por consiguiente, el sistema dado es de variación instantánea.

Problemas 2.6—2.17. Investigar los sistemas representados en las figs. 2.6—2.17.

Respuestas: № 2.6. El sistema es invariante y tiene una barra de apoyo horizontal superflua. Es cómodo comenzar la formación del sistema fijando el nudo C a tierra por medio de dos diadas AC y BC.

№ 2.7. El sistema es de variación instantánea. Puede ser representado en forma de tres discos (los ABC, DE y FGH), que

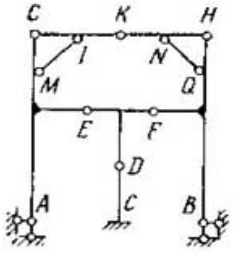


Fig. 2.10

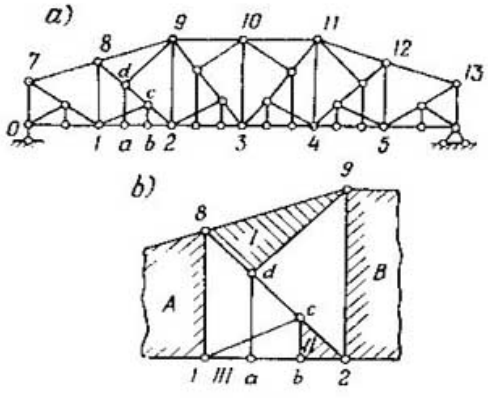


Fig. 2.11

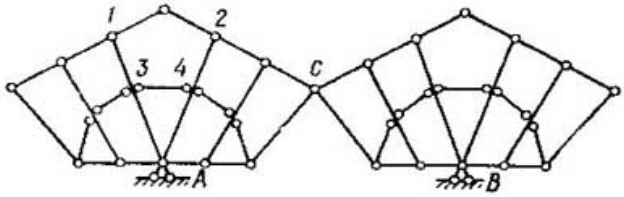


Fig. 2.12

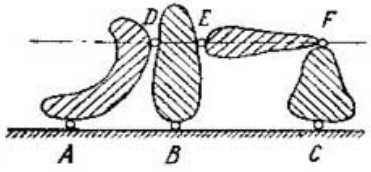


Fig. 2.13

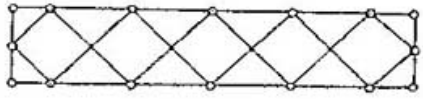


Fig. 2.14

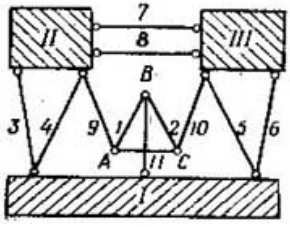


Fig. 2.15

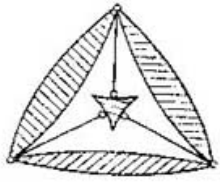


Fig. 2.16

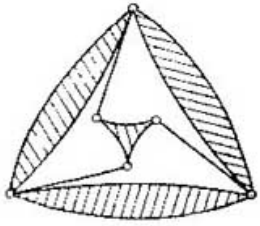


Fig. 2.17

llevan tres centros instantáneos de rotación colocados sobre una recta vertical.

№ 2.8. El sistema es invariante y no posee vínculos superfluos. Puede ser representado en forma de tres discos (incluyendo la tierra) con tres centros instantáneos de rotación no pertenecientes a una misma línea recta.

№ 2.9. El sistema es invariante y no tiene vínculos superfluos. Puede ser examinado así mismo como el sistema precedente.

№ 2.10. El sistema es invariante y posee tres vínculos superfluos (por ejemplo, la articulación *K* y la barra horizontal de apoyo *B*).

№ 2.11. El sistema es invariante y no cuenta con vínculos superfluos. En la fig. 2.11*b* se muestra la manera en que, de una de las partes de la armadura dada, se forma un sistema geométricamente invariante. Prestemos atención a que la barra 1-*a* actúa como disco *III* y los discos *A* y *B*, como vínculos *1-8* y *9-2*.

№ 2.12. El sistema es invariante y no tiene vínculos superfluos. Es conveniente comenzar la demostración por el examen del sistema compuesto de tres discos: los *A-1*, *A-2* y *3-4*.

№ 2.13. El sistema es invariante y no posee vínculos superfluos. Las tres articulaciones *D*, *E* y *F* que están sobre una misma recta (al igual que las tres articulaciones *A*, *B* y *C*) no hacen al sistema de variación instantánea, porque son los centros de rotación no de tres, sino, de cuatro discos.

№ 2.14. El sistema es variante. Falta un vínculo. Señalemos que al insertarse las articulaciones en los lugares de intersección de las barras, el grado de variabilidad se conserva el mismo.

№ 2.15. El sistema es de doble variación instantánea. En primer lugar, los centros instantáneos de rotación de los discos *I*, *II* y *III* están sobre una misma recta (horizontal); en segundo lugar el triángulo *ABC* está fijado al sistema por tres barras que se cortan en un mismo punto.

№ 2.16. El sistema es de variación instantánea.

№ 2.17. El sistema es invariante y no posee vínculos superfluos.

§ 2.2. METODOS DE DETERMINACION DE LAS REACCIONES DE VINCULOS Y CRITERIOS DE VARIABILIDAD DE LOS SISTEMAS COMPLEJOS.

El método estático, el de sustitución de vínculos y el cinemático son métodos básicos de determinación de las reacciones de vínculos.

METODO ESTATICO

Si el sistema es geométricamente invariante y no posee vínculos superfluos, entonces, es isostático. En tal sistema, se pueden hallar las reacciones de vínculos empleando las ecuaciones de equilibrio.

La determinación analítica de las reacciones de vínculos se basa en el procedimiento general de las secciones o cortes, utilizado en diferentes modificaciones.

Ejemplo 2.18. Determinar la reacción de vínculos *1-6*, *3-8* y *2-3* del sistema plano representado en la fig. 2.18*a*.

Hallemos la reacción R_{1-6} al examinar el equilibrio del nudo *1* recortado por la sección *I—I* (procedimiento de recorte de nudos). Dado que el disco *1-2* (así como también otros discos) no está cargado y, por consiguiente, puede presentarse en forma de vínculo rectilíneo *1-2*, hallaremos la reacción buscada de la ecuación estática $\Sigma Y = 0$, $5P - R_{1-6} \operatorname{sen} \alpha_1 = 0$ (fig. 2.18*b*).

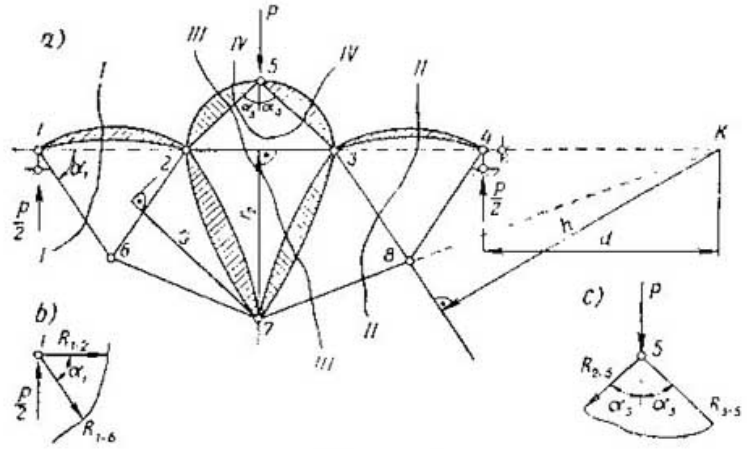


Fig. 2.18

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que

$$R_{1-6} = \frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha_1}.$$

Determinemos la reacción R_{3-8} al examinar el equilibrio de la parte del sistema separada por el corte *II—II* (procedimiento de los cortes simples o del punto de momento). El punto de momento para el vínculo *3-8* es el *k*, que está en la intersección de las líneas *7-8* y *3-4*. Componiendo la ecuación de equilibrio $\sum M_k = 0$, obtenemos que

$$R_{3-8} = -\frac{P}{2} \cdot \frac{d}{h}.$$

Por medio de un solo corte no es posible determinar la reacción de vínculo *2-3*, ya que cualquier corte (por ejemplo, *III—III*), efectuado a través del vínculo dado, deberá seccionar, tres vínculos más, como mínimo, que no se corten en un mismo punto. Por eso, en el caso dado, es necesario hallar previamente la reacción de uno de los vínculos comprendidos en la sección *III—III*, por medio

de un corte complementario, por ejemplo, la sección *IV—IV*, que recorta el nudo *5*.

Según la fig. 2.18*c*: $\sum Y = -P - 2R_{2\text{-}5}\cos\alpha_3 = 0$ y, por consiguiente,

$$R_{2\text{-}5} = -\frac{P}{2\cos\alpha_3}.$$

Ahora, en la parte de sistema separada por el corte *III—III* hay sólo tres reacciones incógnitas: la R_{2-3} buscada, así como tam-

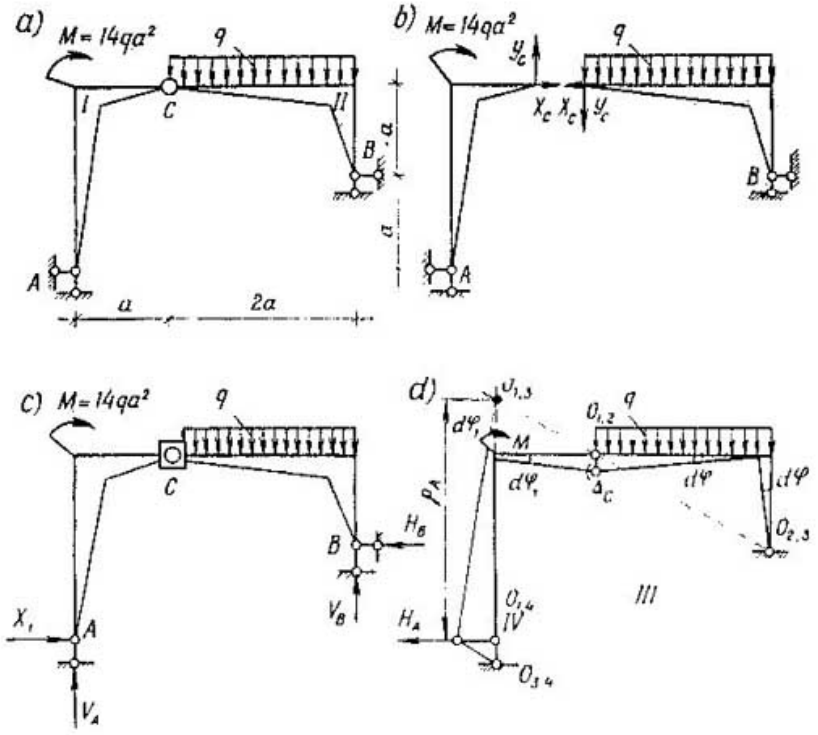


Fig. 2.19

bién, las R_{7-8} y P_{3-7}. El punto 7 es el de momento para el vínculo *2-3*. Partiendo de la ecuación de la estática $\sum M_7 = R_{2\text{-}3}r_2 + R_{2\text{-}5}r_3 = 0$ y considerando el valor obtenido R_{2-5}, hallamos que

$$R_{2\text{-}3} = \frac{Pr_3}{2\cos\alpha_3 r_2}.$$

Ejemplo 2.19. Determinar las componentes vertical y horizontal de la reacción R_c en la articulación *C* (fig. 2.19*a*, *b*).

En el caso dado, para determinar las reacciones X_c e Y_c efectuamos, simultáneamente, dos cortes: uno, a través de las articulaciones *C* y *A*, y el otro, las *C* y *B* (procedimiento de cortes conjuntos).

Luego compongamos un sistema de dos ecuaciones de la estática para ambas partes cercenadas:

$$\left.\begin{array}{l} \text{para el disco } I \sum M_A = X_c \cdot 2a - Y_c a + 14qa^2 = 0, \\ \text{para el disco } II \sum M_B = X_c a + Y_c \cdot 2a + 2qa^2 = 0. \end{array}\right\}$$

Resolviendo estas ecuaciones conjuntamente, por medio de determinantes, obtenemos que $D = 5a$, $D_1 = -30qa^2$ y $D_2 = +10qa^2$. De donde $X_c = -6qa$ e $Y_c = 2qa$.

Señalemos que la expresión del determinante D no depende de la carga externa, sino que es función de los parámetros geométricos del propio sistema. Para $D \neq 0$, las reacciones buscadas tienen determinados valores finitos, lo que atestigua sobre la invariabilidad geométrica del sistema. Pero, si el determinante D,

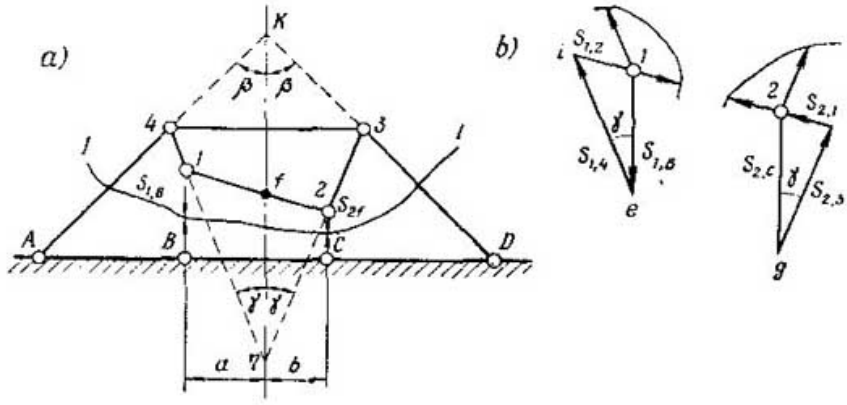


Fig. 2.20

compuesto por los coeficientes de las ecuaciones de equilibrio (siendo suficiente su cantidad), es igual a cero, los esfuerzos en los vínculos serán iguales a infinito. Esto es uno de los criterios estáticos de variabilidad de un sistema que tiene una cantidad suficiente de vínculos.

El de carga cero es otro criterio estático de variabilidad de un sistema con suficiente cantidad de vínculos, basado en que la solución obtenida no es unívoca. Si las reacciones de algunos vínculos del sistema, no habiendo carga externa (la carga es cero), son distintas de cero, el sistema es de variación instantánea o variante con vínculos superfluos.

Ejemplo 2.20. Demostrar que el sistema representado en la fig. 2.20*a*, es de variación instantánea.

Tracemos la sección *I—I*. Supongamos que en el vínculo *2-C* es posible el surgimiento de una fuerza *R*. Entonces, del examen

del equilibrio de la parte cercenada ($\sum M_h = 0$) hallamos que

$$S_{1,\,B} = \frac{b}{a} S_{2,\,C} = \frac{b}{a} R.$$

Recortando el nudo *1* determinemos las reacciones $S_{1,\,4}$ y $S_{1,\,2}$. Análogamente, del recorte del nudo *2* determinemos las reacciones $S_{2,\,3}$ y $S_{2,\,1}$ (fig. 2.20*b*). Del examen de los triángulos *1-n-f* e *i-1-e*, así como también, de los *f-n-2* y *2-g-j*, es fácil deducir que $S_{1,\,2} = S_{2,\,1}$ y $S_{1,\,4} = S_{2,\,3}$. Más adelante, recortando los nudos *4* y *3*, determinemos que $S_{3,\,4} = S_{4,3}$ y $S_{4,\,A} = S_{D,\,3}$. De este modo, en el caso dado, no habiendo carga externa, las reacciones de todos los vínculos serán funciones de la fuerza R, la cual podrá tener un valor arbitrario. Por consiguiente, el sistema es de variación instantánea [1]).

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN DE VÍNCULOS

El cálculo de un sistema dado se efectúa por medio de otro "sustituyente", más simple, isostático, y que se obtiene del sistema dado sustituyendo uno o varios vínculos. En este caso, los vínculos eliminados del sistema dado son sustituidos por las reacciones incógnitas X_n y, sobre los vínculos introducidos en el sistema sustituyente se imponen las condiciones de igualdad a cero de sus reacciones totalizantes, debidas a la acción de todas las fuerzas sobre el sistema sustituyente. Estas condiciones poseen las siguientes ecuaciones canónicas (para el k^{mo} vínculo introducido):

$$r_{k1}X_1 + r_{k2}X_2 + \ \ldots\ + r_{kn}X_n + R_{kP} = 0, \qquad (2.4)$$

donde r_{kn} es la reacción del k^{mo} vínculo debido a la fuerza $\bar{X}_n = 1$; R_{kP} es la reacción del k^{mo} vínculo debida a la carga dada.

Determinados los valores de las incógnitas X_n de la resolución del sistema de ecuaciones tipo (2.4), hallemos la reacción de cualquier vínculo sobre la base del principio de independencia de acción de las fuerzas:

$$S_i = \bar{S}_{i1}X_1 + \bar{S}_{i2}X_2 + \ \ldots\ + \bar{S}_{in}X_n + S_{iP}. \qquad (2.5)$$

Ejemplo 2.21. Determinar las reacciones de vínculos en el sistema representado en la fig. 2.21*a*.

El sistema sustituyente es mostrado en la fig. 2.21*b*. Aquí, los vínculos *1-1'*, *2-2'* y *3-3'* fueron sustituidos por las fuerzas incógnitas X_1, X_2 y X_3, siendo que los vínculos sustituyentes constituyen empotramientos en los nudos *1'*, *2'* y *3'*. De tal modo, el sistema sustituyente representa una viga de contorno quebrado asentada sobre dos apoyos y, además de la fuerza P, cargada con las fuerzas X_1, X_2 y X_3.

---

[1]) En el libro de V. A. Kiseliov, "Mecánica de construcción" t. I (1972, pág. 69), se examina un sistema no cargado, semejante, pero que es invariante. En él, la fuerza axil S_{12} determinada del recorte de nudos, posee diferentes valores ($S_{12} \neq S_{21}$) debido a que los ángulos γ son desiguales.

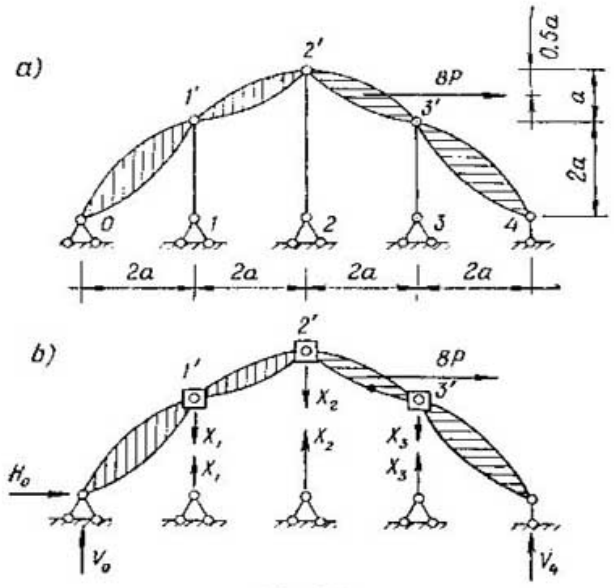


Fig. 2.21

Determinemos los valores de las reacciones (de los momentos en los empotramientos agregados) debidas a la fuerza P y a las fuerzas unitarias $\bar{X}_i = 1$:

$r_{11} = \bar{M}_{11} = 0{,}75 \cdot 2a = 1{,}5\ a;$ $\quad r_{31} = \bar{M}_{31} = 0{,}25 \cdot 2a = 0{,}5\ a;$

$r_{12} = \bar{M}_{12} = 0{,}5 \cdot 2a = 1a;$ $\quad r_{32} = \bar{M}_{32} = 0{,}5 \cdot 2a = 1a;$

$r_{13} = \bar{M}_{13} = 0{,}25 \cdot 2a = 0{,}5\ a;$ $\quad r_{33} = \bar{M}_{33} = 0{,}75 \cdot 2a = 1{,}5\ a;$

$r_{21} = \bar{M}_{21} = 0{,}25 \cdot 4a = 1a;$ $\quad R_{1P} = 8P \cdot 2a - 2{,}5P \cdot 2a = 11P\ a$

$r_{22} = \bar{M}_{22} = 0{,}5 \cdot 4a = 2a;$ $\quad R_{2P} = 8P \cdot 3a - 2{,}5P \cdot 4a = 14P\ a;$

$r_{23} = \bar{M}_{23} = 0{,}25 \cdot 4a = 1a;$ $\quad R_{3P} = 2{,}5P \cdot 2a = 5Pa.$

Según (2.4), simplificando por a obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 1{,}5X_1 + X_2 + 0{,}5X_3 + 11P &= 0;\\ X_1 + 2X_2 + X_3 + 14P &= 0;\\ 0{,}5X_1 + X_2 + 1{,}5X_3 + 5P &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones por medio de determinantes obtenemos que $D = 2$; $D_1 = -8P$; $D_2 = -12P$ y $D_3 = 4P$. Por consiguiente, $X_1 = -4P$, $X_2 = -6P$ y $X_3 = +2P$.

En correspondencia con (2.5) hallemos los valores de las reacciones de apoyo:

$$V_0 = -8P; \quad V_4 = 0; \quad H_0 = -8P.$$

Prestemos atención al hecho de que todas las reacciones halladas poseen un valor determinado, ya que $D \neq 0$. Si el determinante de las ecuaciones canónicas del método de sustitución de vínculos fuera igual a cero, entonces, las reacciones de vínculos tendrían valores infinitos, lo cual, al igual que el método estático, testificaría la variabilidad del sistema.

Ejemplo 2.22. Determinar los esfuerzos en todas las barras del sistema lineal articulado representado en la fig. 2.22*a*.

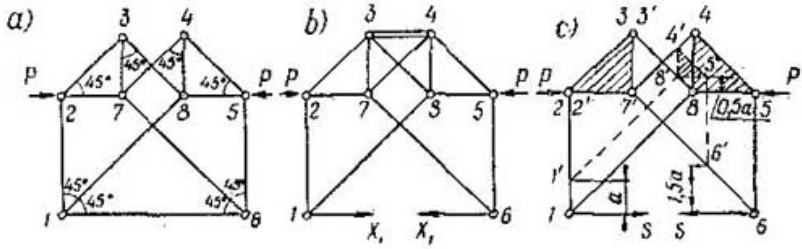


Fig. 2.22

El sistema dado tiene un número suficiente de vínculos para ser geométricamente invariante, dado que, de acuerdo con (2.2), $V = 2 \cdot 8 - (13 + 3) = 0$. No es difícil convencerse de que el sistema sustituyente elegido, representado en la fig 2.22*b*, es geométricamente invariante. En este caso hay un solo vínculo sustituyente (*3-4*), por lo que el determinante D está representado por un solo coeficiente r_{11}, el cual representa el esfuerzo en dicho vínculo sustituyente *3-4* debido a la fuerza $X_1 = 1$. Hallemos $\bar{S}_{3-4}$ determinando, de paso, los esfuerzos en las barras restantes.

Recortando sucesivamente los nudos *1*, *2*, *7* y *3* y considerando la simetría del sistema, obtenemos:

$$\bar{S}_{1-6} = +1; \quad \bar{S}_{1-8} = \bar{S}_{6-7} = -\sqrt{2}; \quad \bar{S}_{1-2} = \bar{S}_{5-6} = +1;$$

$$\bar{S}_{2-7} = \bar{S}_{5-8} = -1; \quad \bar{S}_{2-3} = \bar{S}_{4-5} = +\sqrt{2};$$

$$\bar{S}_{4-7} = \bar{S}_{3-8} = 0; \quad \bar{S}_{3-7} = \bar{S}_{4-8} = -1; \quad \bar{S}_{3-4} = r_{11} = +1.$$

Dado que $r_{11} \neq 0$, entonces, el sistema es geométricamente invariante.

Determinemos el esfuerzo en el vínculo *3-4* debido a la acción de la fuerza externa. Procediendo en forma análoga a la precedente, obtenemos:

$$S^P_{1-6} = 0; \quad S^P_{1-2} = S^P_{5-6} = 0; \quad S^P_{1-8} = S^P_{6-7} = 0;$$

$$S^P_{2-3} = S^P_{4-5} = 0; \quad S^P_{2-7} = S^P_{5-8} = -P;$$

$$S^P_{4-7} = S^P_{3-8} = -\sqrt{2}P; \quad S^P_{3-7} = S^P_{4-8} = +P;$$

$$S^P_{3-4} = R_{1P} = +P.$$

Basándose en (2.4) determinemos que

$$X_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} = -P.$$

En correspondencia con (2.5), hallemos que

$$S_{1\text{-}6} = -P; \quad S_{1\text{-}8} = S_{6\text{-}7} = +P\sqrt{2}; \quad S_{1\text{-}2} = S_{5\text{-}6} = -P;$$
$$S_{2\text{-}7} = S_{5\text{-}8} = 0; \quad S_{2\text{-}3} = S_{4\text{-}5} = -P\sqrt{2};$$
$$S_{4\text{-}7} = S_{3\text{-}8} = -P\sqrt{2}; \quad S_{3\text{-}7} = S_{4\text{-}8} = +2P.$$

Ejemplo 2.23. Determinar las reacciones de apoyo del sistema triarticulado representado en la fig. 2.19*a*. Al determinar las reacciones de los vínculos de apoyo del sistema sustituyente (fig. 2.19*c*), debidas a la carga ($V_A^P = -4qa$; $V_B^P = 6qa$; $H_B^P = 0$), hallemos que

$$R_{1P} = M_C^P = -4qa^2 + 14qa^2 = 10qa^2.$$

Las reacciones de apoyo debidas a la acción de la fuerza unitaria $\bar{X}_1 = 1$ son iguales: $\bar{H}_B = 1$; $\bar{V}_A = \frac{1}{3}$; $\bar{V}_B = -\frac{1}{3}$. De esta manera,

$$r_{11} = \bar{M}_C = \frac{1}{3}a - 2a = -\frac{5}{3}a.$$

Por consiguiente, $X_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} = +6qa$;

$$V_A = V_A^P + \bar{V}_A X_1 = -2qa; \quad H_A = X_1 = 6qa;$$
$$V_B = V_B^P + \bar{V}_B X_1 = 4qa; \quad H_B = H_B^P + \bar{H}_B X_1 = 6qa.$$

MÉTODO CINEMÁTICO

Del sistema geométricamente invariante dado, eliminamos el vínculo, cuya reacción se determina. A cambio del vínculo eliminado se aplican las correspondientes reacciones R. De tal manera, el sistema se transforma en un mecanismo al que se le imprime un posible desplazamiento. Luego, en correspondencia con el principio de los desplazamientos posibles, se compone la expresión de los trabajos de la carga externa y de la reacción buscada:

$$\sum P_i \Delta_i + R\Delta_R = 0, \tag{2.6}$$

partiendo de la cual se calcula precisamente el valor de la reacción. Por consiguiente, la incógnita R se determina resolviendo una sola ecuación. En esto radica la particularidad del método cinemático.

Mostremos el empleo del método cinemático en unos ejemplos de aplicación directa de los procedimientos de los desplazamientos

posibles, de los puntos representativos y de los centros instantáneos.

Ejemplo 2.24. Determinar la reacción de vínculo de apoyo *1*, originado en el sistema representado en la fig 2.23*a*.

Eliminemos el vínculo de apoyo *1* y en su lugar apliquemos la reacción R_{1P}. Convengamos en que el sistema posee desplaza-

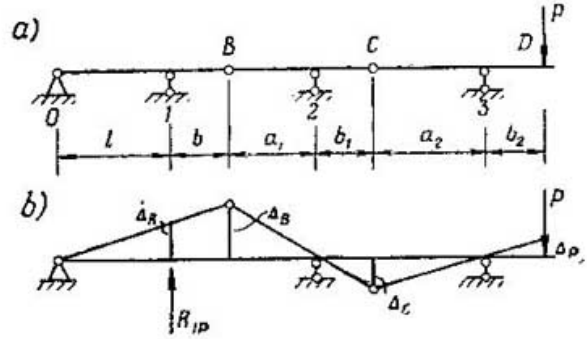


Fig. 2.23

mientos posibles tales, como se muestran en la fig. 2.23*a*. Entonces,

$$-P\Delta_P + R_{1P}\Delta_R = 0.$$

De las relaciones geométricas hallemos que

$$\Delta_B = \frac{l+b}{l}\Delta_R; \quad \Delta_C = \frac{b_1}{a_1}\Delta_B = \frac{(l+b)\,b_1}{la_1}\Delta_R;$$

$$\Delta_P = \Delta_D = \frac{b_2}{a_2}\Delta_C = \frac{(l+b)\,b_1b_2}{a_1a_2l}\Delta_R.$$

De este modo,

$$R_{1P} = P\frac{\Delta_P}{\Delta_R} = \frac{(l+b)\,b_1b_2}{a_1a_2l}P.$$

El procedimiento de los puntos representativos se basa en la construcción de un plano no polar de los posibles desplazamientos (velocidades) de los puntos del mecanismo formado. El desplazamiento (velocidad) de cada punto k_i se representa con un vector (en determinada escala) girado 90° en relación a la verdadera dirección del desplazamiento ds_i. Al extremo final del vector k_i' girado lo llaman punto representativo o representación del punto k_i.

La expresión general del principio de los desplazamientos posibles se escribe en la siguiente forma:

$$\sum P_i\,ds_i\cos(P_i,\ ds_i) = 0, \qquad (2.7)$$

donde la suma se extiende a todas las fuerzas (las externas y las reacciones determinadas). Considerando que la proyección de la longitud del vector girado, sobre un eje perpendicular a la línea

de acción de la fuerza P, representa en sí el "brazo" $\lambda_{k_i'}$ de esta fuerza con respecto a la representación del punto k_i', la expresión (2.7) es presentada así:

$$\sum M_{k_i'} = \sum P_i \lambda_{k_i'} = 0. \qquad (2.8)$$

De este modo, la reacción R buscada se determina de la condición de la igualdad a cero de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el mecanismo con respecto a la representación de sus puntos de aplicación.

Al aplicar el procedimiento de los puntos representativos es indispensable saber que:

a) el punto representativo está sobre el radiovector con el origen en el centro instantáneo de rotación;

b) la representación de un punto fijo coincide con el mismo punto;

c) cualquier segmento de recta en un disco se representa con un segmento de recta paralela.

Ejemplo 2.25. Determinar el esfuerzo en la barra *1-6* del sistema lineal articulado examinado anteriormente (véase la fig. 2.22*a*).

Eliminemos el vínculo *1-6* sustituyendo su efecto por las fuerzas S buscadas (véase la fig. 2.22*c*). El sistema dado es libre, por lo que se puede tomar uno de sus discos como fijo, por ejemplo, el *2-3-7*. Las representaciones de los puntos fijos indicados van a coincidir con ellos mismos.

Con un segmento arbitrario a marcamos sobre la barra *1-2* el punto representativo *1'* (ya que el punto *2* es un centro instantáneo de rotación). Al punto representativo *8'* lo determinamos como situado en la intersección de las líneas *1'-8'* y *3'-8'*, paralelas a las *1-8* y *3-8*. Luego, hallemos el punto representativo *4'* situado en la intersección de las líneas *4'-7'* y *4'-8'*. Seguidamente de una manera análoga hallemos el punto representativo *5'* y, por fin, la posición del *6'*.

"Los brazos" de las fuerzas $\lambda_{k_i'}$ pueden ser determinados de relaciones geométricas. En el caso dado

$$\lambda_{1'} = a; \quad \lambda_{5'} = \frac{a}{2}; \quad \lambda_{6'} = \frac{3}{2} a.$$

De tal modo, según (2.8),

$$\sum M_{k_i'} = S\lambda_{1'} - S\lambda_{6'} - P\lambda_{5'} = 0$$

y, por consiguiente,

$$S = \frac{P\lambda_{5'}}{\lambda_{1'} - \lambda_{6'}} = \frac{P\frac{a}{2}}{a - \frac{3}{2}a} = -P.$$

El resultado obtenido coincide exactamente con el hallado anteriormente (ejemplo 2.22). Esta vía de resolución es considerablemente más simple que la del método de sustitución de vínculos.

Ejemplo 2.26. Determinar la reacción del vínculo CF en el sistema linealarticulado representado en la fig. 2.24*a*.

El mecanismo obtenido después de la eliminación del vínculo CF está representado en la fig. 2.24*b*. Elegimos arbitrariamente (sobre el radio-vector AB) la posición de la representación del punto B. Luego, determinamos la posición E'. Este se halla en la intersección de la línea $B'E' \| BE$ y la recta vertical que pasa por el punto E. Más adelante hallamos la posición de los puntos C' y F'.

Determinados los brazos $\lambda_{k_i'}$ (fig. 2.24*c*), en correspondencia con (2.8), obtenemos:

$$S = \frac{P\lambda_{F'}}{\lambda_{F'} - \lambda_{C'}} = \frac{P\frac{3}{8}a}{\frac{3}{8}a - \frac{2}{3}a} = -\frac{9}{7}P.$$

Prestemos atención a lo que, tanto en este ejemplo como en el precedente, los valores de $\lambda_{k_i'}$, para los extremos de la barra eliminada, no son iguales. Por esto la reacción del vínculo buscada posee un valor determinado. Si las representaciones de los extremos de la barra eliminada estuvieran sobre una recta paralelá a la barra, entonces sería $S = \infty$ y, por consiguiente, el sistema sería de variación instantánea.

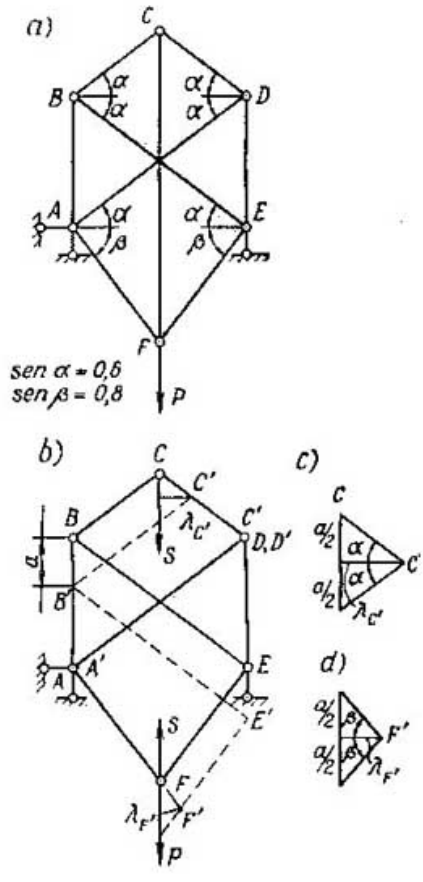


Fig. 2.24

Por ejemplo, si $\beta = \alpha$ (fig. 2.24), entonces, $\lambda_{C'} = \lambda_{F'} \times$ $\times$ $(C'F' \| CF)$, esto es, el sistema sería de variación instantánea.

El procedimiento de centros instantáneos se basa en la siguiente anotación de la ecuación (2.7):

$$\sum M_{o_k} \cdot d\varphi_k = 0. \qquad (2.9)$$

Aquí, M_{o_k} es el momento de las fuerzas externas que actúan en el k^{mo} disco con respecto a su centro instantáneo de rotación y $d\varphi_k$, el ángulo infinitesimal de giro del correspondiente disco.

Si el centro instantáneo de rotación del disco está alejado al infinito, el producto $M_o d\varphi_k$ deberá ser sustituido por $R\Delta$ donde R es la resultante de las fuerzas en el disco y Δ, un desplazamiento infinitesimal por la dirección de la fuerza R.

Cuando se emplea el procedimiento señalado, es indispensable saber que:

a) si dos discos están unidos por una articulación, ésta, es el centro de rotación;

b) si dos discos están unidos por dos barras, el punto de intersección de ellas será el centro instantáneo de rotación;

c) tres centros instantáneos recíprocos de rotación de tres discos de un mecanismo se encuentran en una misma recta.

Ejemplo 2.27. Determinar la reacción del vínculo de apoyo horizontal H_A del sistema triarticulado representado en la fig. 2.19*a*.

Representemos el mecanismo formado después de la eliminación del vínculo de apoyo (fig. 2.19*d*), en forma de cuatro discos sucesivamente unidos con articulaciones (el disco *III* es "la tierra" y el *IV*, la barra de apoyo vertical).

Imprimamos al mecanismo un desplazamiento posible, girando el disco *II*, con respecto a O_{2-3} a un ángulo $d\varphi$. En este caso la posición del disco *I* se va a determinar por la posición de la articulación C y del centro instantáneo de rotación O_{1-3}. Este último lo hallaremos como punto de intersección de las líneas O_{34}—O_{14}—O_{13} y O_{23}—O_{12}—O_{13}(sobre la base del teorema de los tres centros instantáneos, mencionado más arriba).

Despreciando los desplazamientos de un alto orden de pequeñez, en correspondencia con (2.9), obtenemos:

$$Ra\,d\varphi + M\,d\varphi_1 + H_A \rho_A\,d\varphi_1 = 0,$$

donde $R = q \cdot 2a$ es la resultante de la carga repartida;

$$d\varphi_1 = 2\,d\varphi \left(\text{por cuanto } d\varphi_1 = \frac{\Delta_c}{a} \text{ y } d\varphi = \frac{\Delta_c}{2a}\right)$$

$\rho_A = \frac{5}{2}a$ (de las relaciones geométricas).

Señalemos que aquí, cada sumando se toma con signo positivo, por cuanto los momentos de fuerzas y los desplazamientos angulares coinciden en la dirección.

Simplificando todos los miembros de la ecuación por $d\varphi$, obtenemos que

$$q \cdot 2a^2 + 14qa^2 \cdot 2 + 5aH_A = 0,$$

de donde $H_A = -6qa$, lo que coincide exactamente con los resultados obtenidos anteriormente sobre la base de otros métodos de cálculo.

CAPITULO 3 * CALCULO DE VIGAS ISOSTATICAS Y PORTICOS PLANOS BAJO CARGA MOVIL

Ejemplo 3.1. Construir las líneas de influencia de los momentos flectores M y las fuerzas transversales Q en las secciones a, b, c, d de una viga isostática de varios tramos (fig. 3.1*a*), debidos a la fuerza vertical $P = 1$.

Resolución

MÉTODO ESTATICO DE CONSTRUCCIÓN DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA

La viga de varios tramos, en las secciones de la cual se exige construir las líneas de influencia de las fuerzas internas, está compuesta por una serie de discos (*AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, y *FG*) unidos entre sí con articulaciones. Para la resolución del problema propuesto es útil desglosar las partes básicas de la viga, es decir, aquellas cuya inmovilidad con respecto a la tierra no depende de la presencia de los discos restantes. Con esto, es indispensable tener en cuenta que, por cuanto se trata de la acción de una sola fuerza vertical sobre el sistema, entonces, los esfuerzos en los vínculos horizontales entre los discos son iguales a cero, no pudiendo haber desplazamientos horizontales de los discos.

En esta condición, se han de considerar partes básicas de la viga a los discos *AB*, *CD*, y *FG*. Hablando en rigor, los dos últimos no lo son dado que la imposibilidad de su desplazamiento horizontal respecto a la tierra, está asegurada por el vínculo horizontal con la tierra en el disco *AB*, esto es, por el propio disco, pero, como se indicó más arriba, al no haber carga horizontal, estos dos discos resultan independientes del disco *AB*.

Los discos *BC* y *DE* no pueden desplazarse con respecto a la tierra, debido a la presencia de los *AB* y *CD*, ligados a ésta en forma estable; a su vez, al disco *EF* no le permiten desplazarse con respecto a la tierra los discos *DE* y *FG*, ligados invariablemente a ella por medio del disco básico *CD* (véase el capítulo 2).

Como resultado de tal análisis obtenemos un esquema de a pisos (fig. 3.1*b*), del cual se ve que, si la carga se encuentra sobre las vigas *AB* y *CD* o *FG*, entonces, han de trabajar sólo las vigas cargadas y, las *BC*, *DE* y *EF*, no.

Si la carga se encuentra sobre la viga *BC*, trabajan junto con ella la *CD* y el voladizo *AB*. Si la carga está sobre la viga *DE*, entonces, además de ésta trabaja la *CD* y las restantes no, y por fin, si la carga se halla sobre la viga *EF*, trabajan el voladizo *FG*, la viga *DE* y, enseguida, la *CD*.

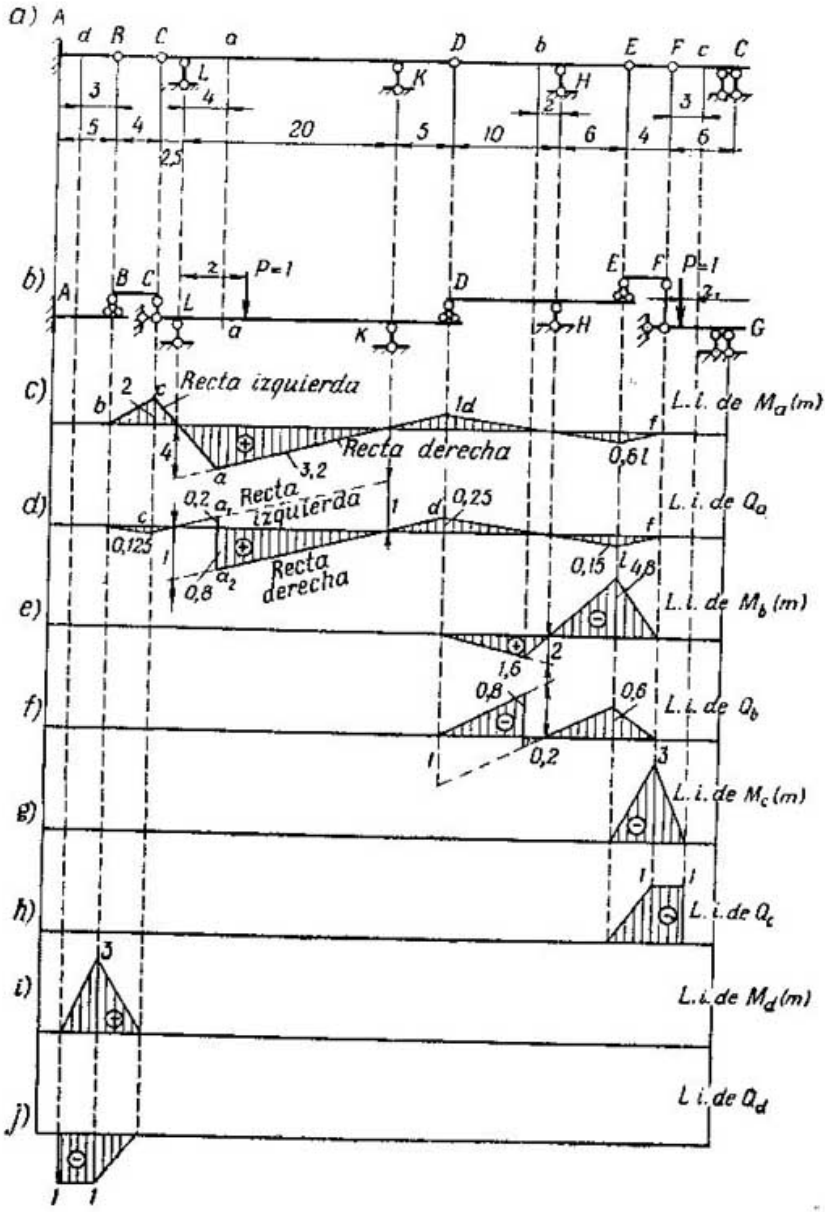

a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i)
j)
Recta izquierda
Recta derecha
Recta izquierda
Recta derecha
L. i. de M_a (m)
L. i. de Q_a
L. i. de M_b (m)
L. i. de Q_b
L. i. de M_c (m)
L. i. de Q_c
L. i. de M_d (m)
L. i. de Q_d

Fig. 3.1

Al construir la línea de influencia de un esfuerzo en una sección cualquiera de la viga, al principio es necesario desglosar, como viga independiente, al disco donde se encuentra la sección examinada y construirle la línea de influencia independientemente de las partes restantes de toda la viga y, luego, analizar cómo varía este esfuerzo, al moverse la carga por las partes complementarias del sistema, con respecto a esta viga.

Es indispensable recordar que en los sistemas isostáticos, las líneas de influencia de las reacciones de vínculos son quebradas y, por eso, dos ordenadas dentro de los límites de un disco, determinan completamente la configuración de la línea de influencia al moverse la carga $P = 1$ por éste.

Construcción de la línea de influencia M_a. Para construir la línea de influencia del momento flector M_a en la sección a, desglosamos mentalmente el disco CD junto con sus vínculos a tierra (véase la fig. 3.1*b*).

Las reacciones L y K, cuando se mueve el peso $P = 1$ por la viga CD, son iguales: $L = \frac{20 - z}{20}$ y $K = \frac{z}{20}$. En este caso, se emplearon las condiciones de equilibrio

$$\sum M_k = 0 \text{ y } \sum M_L = 0. \tag{3.1}$$

Las reacciones de apoyo, cuando están orientadas hacia arriba, son positivas.

Para un movimiento del peso a la izquierda de la sección a, hasta el punto A,

$$M_a = K(20 - 4) = 16K$$

o, dentro de los límites desde a hasta C,

$$M_a = 16 \frac{z}{20} = 0{,}8z. \tag{3.2}$$

Dado que z se expresa en metros y la fuerza unitaria P es una magnitud abstracta, entonces, la unidad de la ordenada de la línea de influencia del momento son metros.

Para $z = 0$, o sea, cuando el peso se encuentra sobre el apoyo L, $M_a = 0$; para $z = 4$m, es decir, cuando el peso se encuentra sobre la sección a, $M_a = 0{,}8 \cdot 4 = 3{,}2$.

Estas dos ordenadas determinan la configuración de la línea de influencia de M_a para el movimiento del peso a la izquierda de la sección, o sea, el segmento ca (véase la fig. 3.1*c*), llamado recta izquierda.

Para el movimiento del peso a la derecha de la sección a hasta el punto D, el momento flector en dicha sección se escribe así:

$$M_a = L \cdot 4 = \frac{20 - z}{20} 4 = \frac{20 - z}{5}. \tag{3.3}$$

Para $z = 4$m, es decir, cuando el peso se encuentra sobre la sección a, $M_a = 3{,}2$; para $z = 20$ m, o sea, cuando el peso se encuentra sobre el apoyo derecho, $M_a = 0$. Estas ordenadas determinan la configuración de la línea de influencia de M_a para el movimiento del peso a la derecha de la sección a, o sea, el segmento ad, llamado recta derecha (véase la fig. 3.1c).

Así fue obtenida la línea de influencia del momento flector en la sección a, para el movimiento del peso $P = 1$ por la viga CD. Las ordenadas sobre los puntos C y D se pueden hallar de la semejanza de figuras o substituyendo los correspondientes valores de z en las expresiones 3 2 y 3.3. Así, si el peso se encuentra en el punto C, o sea, para $z = -2{,}5$m, $M_a = 0{,}8(-2{,}5) = -2$; si a la derecha de la sección, en el punto D, para $z = 25$m, entonces $M_a = \frac{20-25}{20} 4 = -1$m.

El disco BC (véase fig. 3.1b) apoya un extremo en el AB y el otro, sobre el CD; por lo tanto, si el peso se encuentra en el punto B, la carga entera se transmite al disco AB y $M_a = 0$; si en el punto C, entonces, la carga se transmite al disco CD y $M_a = -2$. La línea de influencia en el sector BC queda trazada por el segmento de recta bc.

El disco DE se apoya en el punto D sobre el CD y en el punto H sobre la tierra; por lo tanto si el peso se halla en el punto D, $M_a = -1$, si en el H, $M_a = 0$. La línea de influencia, dentro de los límites del disco DE, queda trazada por el segmento dl, en el punto E la ordenada fue hallada de consideraciones geométricas.

El disco EF se apoya sobre el DE en el punto E, donde la ordenada de la línea de influencia es igual a 0,6, y sobre el FG en el punto F. Esto significa que si el peso se encuentra en el punto F, entonces $M_a = 0$.

El trazado completo de la línea de influencia M_a se muestra en la fig. 3.1c.

Construcción de la línea de influencia de Q_a. Aquí, del mismo modo que para la construcción de la línea de influencia de M_a, al principio construimos la línea de influencia de Q_a para la parte desglosada de viga CD (véase la fig. 3.1b).

Admitamos que el peso está ubicado sobre el sector Ca, a la izquierda de la sección a. Entonces $Q_a = -K = -\frac{z}{20}$.

Para $z = 0$ $Q_a = 0$; para $z = 4$m $Q_a = -0{,}2$. Estas dos ordenadas dan la recta izquierda ca_1 de la línea de influencia de Q_a (fig. 3.1d).

Cuando el peso está ubicado sobre el sector aD, a la derecha de la sección a, entonces $Q_a = L = \frac{20-z}{20}$.

Para $z = 4$m $Q_a = 0{,}8$; para $z = 20$m $Q_a = 0$.

Por estas ordenadas construimos la recta derecha (a_2d) de la línea de influencia de Q_a (véase la fig. 3.1d).

Razonando del mismo modo que para la construcción de la línea de influencia de M_a, obtenemos las ordenadas cero de la de Q_a en los puntos B, H y F.

En la fig. 3.1*d*, se muestra la vista general de la línea de influencia de la fuerza transversal en la sección a.

Las ordenadas de la línea de influencia de la fuerza transversal son adimensionales.

Construcción de las líneas de influencia de M_b y Q_b. Para construir las líneas de influencia del momento y la fuerza transversal en la sección b, del esquema a pisos (véase la fig. 3.1*b*) desglosamos mentalmente un disco, o sea, la viga simple DE, y construimos para ésta las líneas de influencia de M_b y Q_b, así mismo como para el disco, la viga CD.

La viga CD, con respecto a la DE, es básica, por eso, para el movimiento del peso por la viga CD y, más adelante, por las BC y AB (véase fig. 3.1*b*), la viga DE no trabaja, es decir, las ordenadas de ambas líneas de influencia, de M_b y Q_b, desde el punto A hasta el D, son iguales a cero.

Para el movimiento del peso por la viga EF, complementaria respecto a la DE, esta última trabaja, lo cual se marcó con una parte de línea de influencia en el sector EF.

Para un movimiento del peso por la viga voladiza FG, la viga DE no trabaja, las ordenadas de ambas líneas de influencia de M_b y Q_b en este sector, son iguales a cero.

Las líneas de influencia de M_b y Q_b se muestran, respectivamente, en la fig. 3.1*e*, *f*.

Se recomienda al mismo lector hacer un examen más detallado de la construcción de estas líneas de influencia.

Construcción de las líneas de influencia de M_c y Q_c. Para construir las líneas de influencia en una sección voladiza del sector FG desglosamos el sector-voladizo FG (fig. 3.1*a*, *b*).

Si el peso está ubicado a la derecha de la sección c, o sea, sobre el sector cG, entonces $M_c = 0$ y $Q_c = 0$. Si el peso está ubicado a la izquierda de la sección c, o sea, sobre el sector Fc,

$$M_c = -z_1 \quad \text{y} \quad Q_c = -1, \tag{3.4}$$

donde z_1 es la coordenada del punto de aplicación de la fuerza $P = 1$, contada desde la sección c hacia la izquierda.

Empleando las fórmulas (3.4) y considerando que el movimiento de la fuerza $P = 1$ desde el punto E hacia la izquierda, la viga complementaria EF no trabaja, lo cual significa que tampoco trabaja la cónsola FG, concluimos que, sobre el sector de viga AE las ordenadas de las líneas de influencia de M_c y Q_c son iguales a cero.

Se recomienda al lector que por su cuenta construya las líneas de influencia de M_d y Q_d.

Las líneas de influencia de M_c, Q_c, M_d y Q_d se muestran en la fig. 3.1*g* — *j*.

MÉTODO CINEMÁTICO DE CONSTRUCCIÓN DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA DEL MOMENTO EN LA SECCIÓN *a* Y DE LA FUERZA TRANSVERSAL EN LA *b*

Para construir la línea de influencia de M_a en la sección dada *a*, por el método cinemático (fig. 3.2*a*), eliminamos el vínculo de momento, para lo cual introducimos en esta sección la articulación mostrada en punteado. Ahora, el sistema dado (la viga) se hizo variante.

Por el método cinemático, la forma de la línea de influencia de un esfuerzo en un vínculo se determina con el diagrama de los desplazamientos posibles verticales del sistema de discos, por los cuales se mueve la fuerza $P = 1$, obtenido luego de la eliminación de este vínculo.

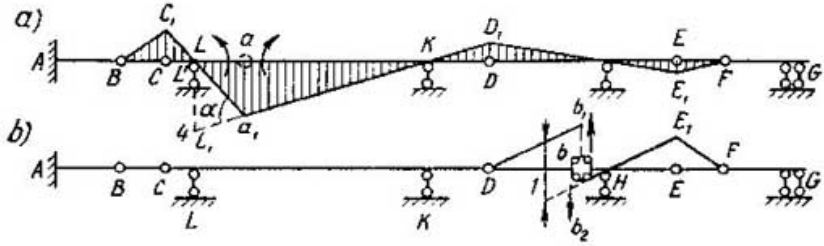


Fig. 3.2

Para que las ordenadas del diagrama de los desplazamientos posibles se igualen numéricamente a las de la línea de influencia, conviene que la magnitud del desplazamiento por la dirección del vínculo eliminado sea tomada igual a la unidad.

Los signos de la línea de influencia se determinan por la siguiente regla: si los desplazamientos de dos discos, engendrados de uno después de la eliminación de un vínculo, se efectúan contra la dirección del esfuerzo aplicado por la dirección del vínculo eliminado, entonces, si la fuerza $P = 1$ está dirigida hacia abajo, las ordenadas de la línea de influencia ubicadas más abajo del eje son positivas y, más arriba, negativas.

Luego de la eliminación de un vínculo (en el caso dado, con la introducción de la articulación *a*) analicemos los desplazamientos posibles de cada disco por separado (véase la fig. 3.2*a*).

El disco *AB* está ligado rígidamente a la tierra en el punto *A*, por consiguiente, con respecto a ésta, no puede tener ningún movimiento.

El disco *Ca* está sujeto a la tierra por los dos vínculos lineales *BC* y *LL'*, cuyo punto de intersección resulta su centro de rotación con respecto a la tierra, esto es, el punto *L*, alrededor del cual este disco puede girar hacia cualquier lado. Luego de rotar en el caso dado, por la dirección de las agujas del reloj, los puntos *C* y *a* ocuparán las posiciones respectivas C_1 y a_1.

Para el disco aD, K sirve de punto cero que no tiene desplazamientos verticales, por eso, después de un giro del disco Ca, el aD ocupará la posición a_1D_1; el DE, la posición D_1E_1 y, el EF, la posición E_1F, ya que al disco FG le es imposible girar, significando que el punto F conserva su posición primitiva.

Las ordenadas de la línea quebrada obtenida $BC_1a_1D_1E_1F$, contadas verticalmente desde la posición inicial del eje de la viga, son las ordenadas de la línea de influencia del momento flector en la sección a.

Se debe tomar tal escala que el desplazamiento de uno de los discos desunidos al introducir la articulación, con respecto al otro, sea igual a la unidad. En el caso dado, ésta es el ángulo α, cuya magnitud se la puede considerar convencionalmente como unidad. Por cuanto en el método cinemático se sobreentiende que los desplazamientos son infinitesimales, entonces LL_1 se considera como un arco, cuyo ángulo de giro α es infinitesimal.

Ya que el ángulo es convencionalmente tomado igual a la unidad, la ordenada deberá ser igual al radio de giro o a la longitud de la perpendicular, bajada desde el punto a_1 sobre la vertical trazada por el punto L, esto es, 4 m.

Para la construcción, en la sección b, de la línea de influencia de la fuerza transversal por el método cinemático, es necesario suprimir el vínculo por la dirección normal al eje de la viga (aquí, vertical), conservando el vínculo a lo largo del eje de la viga y el vínculo de momento. Estos vínculos subsistentes se muestran en la fig. 3.2*b*. Por la dirección del vínculo eliminado, a cada uno de los discos Db y bE, obtenidos nuevamente, se les aplica una fuerza transversal. En la figura se ve que, con respecto a la tierra, la parte de la viga en el sector AD es fija.

H es el punto cero del disco bE, en donde éste no puede tener desplazamiento vertical. Aceptemos que después de un desplazamiento el disco ocupa la nueva posición b_2E_1, entonces el disco Db, unido al bE por dos vínculos paralelos, es capaz de desplazarse con respecto a la tierra conservándose paralelo al bE y teniendo como cero el punto D, como perteneciente al disco fijo CD. La nueva posición del disco Db será la Db_1, siendo $Db_1 \parallel b_2E_1$.

Como en el caso precedente, el disco FG tampoco puede girar; por eso el punto F conserva su posición inicial y el disco EF ocupará la nueva posición E_1F. La distancia vertical entre las nuevas posiciones de los discos Db_1 y b_2E_1 igual a la unidad, será la escala.

La línea de influencia de Q_b está formada por las ordenadas de la línea quebrada $Db_1b_2E_1F$ contadas verticalmente desde la posición inicial del eje de la viga.

Se recomienda al lector que por sí mismo haga la verificación por el método cinemático de las líneas de influencia Q_a, M_b, M_c, Q_c, M_d y Q_d construidas anteriormente, por el método estático.

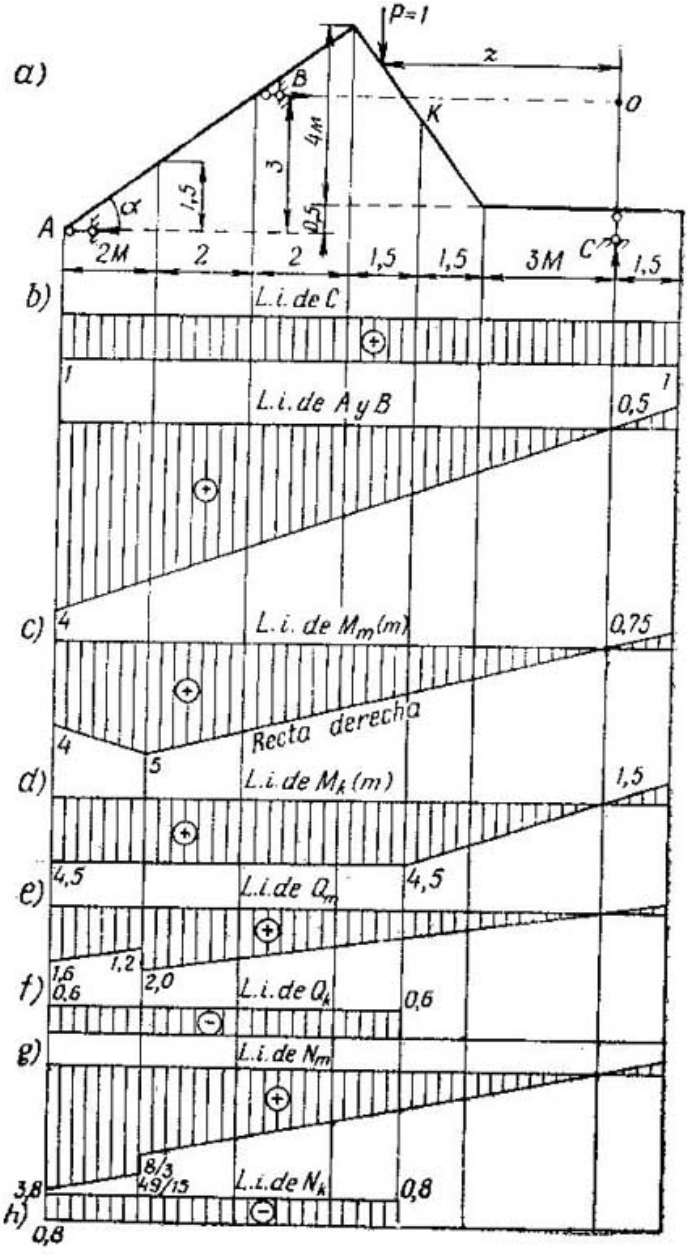

a)
P=1
z
B
K
o
A
C
α
1,5
3
4m
0,5
2M
2
2
1,5
1,5
3M
1,5
b)
L.i. de C
1
L.i. de A y B
0,5
1
c)
4
L.i. de $M_m(m)$
0,75
Recta derecha
4
5
d)
L.i. de $M_k(m)$
1,5
e)
4,5
L.i. de Q_m
4,5
f)
1,6
0,6
1,2
2,0
L.i. de Q_k
0,6
g)
L.i. de N_m
3,8
8/3
4,9/15
L.i. de N_k
0,8
h)
0,8

Fig. 3.3

Ejemplo 3.2. Construir las líneas de influencia M, Q y N en las secciones m y K dadas de la barra quebrada (fig. 3.3*a*).

Resolución

MÉTODO ESTÁTICO

Al principio construimos las líneas de influencia de las reacciones de apoyo, para lo cual empleamos las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum Y = 0; \quad -1 + C = 0; \quad C = 1.$$

En la fig. 3,3*b* se muestra la línea de influencia de la reacción C.

Para determinar la reacción de apoyo A componemos la ecuación de los momentos. Conviene tomar como punto de momento al punto O de intersección de las direcciones de las otras dos reacciones de apoyo B y C:

$$\sum M_0 = 0; \quad -1 \cdot z + A \cdot 3 = 0; \quad A = \frac{z}{3}.$$

En la fig. 3.3*c* se muestra la línea de influencia de la reacción A.

Construimos la línea de influencia de la reacción B.

$$\sum X = 0; \quad -A + B = 0; \quad A = B.$$

Por consiguiente, la línea de influencia de la reacción B es igual a la de la reacción A.

Pasamos a construir las líneas de influencia de las fuerzas internas en las secciones dadas.

Construimos la línea de influencia del momento flector M en la sección m. Si el peso $P = 1$ se mueve por el sistema a la derecha de la sección m (véase la fig. 3.3*a*), entonces

$$M_m = A \cdot 1{,}5 = \frac{z}{3} 1{,}5 = 0{,}5z;$$

$z = 0$ (el peso se encuentra sobre el apoyo C); $M_m = 0$;
$z = 10$ m (el peso se halla en la sección m); $M_m = 5$.

Si el peso se mueve a la izquierda de la sección m, el momento en ésta es

$$M_m = A \cdot 1{,}5 - 1\,(z - 10) = \frac{z}{3} 1{,}5 - 1\,(z - 10) = -0{,}5z + 10;$$

$$\text{para } z = 10 \text{ m } M_m = 5;$$
$$\text{para } z = 12 \text{ m } M_m = 4.$$

En la fig. 3.3*d* se muestra la línea de influencia de M_m.

En la fig. 3.3*e*, se muestra la línea de influencia del momento flector M en la sección K. Al lector se le propone que examine por su cuenta la construcción por el método estático.

Construcción de la línea de influencia de la fuerza transversal Q en la sección m:

El peso se halla a la derecha de la sección,

$$Q_m = A \operatorname{sen} \alpha = \frac{z}{3}\, 0{,}6 = 0{,}2z;$$

$$z = 0; \quad Q_m = 0; \quad z = 10 \text{ m}; \quad Q_m = 2;$$

el peso se halla a la izquierda de la sección,

$$Q_m = A \operatorname{sen} \alpha - 1 \cos \alpha = \frac{z}{3}\, 0{,}6 - 1 \cdot 0{,}8 = 0{,}2z - 0{,}8;$$

$$z = 10 \text{ m}; \quad Q_m = 1{,}2; \quad z = 12 \text{ m}; \quad Q_m = 1{,}6.$$

La línea de influencia de Q_m se muestra en la fig. 3.3*f*.

Construcción de la línea de influencia de la fuerza axil N en la sección m (hemos de considerar positiva la fuerza axil si el sector a examinar es traccionado):

el peso se halla a la derecha de la sección,

$$N_m = A \cos \alpha = \frac{z}{3}\, 0{,}8 = \frac{4}{15}\, z;$$

$$z = 0; \quad N_m = 0; \quad z = 10 \text{ m}; \quad N_m = \frac{8}{3};$$

el peso se halla a la izquierda de la sección,

$$N_m = A \cos \alpha + 1 \operatorname{sen} \alpha = \frac{z}{3}\, 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}6 = \frac{4}{15}\, z + 0{,}6;$$

$$z = 10 \text{ m}; \quad N_m = \frac{49}{15}; \quad z = 12 \text{ m}; \quad N_m = 3{,}8.$$

Esta línea de influencia se muestra en la fig. 3.3*h*.

En la fig. 3.3*g*, *i*, se muestran las líneas de influencia de las fuerzas transversal y axil en la sección K. Su construcción, por el método estático, se debe hacer por cuenta de uno mismo.

MÉTODO CINEMÁTICO

Para construir la línea de influencia del momento flector en la sección K introducimos en ésta una articulación (fig. 3.4*a*). El sistema se hace variante. A nosotros solamente nos interesan las componentes verticales de los desplazamientos posibles, por lo cual proyectamos los discos del sistema sobre una horizontal. Después de haber introducido una articulación, el sistema queda compuesto por dos discos: el ABK (disco *1*) y KC (disco *2*). En la fig. 3.4*b*, se los muestra proyectados sobre una horizontal. El disco *1*, por estar sujeto a la tierra con dos vínculos paralelos no verticales, sólo puede tener un movimiento progresivo perpendicular a la dirección de estos dos vínculos, en el caso dado, vertical. Después del desplazamiento posible, la posición del disco *1*, proyectado sobre la horizontal, se determina con la línea A_2K_2. El disco KC no puede tener desplazamiento vertical en el punto C.

El punto K es común para los discos *1* y *2*. Esto significa que la única posición posible del disco *2*, una vez desplazado el disco *1*, es la K_2C_1 (fig. 3.4*b*). El diagrama de los desplazamientos verticales posibles de los puntos del sistema dado se determina por

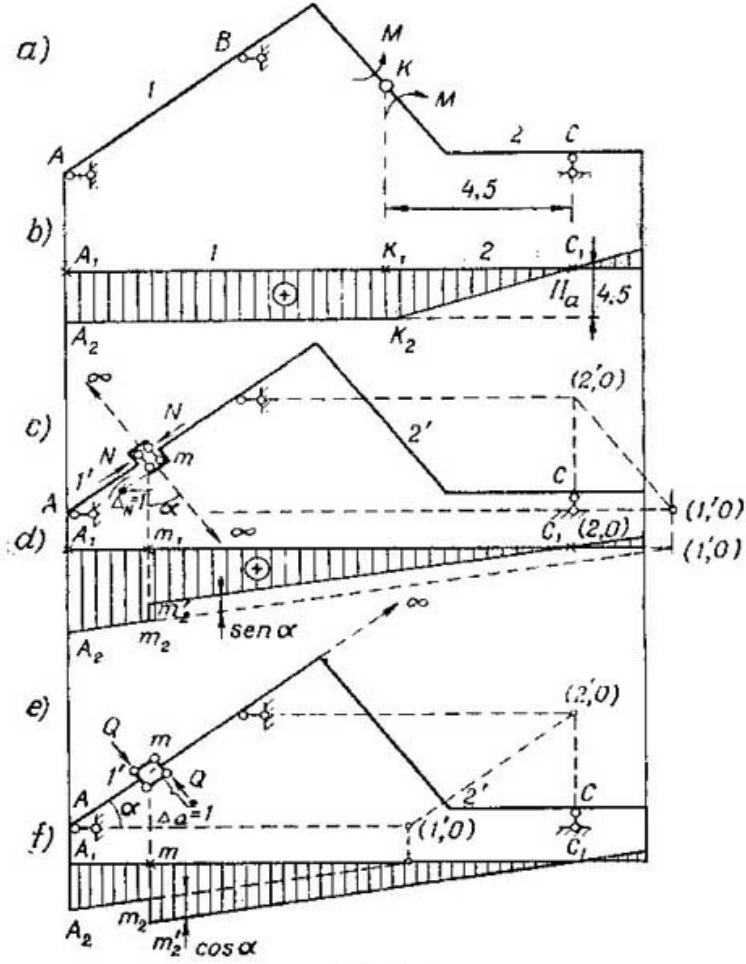


Fig. 3.4

la línea quebrada $A_2K_2C_1$. Después de elegir la escala y los signos, de acuerdo con la regla expuesta en el ejemplo 3.1, este diagrama viene a ser la línea de influencia del momento en la sección K.

Para construir la línea de influencia de la fuerza axil N en la sección m eliminamos un vínculo por la dirección del eje de la

barra, luego de que el sistema va a estar compuesto por dos discos: el Am (o disco $1'$) y el mC (o disco $2'$) (fig. 3.4*c*). Estos discos $1'$ y $2'$ pueden desplazarse, uno con respecto a otro, sólo progresivamente por la dirección N. Así mismo como en el caso precedente, los proyectamos sobre una horizontal (fig. 3.4*d*).

Para hallar los centros instantáneos de rotación empleamos el teorema de los tres centros instantáneos, por el cual, en un sistema variante de tres discos vinculados los centros instantáneos de todos los discos deberán estar sobre una misma recta.

Examinemos tres discos: $1'$, $2'$, y O (la tierra).

En el disco $2'$, el centro instantáneo de rotación, con respecto a la tierra, está ubicado en el punto $(2', O)$ de intersección de las direcciones de sus vínculos lineales con la tierra. El centro instantáneo de rotación del disco $1'$, con respecto al disco $2'$, se aleja al infinito por la dirección $+\infty$, $-\infty$. El centro instantáneo de rotación del disco $1'$, con respecto a la tierra, deberá estar en la dirección del vínculo lineal del disco $1'$ con la tierra; por lo tanto, desde el punto $(2', O)$ trazamos una recta paralela a la dirección $+\infty$, $-\infty$. El punto de intersección de esta recta con la dirección del vínculo A da el centro instantáneo del disco $1'(1', O)$. Ahora, todos los tres centros instantáneos $(1', O)$, $(2', O)$ y $(1', 2')$ se encuentran en una misma línea.

Después del desplazamiento, el disco $2'$ pasa a ocupar la posición $m_2'C_1$ y, el $1'$, quedando paralelo al $2'$, pasará por su centro instantáneo $(1', O)$ y ocupará la posición A_2m_2 (v. fig. 3.4*d*). Si el desplazamiento de uno de los discos con respecto al otro, por la dirección de N, es $\Delta_N = 1$, entonces, la proyección del valor de este desplazamiento recíproco sobre una vertical es igual a sen α. Esta magnitud representa en sí la escala de la línea de influencia de N_m, lo que se muestra en la fig. 3.4*d*.

La construcción de los centros instantáneos, de los diagramas de desplazamiento verticales y de la línea de influencia de la fuerza transversal en la sección m, se efectuó en forma análoga (fig. 3.4*e*, *f*).

Ejemplo 3.3. Calcular los mayores momentos positivo y negativo posibles, así como también, las mayores fuerzas transversales negativa y positiva en la sección k dada de la viga AB con una sobreestructura $A'B'$ (fig. 3.5*a*), al moverse por esta viga una columna de automóviles del tipo de carga H-10 (fig. 3.6).

Resolución

En la fig. 3.5*b*, con la línea llena *abcdef* se muestra la línea de influencia del momento flector M en la sección k, despreciando la influencia de la sobreestructura superior, por la cual se mueve el peso. Sobre la fig. 3.5*d*, también con línea llena, se muestra la línea de influencia de Q en esta misma sección, sin considerar la influencia de la sobreestructura.

Con el campo sombreado se muestran las líneas de influencia de M y Q, corregidas al considerar la trasmisión nodal de la carga de la sobreestructura. Al lector se le propone que el mismo descifre por su cuenta la construcción de estas líneas de influencia.

Como se ve en la fig. 3.5*b*, tenemos en la línea de influencia de M dos zonas negativas y una positiva.

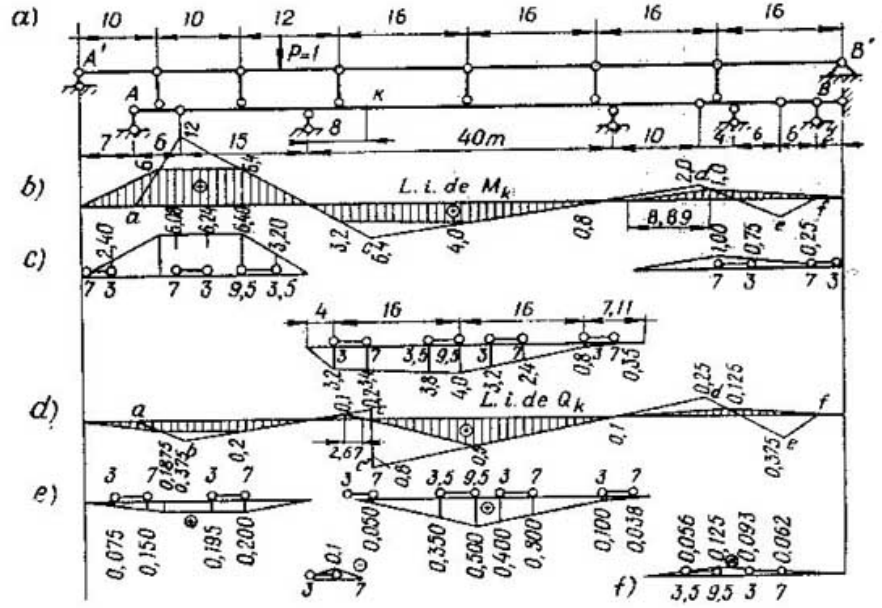


Fig. 3.5

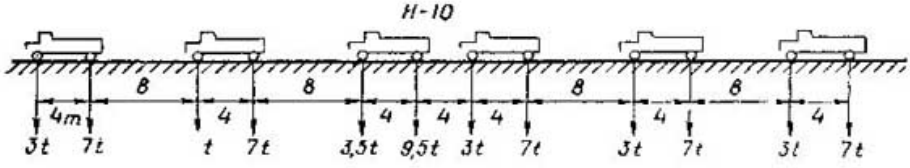


Fig. 3.6

Por exigencias del SNiP (Código de Edificación) se permite que sobre la construcción se halle simultáneamente un solo automóvil sobrecargado. A fin de que la magnitud buscada posea el valor máximo, uno de los pesos deberá estar obligatoriamente sobre uno de los picos convexos de la línea de influencia. Para esto, en la mayoría de los casos es necesario colocar el mayor peso sobre la mayor ordenada de la línea de influencia y, los pesos restantes ocuparán la posición que corresponde a las distancias entre las ruedas.

En la fig. 3.5 *d* se muestra la distribución de los pesos sobre la parte positiva de la línea de influencia. A fin de verificar si la posición dada de los pesos corresponde a la calculada, es decir, si en este caso tiene lugar un momento máximo, empleamos la siguiente dependencia:

$$\frac{\Delta M}{\Delta z} = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i, \tag{3.5}$$

donde ΔM es el incremento del momento para el movimiento del peso hacia la izquierda o la derecha;

Δz, el incremento del recorrido, siendo $\Delta z > 0$, si los pesos se desplazaron hacia la derecha y, $\Delta z < 0$, si hacia la izquierda;

R_i, la resultante de los pesos ubicados sobre un mismo segmento de recta; y

$\operatorname{tg} \alpha_i$, la tangente del ángulo de inclinación de cada segmento de recta.

En nuestro caso, para el movimiento del peso hacia la derecha ($\Delta z > 0$) tenemos que:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3,2}{4} = 0,8; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{4-3,2}{16} = 0,05;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{0,8-4}{16} = -0,2; \quad \operatorname{tg} \alpha_4 = -\frac{0,8}{7,11} = -0,11;$$

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 3+7+3,5 = 13,5 \text{ tf}; \quad R_3 = 9,5+3+7 = 19,5 \text{ tf};$$

$$R_4 = 3+7 = 10 \text{ tf};$$

$$\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = 13,5 \cdot 0,05 - 19,5 \cdot 0,2 - 10 \cdot 0,11 < 0.$$

Dado que $\Delta z > 0$, entonces, $\Delta M < 0$, lo cual significa que para un movimiento de los pesos hacia la derecha el momento en la sección *k* disminuye.

Corremos los pesos hacia la izquierda:

$$R_1 = 3\text{tf}; \; R_2 = 7+3,5+9,5 = 20\text{tf};$$

$$R_3 = 3+7+3 = 13\text{tf}; \; R_4 = 7\text{tf};$$

$$\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = 3 \cdot 0,8 + 20 \cdot 0,05 - 13 \cdot 0,2 - 7 \cdot 0,11 > 0.$$

Dado que $\Delta z < 0$, entonces, $\Delta M < 0$.

Por consiguiente, tanto para un movimiento de los pesos desde la posición indicada hacia la derecha, como también hacia la izquierda, el momento en la sección *k* disminuye, esto es, la posición dada de los pesos corresponde al mayor valor numérico del momento positivo.

Calculemos su magnitud por la fórmula

$$M = \sum P_i y_i; \tag{3.6}$$

$$M_k^+ = 3 \cdot 3,2 + 7 \cdot 3,4 + 3,5 \cdot 3,8 + 9,5 \cdot 4,0 + 3 \cdot 3,2 + 7 \cdot 2,4 + \\ + 3 \cdot 0,8 + 7 \cdot 0,35 = 116 \text{ tfm}.$$

Para el cálculo del máximo momento negativo en valor absoluto, el automóvil pesado puede encontrarse sobre una sola parte de la línea de influencia, en el caso dado, la izquierda, donde existen las ordenadas máximas (fig. 3.5*c*). Convengamos en que el lector se convenza por sí mismo, empleando la fórmula (3.5), de que la posición dada de los pesos es peligrosa.

La máxima magnitud posible del momento negativo en la sección se calcula por la fórmula (3.6):

$$M_k^- = 3 \cdot 2{,}4 + 7 \cdot 6{,}08 + 3 \cdot 6{,}24 + 9{,}5 \cdot 6{,}4 + 3{,}5 \cdot 3{,}2 + 7 \cdot 1{,}0 + \\ + 3 \cdot 0{,}75 + 7 \cdot 0{,}25 = 152 \text{ tfm}.$$

Por consiguiente, para una carga de tipo H-10, el momento en la sección k variará desde $+116$ hasta -152 tm.

Examinando el esquema de carga de la fig. 3.5*e*, *f* es fácil convencerse de que los valores de la fuerza de corte, en aquellas mismas circunstancias, oscilan desde $-2{,}85$ hasta $+13{,}19$ tf.

CAPITULO 4 * CALCULO DE ARMADURAS DE VIGA ARTICULADAS ISOSTATICAS

Adoptamos por esquema de cálculo de la armadura un sistema de barras rectas con articulaciones ideales en los nudos. La carga

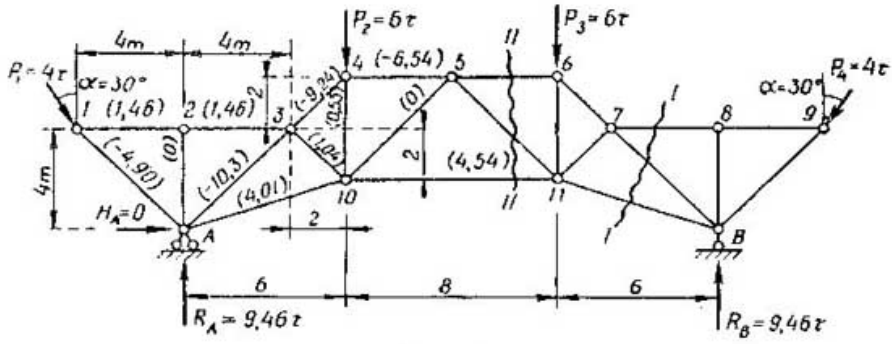


Fig. 4.1

se aplica solamente en los nudos, en forma de fuerzas concentradas. En el caso de carga repartida o móvil, hacemos de cuenta que en la armadura hay elementos complementarios en forma de vigas, las cuales, apoyadas sobre los nudos de la armadura, distribuyen la carga en los mismos, siguiendo la ley de la palanca.

Ejemplo 4.1. Se da el esquema de una armadura y la carga (fig. 4.1). Se pide determinar el esfuerzo en las barras de la mitad izquierda de la armadura por el método de recorte de nudos.

Resolución

Determinamos las reacciones de apoyo por el método corriente, tomando la suma de los momentos de todas las fuerzas aplicadas a la armadura, incluyendo las reacciones, al principio con respecto al nudo B, luego, con respecto al A. Como resultado obtenemos: $R_A = 9{,}46$t y $R_B = 9{,}46$t.

Comenzamos el cálculo de los esfuerzos por el nudo que contiene no más de dos incógnitas. Recortamos el nudo I (fig. 4.2a). Las fuerzas incógnitas se orientan desde el nudo. Tomamos la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje u_1, perpendicular a la dirección de la fuerza $N_{1\text{-}2}$:

$$\sum u_1 = 0; \quad -P_1 \cos\alpha - N_{1\text{-}A} \operatorname{sen} 45° = 0; \quad -3{,}46 - N_{1\text{-}A} 0{,}707 = 0.$$

Obtenemos que $N_{1\text{-}A} = -\frac{3{,}46}{0{,}707} = -4{,}90$ t.

El signo menos indica que la barra $1\text{-}A$ está comprimida. Análogamente, por $\sum u_2 = 0$ (fig. 4.2a) hallamos el esfuerzo $N_{1\text{-}2} = 1{,}46$ t

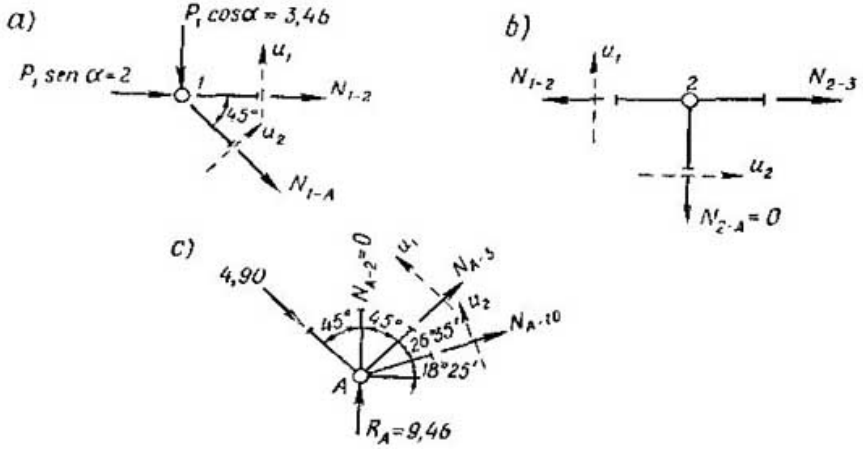


Fig. 4.2

La barra $2\text{-}A$ es adyacente, dado que las otras dos barras del nudo 2 están ubicadas sobre una misma línea, no habiendo carga en el nudo. En la barra $2\text{-}A$ el esfuerzo es igual a cero (fig. 4,2b):

$$\sum u_1 = 0; \quad N_{2\text{-}A} = 0; \quad \sum u_2 = 0; \quad N_{2\text{-}3} = N_{1\text{-}2} = 1{,}46 \text{ tf}.$$

Prosiguiendo, examinamos el nudo A (fig. 4.2c). Las fuerzas incógnitas $N_{A\text{-}3}$ y $N_{A\,10}$ se orientan desde el nudo y, las conocidas, por la verdadera dirección de su acción, esto es, las compresoras hacia el nudo y las traccionantes desde el nudo. Examinamos la

suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje u_1, perpendicular a la barra *A-3*, y sobre el u_2, perpendicular a la *A-10*. En este caso, cada ecuación resulta con una incógnita:

$$9{,}46 \cos 45° - 4{,}90 - N_{A\text{-}10} \operatorname{sen} 26° 35' = 0;$$

$$9{,}46 \cos 18° 25' - 4{,}90 \cos 26° 35' + N_{A\text{-}3} \operatorname{sen} 26° 35' = 0.$$

Como resultado obtenemos:

$$N_{A\text{-}10} = 4{,}01 \text{ tf.} \quad N_{A\text{-}3} = -10{,}3 \text{ tf.}$$

Más adelante, es necesario recortar sucesivamente los nudos *3*, *4* y *10*. El cálculo se lo dejamos al lector.

Las insuficiencias fundamentales del método de recorte de nudos son: los cálculos subsiguientes dependen de los precedentes y la pérdida gradual de exactitud cuando hay una cadena suficientemente grande de cálculos.

Los resultados definitivos del cálculo de los esfuerzos en las barras de la armadura se dan entre paréntesis sobre las barras correspondientes, en la fig. 4.1. El signo más significa tracción y, el menos, compresión.

Ejemplo 4.2. Determinar los esfuerzos en los elementos *II-B* y *5-II* de una armadura (fig. 4.1) por el método de las secciones simples.

Resolución

Este método es básico para las armaduras simples. Su ventaja reside en que el esfuerzo en cualquier barra se determina independientemente de los esfuerzos en las otras.

Calculamos $N_{II\text{-}B}$. Trazamos el corte *I—I* a través de tres barras que no se cortan en un mismo punto. Examinamos el equilibrio de la parte derecha (fig. 4.3). El punto de momento lo elegimos en la intersección de las otras dos barras (punto 7). La determinación de los brazos que entran en la expresión de los momentos representa una cuestión puramente geométrica y aquí no se expone.

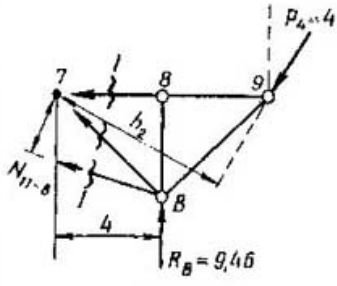


Fig. 4.3

Hallamos que

$$\sum M_7 = 0; \quad h_1 = 2{,}53 \text{ m}; \quad h_2 = 6{,}93 \text{ m};$$

$$P_4 \cdot 6{,}93 - P_B \cdot 4 + N_{II\text{-}B} \cdot 2{,}53 = 0; \quad N_{II\text{-}B} = 4{,}01 \text{ tf.}$$

Por simetría, $N_{II\text{-}B} = N_{A\text{-}10}$.

Para calcular $N_{5\text{-}II}$ trazamos el corte *II—II* (fig. 4.1) y examinamos el equilibrio de la parte derecha. Debido al paralelismo

de las barras *5-6* y *10-11*, para lograr una ecuación con una incógnita tomamos la suma de las proyecciones sobre un eje vertical de todas las fuerzas aplicadas a la parte derecha. En conclusión, se obtiene que $N_{5\text{-}11} = 0$.

Ejemplo 4.3. Para la armadura con cargas, según la fig. 4.4, se exige construir el diagrama de Maxwell—Cremona.

Resolución

En principio, la construcción del diagrama coincide con el método de recorte de nudos, pero, a diferencia de éste, en lugar de dos ecuaciones estáticas para cada nudo, se construye un polígono de fuerzas y, todos estos polígonos, se juntan en un diagrama. Las reacciones de apoyo se calculan analíticamente.

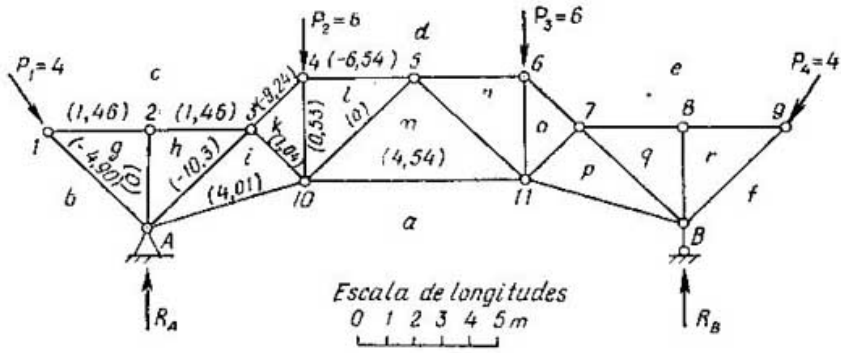


Fig. 4.4

En la fig. 4.4, con las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* designamos los campos externos y con las *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, los internos. En el diagrama, cada fuerza externa o interna es designada con las dos letras de aquellos campos de la armadura, entre los cuales aquélla se encuentra. Al circundar el punto de aplicación de la fuerza en el sentido de las agujas del reloj, al origen de la fuerza lo designamos con la letra de aquel campo del cual salimos y, al final, con la de aquel, a donde llegamos.

Comenzamos con el recorrido de los campos externos de la armadura. Desde el campo *a* pasamos al *b*, luego al *c*, *d*, *e*, *f* y, de vuelta, al campo *a* (véase la, fig. 4.4). En el diagrama de la fig. 4.5 obtenemos el polígono de fuerzas *abcdefa*. Ahora recortamos el nudo *1* y lo circundamos en el sentido de las agujas del reloj. De *b* pasamos a *c*, de *c* a *g* y de *g* a *b*. Esto, en la fig. 4.5, es el polígono de fuerzas *bcg*. Al punto *g* lo encontramos en la intersección de las líneas paralelas a las barras,

entre los campos "*c*" y "*g*", "*g*" y "*b*". Cuando pasamos desde el campo *c* al *g*, durante el rodeo del nudo *1* en el sentido de las agujas del reloj, en el diagrama esto será el segmento *cg*, donde el punto *c* determina el comienzo de la fuerza y el *g*, su fin. La fuerza *cg* está dirigida hacia la derecha, o sea, actúa desde el nudo *1*, la fuerza dirigida desde el nudo es traccionante.

Siguiendo con nuestro ejemplo, circundamos los nudos *2*, *A*, *3*, *4*, *10*, *5*, *6*, *11*, *7*, *8*, *9*, *B* (fig. 4.4). Es necesario elegir la sucesión de los nudos de modo que, en cada uno de los que siguen, no haya más de dos fuerzas incógnitas. Ya que la dirección de éstas es conocida, entonces, en la intersección encontramos el punto del polígono de fuerzas que faltaba para el nudo dado. Un diagrama construido correctamente deberá ser cerrado (fig. 4.5). En la fig. 4.4 se dan los resultados de la determinación de los esfuerzos. El signo más indica tracción. Es deseable dibujar el diagrama en escala grande y del todo, incluso cuando no es necesario determinar los esfuerzos en todas las barras, a fin de poder juzgar sobre el diagrama (si es correcto o no) por su cerramiento.

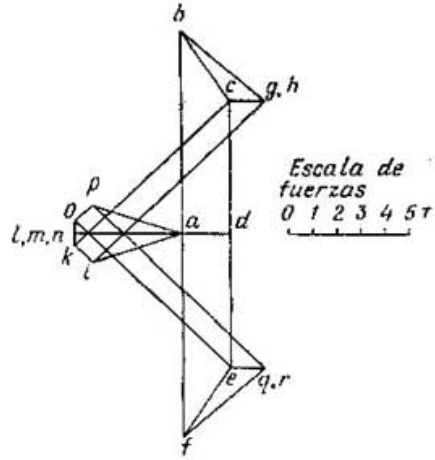


Fig. 4.5

Problema 4.4. Se exige determinar, por el método de sustitución de vínculos, los esfuerzos en todas las barras de la armadura con carga representada en la fig. 4.6*a*.

Indicaciones. Se pueden eliminar los vínculos de apoyo en los nudos *2* y *6* e introducir vínculos de barra sustituyentes, entre los nudos *1* y *3* y, también, *5* y *7*.

La respuesta se da en la fig. 4.6*b*.

Problema 4.5. Dado el esquema de una armadura y la carga (fig. 4.7). Se exige determinar, por el método de sustitución de vínculos, los esfuerzos en todas las barras de la armadura.

Indicaciones. Para la resolución del problema es suficiente una sustitución de vínculo. Se puede eliminar, por ejemplo, el vínculo *12-13* e introducir el vínculo sustituyente *3-4*.

La respuesta se da en la fig. 4.7. Ante cada barra, entre paréntesis se indica el esfuerzo en ésta.

Ejemplo 4.6. Se exige determinar los esfuerzos en todas las barras de una armadura con carga (fig. 4.8), por el método cinemático, empleando el procedimiento de los centros instantáneos y el de los puntos representativos.

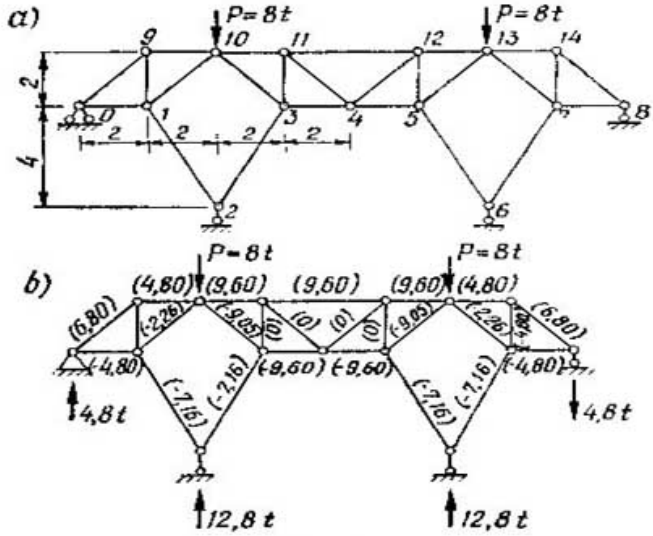


Fig. 4.6

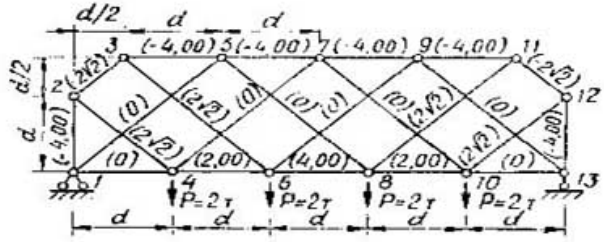


Fig. 4.7

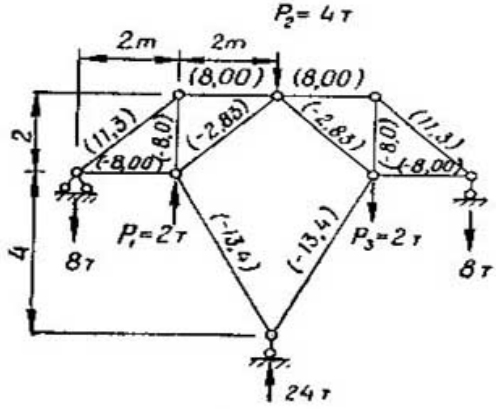


Fig. 4.8

Resolución

Eliminamos el vínculo que une el nudo *4* con la tierra (fig. 4.9). Ahora el sistema investigado está compuesto por seis discos (incluyendo la tierra). En la fig. 4.9 los discos están designados con números romanos. Hallamos los centros instantáneos de todos los discos con respecto a uno, adoptado como fijo (en el caso dado, la tierra). Empleamos tres procedimientos, los que, en la mayoría de los casos, resuelven el problema.

1. De ocurrir que dos discos están unidos por una articulación ésta es el centro instantáneo recíproco de dichos discos.

2 Si dos discos están unidos por dos vínculos de barra o por dos discos de cualquier forma con articulaciones en los sitios de unión, entonces el centro instantáneo está en la intersección de las prolongaciones de los vínculos de barra o en la de las rectas que pasan por las articulaciones.

3. Los centros instantáneos de la rotación recíproca de tres discos cualesquiera se hallan sobre una misma recta.

Por el segundo procedimiento encontramos los centros instantáneos (*2*, *I*) y (*4*, *3*) del disco *II* respecto a la tierra (disco *I*) y los del *IV*, con respecto al disco *III*. El centro instantáneo (*3*, *I*) se halla en el punto *O* (primer procedimiento). Del mismo modo encontramos (*6*, *I*).

Para hallar el centro instantáneo (*4*, *I*) examinamos los discos *IV*, *I*, *II*, y *IV*, *I*, *III*. Por los primeros tres hallamos la recta (*2*, *I*)—(*4*, *2*), sobre la cual, de acuerdo al tercer procedimiento, habrá de encontrarse el centro instantáneo (*4*, *I*). Por los siguientes tres discos hallamos la recta (*3*, *I*)—(*4*, *3*) En la intersección de estas dos rectas (están designadas por los símbolos *4*, *I* inscriptos en círculos) se halla el centro instantáneo (*4*, *I*). Al centro instantáneo (*5*, *I*) lo encontramos análogamente, por medio de los discos *V*, *I*, *III* y *V*, *I*, *IV*.

Hallemos *R* por el procedimiento de los centros instantáneos. Tenemos la ecuación

$$\sum M_{Ok}\, d\varphi_k = 0. \tag{4.1}$$

Aquí, M_{Ok} es el momento de las fuerzas externas aplicadas al disco k, con respecto al centro instantáneo de este disco;

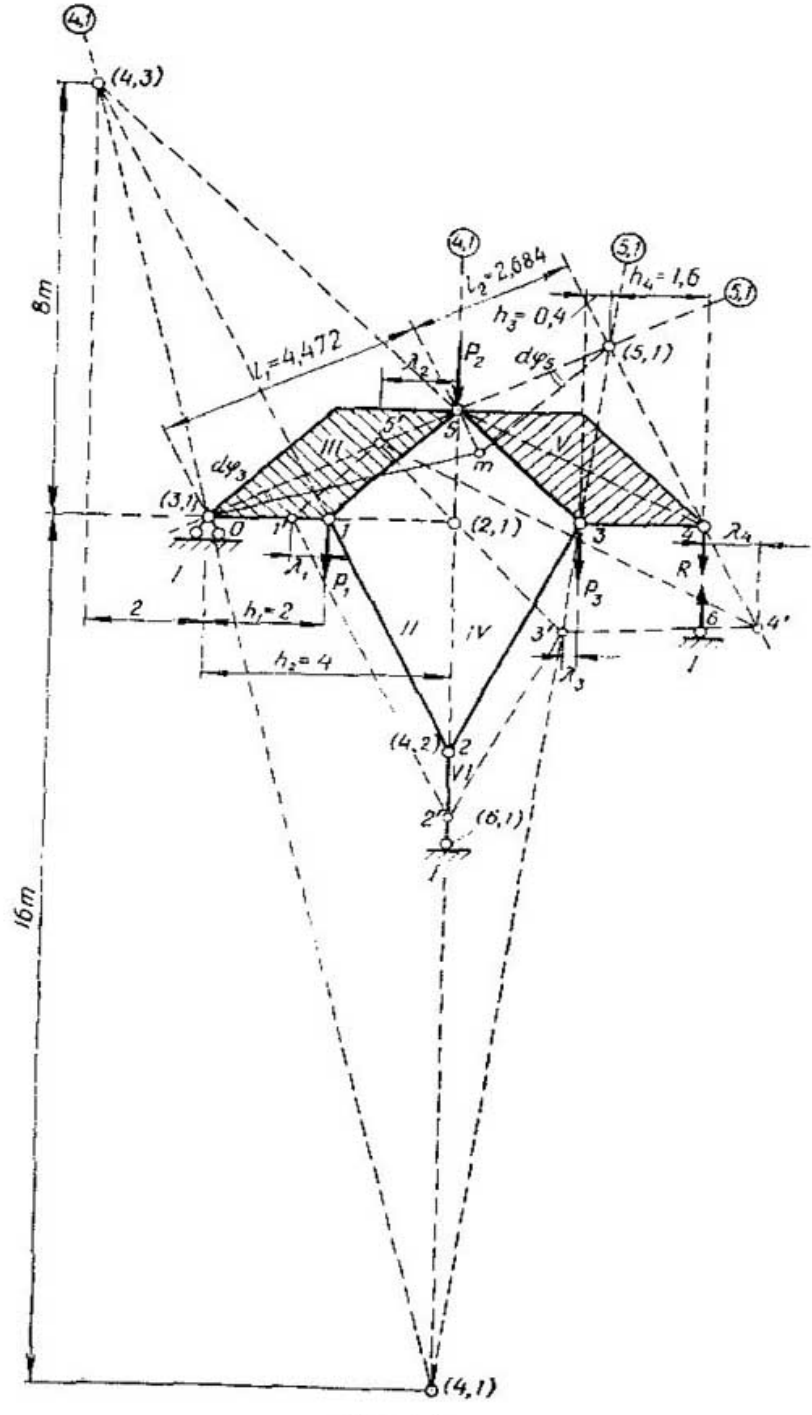
$d\varphi_k$, el ángulo infinitesimal de rotación del disco.

De consideraciones geométricas encontramos que (fig. 4.9) $l_1 = 4{,}472$ m; $l_2 = 2{,}684$ m; $l_1 d\varphi_3 = l_2 d\varphi_5$, de donde

$$d\varphi_5 = \frac{l_1}{l_2}\, d\varphi_3 = \frac{4{,}472}{2{,}684}\, d\varphi_3 = \frac{d\varphi_3}{0{,}600}.$$

Por (4.1) tenemos que

$$(P_1 h_1 + P_2 h_2)\, d\varphi_3 - (Rh_4 - P_3 h_3)\, d\varphi_5 = 0. \tag{4.2}$$



(4,1)
(4,3)
8m
16m
(4,1)
$l_2 = 2,684$
$h_4 = 1,6$
(5,1)
$h_3 = 0,4$
$l_1 = 4,472$
P_2
$d\varphi_5$
(5,1)
λ_2
5'
5
III
V
m
$d\varphi_3$
(3,1)
0
1'
1
(2,1)
3
4
λ_4
I
λ_1
P_1
P_3
R
2
$h_1 = 2$
II
IV
3'
6
4'
$h_2 = 4$
λ_3
I
(4,2)
2
VI
2'
(6,1)
I
(4,1)

Fig. 4.9

Aquí, suponemos que la fuerza P_2 está aplicada al disco *III* y, al multiplicarla por $d\varphi_5$ colocamos el signo menos, dado que el giro va en sentido contrario a las agujas del reloj. Colocando en (4.2) valores numéricos, obtenemos que

$$(2 \cdot 2 + 4 \cdot 4)\, d\varphi_3 - (R \cdot 1{,}6 - 2 \cdot 0{,}4)\, \frac{d\varphi_3}{0{,}6} = 0,$$

de donde $R = 8$ t.

Ahora hallamos R por el procedimiento de los puntos representativos. Construimos el diagrama de estos últimos. Buscamos el punto representativo *5'*. Este deberá encontrarse en el radio que va del centro instantáneo (*3*, *1*) al punto *5*. Su posición la elegimos arbitrariamente, por ejemplo, como en la fig. 4.9, adoptando, como longitud del segmento *5-5'*, $^1/_3$ de la longitud del *0-5*. El punto *1*, así como también el *5*, pertenece al disco *III*, por eso, encontramos el punto representativo *1'* en la intersección de las líneas *0-1* y *5'-1'*, siendo que ésta última es paralela a la *5-1*. El punto representativo *2'* pertenece a los discos *II* y *VI*, por eso lo hallamos en la intersección de la recta *1'-2'* paralela a *1-2*, y la que va desde el centro instantáneo (*6*, *1*) al punto *2*.

Buscamos el punto representativo *3'*. Trazamos desde el punto *2'* la recta *2'-3'* paralela a la *2-3*, y desde el *5'*, la *5'-3'* paralela a la *5-3*. En la intersección de estas rectas encontramos *3'*. Prosiguiendo trazamos la recta *3'-4'* paralela a *3-4* y *5'-4'* paralela a *5-4*. En su intersección encontramos *4'*. De tal modo, en el caso dado, para construir el diagrama de los puntos representativos, es suficiente conocer solamente los centros instantáneos (*3*, *1*) y (*6*, *1*).

Para el sistema de puntos *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, y *6*, hemos obtenido el diagrama de puntos representativos *0*, *1'*, *2'*, *3'*, *4'*, *5'*, y *6'*. La representación de los puntos *0* y *6* coincide con los propios puntos. Empleando los métodos de la geometría elemental, encontramos los brazos de los momentos de todas las fuerzas con respecto a los puntos representativos:

$\lambda_1 = 0{,}667$ m; $\lambda_2 = 1{,}33$ *m*; $\lambda_3 = 0{,}222$ m; $\lambda_4 = 0{,}889$ m.

Ahora componemos la ecuación

$$\sum P_i \lambda_i = 0, \qquad (4.3)$$

la cual, para el ejemplo dado, tiene la forma:

$$P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2 + P_3\lambda_3 - R\lambda_4 = 0,$$

$$\text{ó, } 2 \cdot 0{,}667 + 4 \cdot 1{,}33 + 2 \cdot 0{,}222 - R \cdot 0{,}889 = 0,$$

de donde $R = 8$ t.

Las demás reacciones se determinan por las ecuaciones de la estática y, los esfuerzos en las barras, con el recorte de nudos o por el método de las secciones. Los resultados se dan en la fig. 4.8.

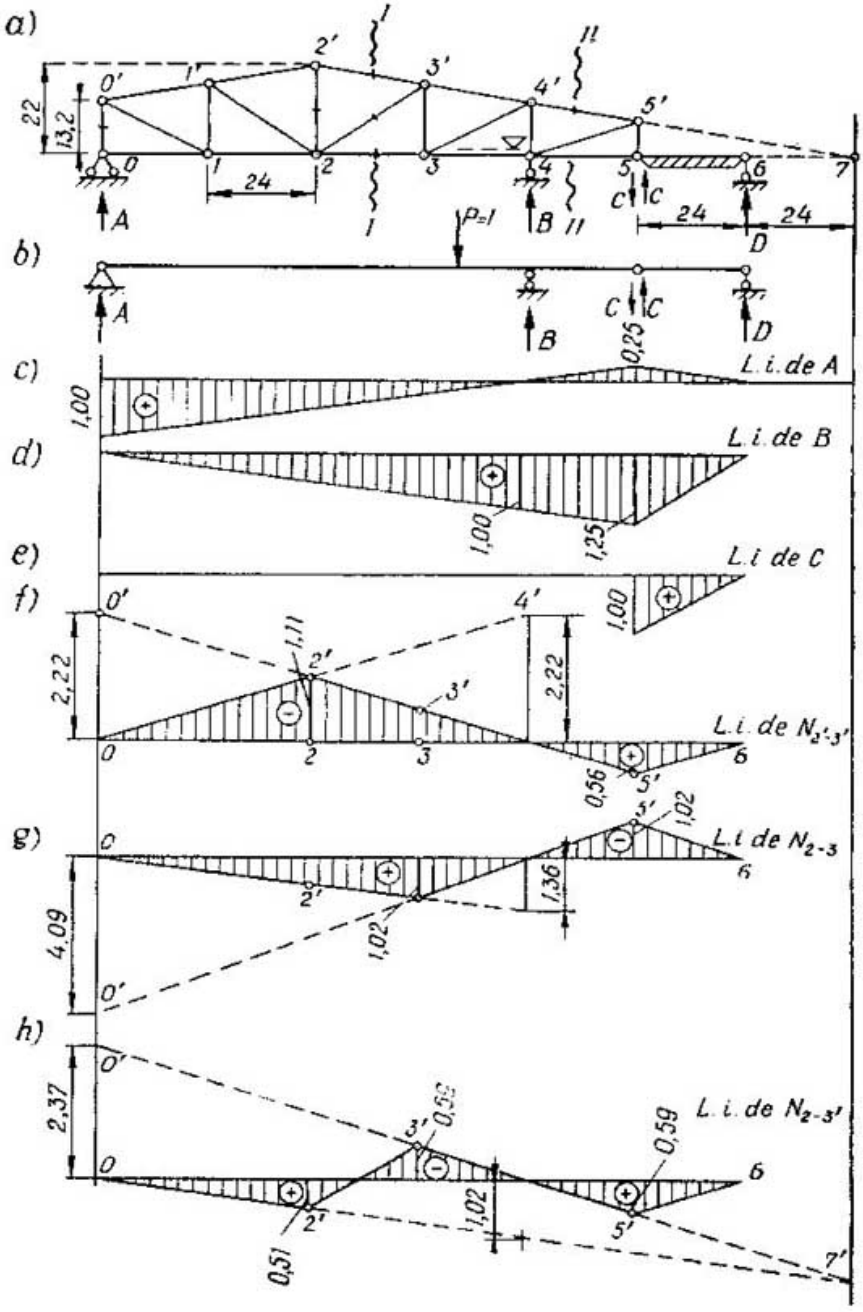

a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
L.i. de A
L.i. de B
L.i de C
L.i. de $N_{2'-3'}$
L.i de N_{2-3}
L.i. de $N_{2-3'}$
P=1
A
B
C
D
22
13,2
24
1,00
0,25
1,25
2,22
1,11
0,56
1,02
1,36
4,09
2,37
0,59
0,51

Fig. 4.10a—h

Ejemplo 4.7. Dado el esquema de una armadura con circulación por abajo (fig. 4.10*a*). Se exige construir las líneas de influencia para los elementos indicados.

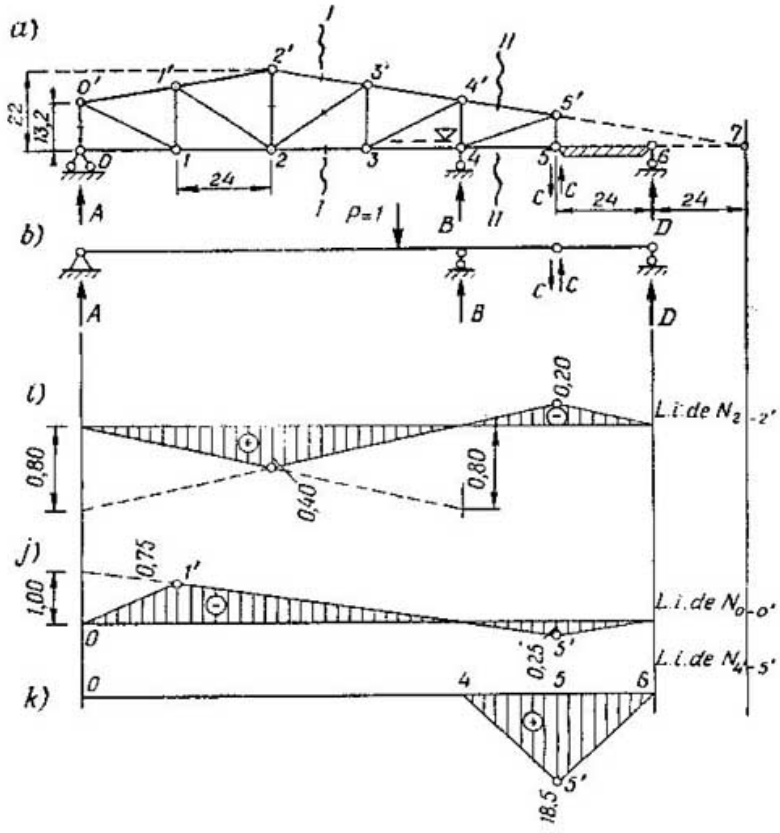


Fig. 4.10i—k

Resolución

Antes que nada, construimos la linea de influencia de las reacciones de apoyo *A* y *B*. Estas se construyen del mismo modo como para la viga de apoyo múltiple (fig. 4.10*b*).

Luego construimos la línea de influencia de la reacción *C*. La reacción aplicada a la armadura en el nudo *5* está dirigida hacia abajo y, la aplicada a la viga complementaria *5-6*, hacia arriba.

Construimos la línea de influencia de $N_{2'3'}$. Trazamos la sección *I—I* (fig. 4.10*a*). Suponemos que el peso $P = 1$ está más a la derecha del nudo *3*. Examinamos el disco izquierdo (fig. 4.11*a*).

Su condición de equilibrio es:

$$\sum M_2 = 0, \quad N_{2'\text{-}3'} h_1 + A a_1 = 0,$$

de donde

$$N_{2'\text{-}3'} = -\frac{a_1}{h_1} A = -\frac{48}{21{,}6} A = -2{,}22A. \qquad (4.4)$$

Por la ecuación (4.4) construimos la parte derecha de la línea de influencia de $N_{2'\text{-}3'}$. Según 4 4, multiplicamos todas las ordenadas de la línea de influencia de A por —2,22. La línea *0'-5'*, en la fig. 4.10*f* es la recta derecha de la línea de influencia buscada.

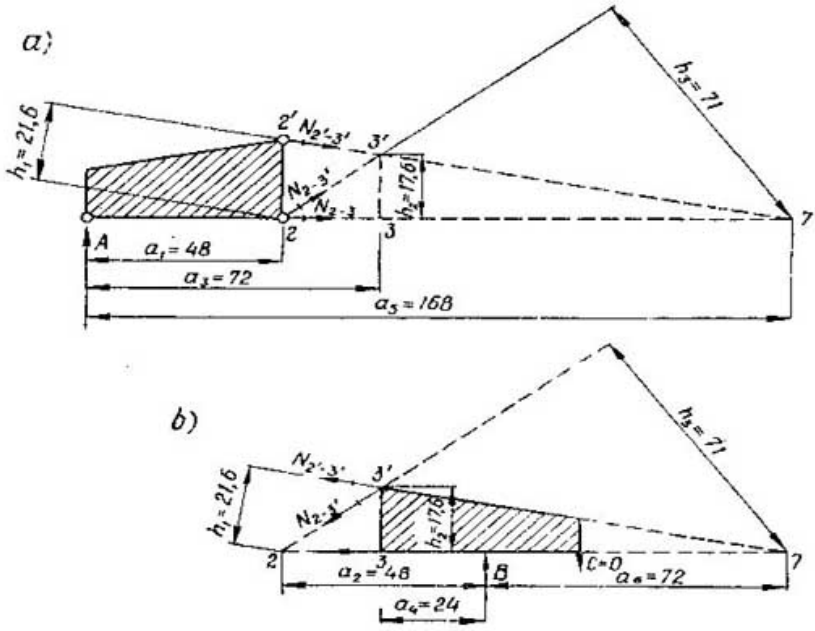


Fig. 4.11

Dado que (4.4) es válida mientras el peso permanece a la derecha del nudo *3*, entonces, sólo se puede emplear la recta derecha a la derecha del nudo *3*. Para el peso dispuesto a la derecha del nudo *3*, menos el tramo *3'-5'* de la recta derecha, también es válido el *5'-6*, el cual se construye por la ecuación (4.4) y el tramo *5-6* de la línea de influencia de *A*.

Aceptamos que el peso se encuentra más a la izquierda del nudo *2*. Examinamos el disco derecho (fig. 4.11*b*):

$$\sum M_2 = 0; \quad -N_{2'\text{-}3'} h_1 - B a_2 = 0;$$

$$N_{2'\text{-}3'} = -\frac{a_2}{h_1} B = -\frac{48}{21{,}6} B = -2{,}22B. \qquad (4.5)$$

Multiplicando todas las ordenadas de la línea de influencia de B, distribuidas entre los nudos *0* y *5*, por — 2,22, obtenemos la recta izquierda *0-4'*, la cual es válida a la izquierda del nudo *2*. La transmisión nodal de la carga transcurre entre los nudos *2* y *3*. La línea de influencia de la transmisión nodal de la carga se muestra en la fig. 4.10*f* con el segmento *2'-3'*.

Como verificación de la construcción (si es correcta o no) de la línea de influencia, puede servir el hecho de que el punto de intersección de las rectas izquierda y derecha está en la vertical que pasa por el punto de momento *2*.

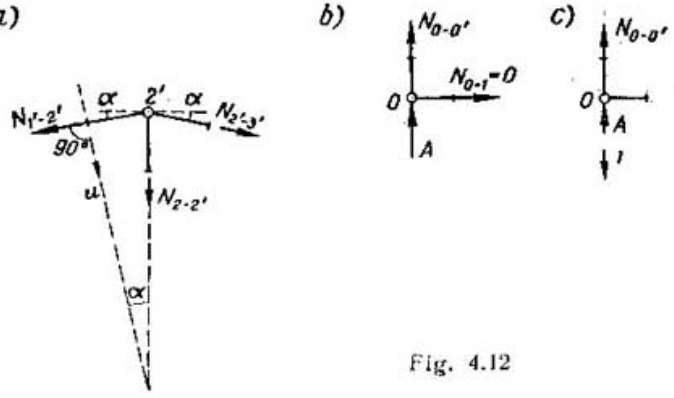


Fig. 4.12

La línea de influencia de N_{2-3} se construye análogamente, efectuando el corte $I - I$ por el punto de momento *3'* (fig. 4.10*g*).

La línea de influencia de $N_{2-3'}$ se construye igualmente, efectuando el corte $I - I$ por el punto de momento 7 (fig. 4.10*h*). Sus rectas izquierda *0-7'* y derecha *0'-7'* se cortan en la vertical del punto de momento 7. En el sector *0-2'* es válida la recta izquierda y, en el *3'-5'*, la derecha. El segmento *2'-3'* es la línea de transmisión nodal de la carga. Construimos la línea de influencia de $N_{2-2'}$. Recortamos el nudo *2'* (fig. 4.12*a*).

$$\sum u = 0; \quad N_{2'-3'} \operatorname{sen} 2\alpha + N_{2-2'} \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$N_{2-2'} = -\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos\alpha} N_{2'-3'} = -2 \operatorname{sen}\alpha N_{2'-3'} = -2 \cdot 0{,}180 N_{2'-3'};$$

$$N_{2-2'} = -0{,}360\, N_{2'-3'}. \tag{4.6}$$

Construimos la línea de influencia de $N_{2-2'}$ empleando la de $N_{2'-3'}$, por la fórmula (4.6), modificando todas las ordenadas de la última al multiplicarlas por — 0,360 (fig. 4.10*i*).

Construimos la línea de influencia de $N_{0\,0'}$. Aceptamos que el peso $P = 1$ se halla en el nudo *1* o a su derecha. Recortamos el nudo 0 (fig. 4.12*b*)

$$\sum Y = 0, \quad N_{0-0'} + A = 0, \quad N_{0-0'} = -A.$$

Obtenemos la recta derecha *1'-5'* (fig. 4.10*j*). Ahora, aceptamos que el peso se encuentra en el nudo *0* (fig. 4.12*c*)

$$\sum Y = 0, \quad N_{0\text{-}0'} + A - 1 = 0.$$

Por la línea de influencia de A vemos que en este momento la reacción $A = 1$. Por consiguiente, $N_{0\text{-}0'} = 0$. Obtenemos el punto *O* (fig. 4.10*j*). La línea recta de enlace *0-1'* corresponde a la transmisión nodal de la carga.

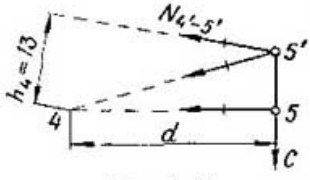


Fig. 4.13

Construimos la línea de influencia de $N_{4'\text{-}5'}$. Trazamos la sección *II—II* (fig. 4.10*a*). Sea que el peso esté ubicado en el nudo *4* o a su izquierda. En este caso la presión de *C* sobre el nudo *5* es igual a cero. Examinemos la parte de armadura a la derecha de la sección *II—II* (fig. 4.13). El disco derecho está compuesto, ahora, sólo por una barra *5-5'*. Las barras *4'-5'*, *4-5'* y *4-5* son los vínculos entre los discos izquierdo y derecho cortados por la sección *II—II*:

$$\sum M_4 = 0; \quad -N_{4'\text{-}5'} h_4 = 0; \quad h_4 \neq 0; \quad N_{4'\text{-}5'} = 0.$$

Así resulta obtenida la recta izquierda *0-4* (fig. 4.10*k*).

Siguiendo, suponemos que el peso se halla en el nudo *5* ó a su derecha. Hacemos un nuevo examen del disco derecho:

$$\sum M_4 = 0; \quad -N_{4'\text{-}5'} h_4 + Cd = 0;$$

$$N_{4'\text{-}5'} = \frac{d}{h_4} C = \frac{24}{13} C = 1{,}85\, C. \qquad (4.7)$$

Por medio de la fórmula (4.7) y de la línea de influencia de *C* construimos la parte derecha de la línea de influencia de $N_{4'\text{-}5'}$ (el segmento *5'-6*). Unimos los puntos *4* y *5'* con la línea de transmisión nodal de la carga.

Ejemplo 4.8. Se exige construir las líneas de influencia para los elementos indicados en el esquema de la armadura con barras auxiliares que se da en la fig. 4.14*a*.

Resolución

Antes que nada, es indispensable examinar la armadura básica obtenida de la dada, por medio de una eliminación de barras auxiliares (fig. 4.15). El esquema de la armadura básica coincide con el de la armadura examinada en el ejemplo 4.7. Por eso se puede considerar que, en el presente ejemplo, las líneas de influencia de los esfuerzos en los elementos de la armadura básica ya han sido construidas (véase el ejemplo 4.7).

Las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras de la armadura se pueden construir por separado para la armadura

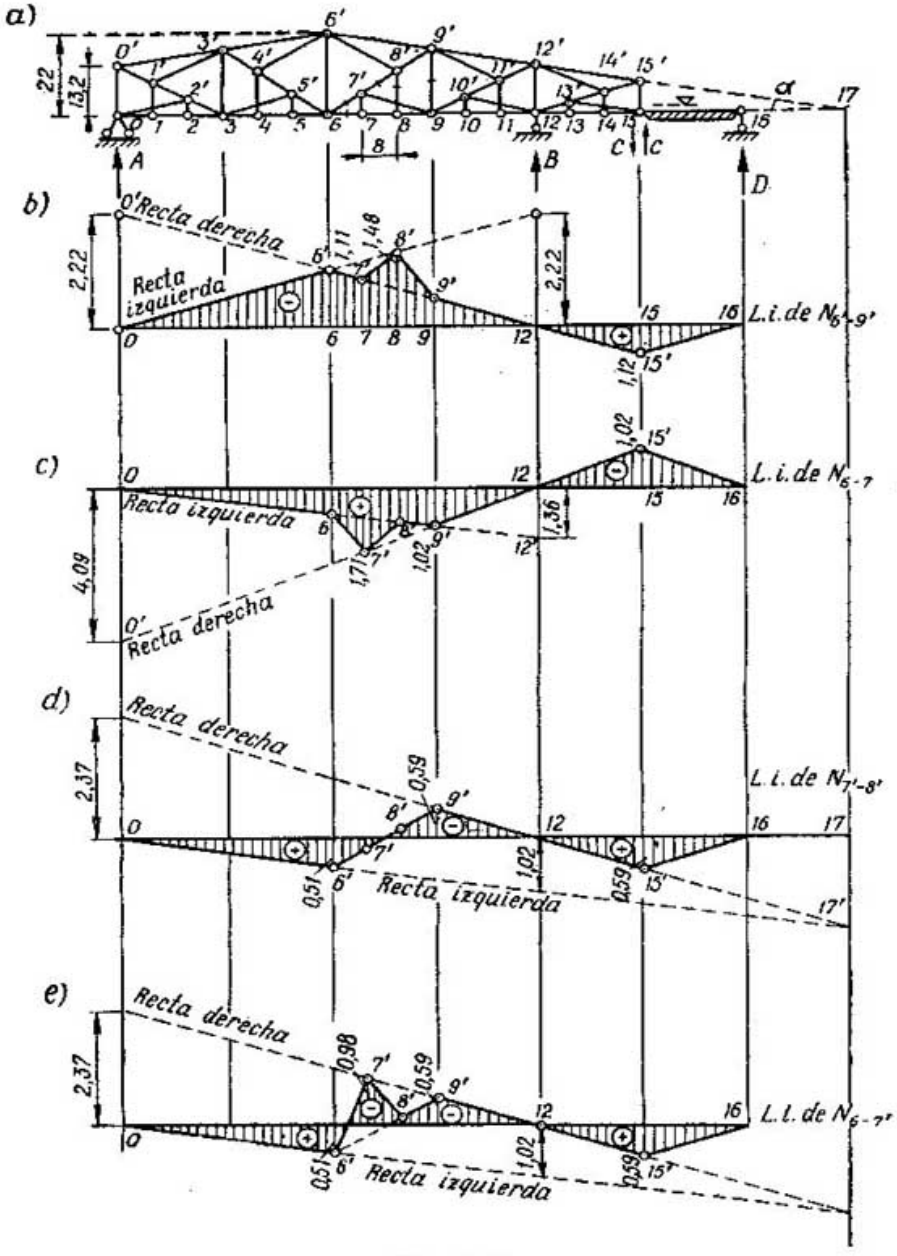

a)
22
13,2
8
A
B
C
c
D
b)
Recta derecha
Recta izquierda
2,22
1,11
1,48
1,12
L.i.de N6-9'
c)
1,02
1,36
4,09
1,71
L.i.de N6-7'
d)
Recta derecha
2,37
0,59
0,51
1,02
0,59
Recta izquierda
L.i.de N7'-8'
e)
Recta derecha
2,37
0,98
0,59
0,51
1,02
0,59
Recta izquierda
L.i.de N6-7'

Fig. 4.14

básica y las barras auxiliares y, luego, adicionarlas; sin embargo, en el caso dado es racional excluir las barras auxiliares que, con una determinada posición del peso $P = 1$, no trabajan y, luego, cortando la parte restante de la armadura por tres barras, examinar los discos izquierdo y derecho formados a ambos lados del corte.

Construimos la línea de influencia de $N_{6'-9'}$ (fig. 4.14*b*).

Para la barra *6'-9'* examinada como elemento de la armadura básica, la línea de influencia del esfuerzo se representa con la figura *0-6'-7'-9'-12-15'-16* (véase la línea de influencia de $N_{2'-3'}$ en la fig. 4.10*f*):

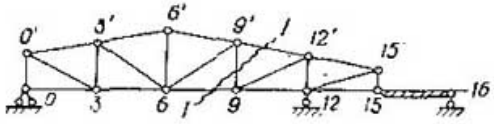


Fig. 4.15

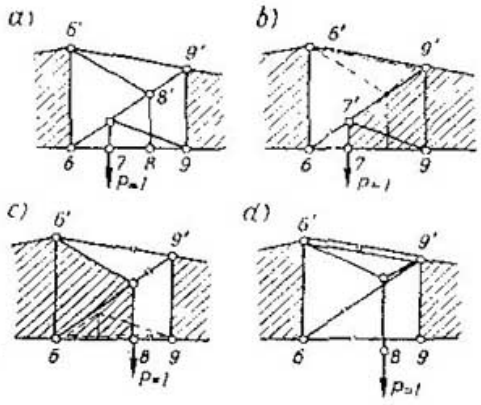


Fig. 4.16

Ahora examinemos las posiciones del peso dentro de los límites del panel grande *6-9*. Aceptamos que el peso está en el nudo *7* (fig. 4.16*a*). Dado que en este momento en el nudo *8* no hay peso, entonces de su recorte se desprende que $N_{8-8'} = 0$.

Recortando el nudo *8'* demostramos fácilmente que $N_{6'-8'} = 0$.

De ahí, el elemento auxiliar *6'-9'-8'-8* no trabaja y se lo puede excluir temporalmente del esquema de la armadura. Trazamos un corte por el panel *6-7*. Entonces, el nudo *7* y el peso $P = 1$ pertenecen al disco derecho (fig. 4.16*b*) y, examinando el equilibrio del disco izquierdo (*0-0'-6'-6* en la fig. 4.14*a*), encontramos que el punto *7'* se halla sobre la recta derecha (el punto *7'* está en la fig. 4.14*b*).

Examinamos el peso en el nudo *8*. En el *7* no hay peso, por eso, el elemento auxiliar inferior *6-7'-9-7* no trabaja. Trazamos un corte por la barra buscada *6'-9'* y el panel *8-9* (fig. 4.16*c*). El peso pertenece al disco izquierdo. Por eso llevamos el nudo *8* a la recta izquierda (el punto *8'* en la fig. 4.14*b*).

Cuando el peso se encuentra en los paneles *6-7*, *7-8* y *8-9*, es entonces que ocurre la transmisión nodal de la carga; por eso en la fig. 4.14*b* los puntos *6'*, *7'*, *8'*, y *9'* los ligamos con segmentos de recta.

Construimos la línea de influencia de $N_{6\text{-}7}$.

Del recorte de los nudos *7* y *8* se desprende que $N_{6\text{-}7} = N_{7\text{-}8} = N_{8\text{-}9}$.

La línea de influencia del esfuerzo para el elemento *6-9*, como elemento de la armadura básica, se representa con la figura *0-6'-8'-9'-12-15'-16*, sobre la fig. 4.14*c* (véase también la fig. 4.10*g*).

Examinamos el peso en el nudo *7*. El elemento auxiliar superior *6'-9'-8'-8* no trabaja. Trazamos un corte por el panel *6-7*. El peso pertenece al disco derecho (fig. 4.16*b*). Llevamos el nudo *7* a la recta derecha *0'-15'*. Obtenemos el punto *7'* (fig. 4.14*c*).

Aceptamos que el peso se encuentra en el nudo *8*. En este caso, el elemento auxiliar, inferior, no trabaja (fig. 4.16*c*). El peso pertenece al disco izquierdo. Llevamos el nudo *8* a la recta izquierda *0-12'* (fig. 4.14*c*) y obtenemos el punto *8'*. Unimos los puntos obtenidos con segmentos, por la regla de transmisión nodal de la carga.

Examinemos la construcción de la línea de influencia de $N_{7'\text{-}8'}$.

Por cuanto el elemento *7'-8'* entra sólo en la armadura básica y, las líneas de influencia de éste para la armadura mencionada, con circulación por abajo y por arriba, son iguales, entonces, la línea de influencia de $N_{7'\text{-}8'}$ coincide con la del esfuerzo del elemento *6-9'* de la armadura básica (fig. 4.15). La línea de influencia para el elemento *6-9'* de la armadura básica es representada por la figura *0-6'-9'-12-15'-16* en la fig. 4.14*d*. De tal modo, la línea de influencia de $N_{7'\text{-}8'}$ tiene el aspecto mostrado en la fig. 4.14*d*.

Construimos la línea de influencia de $N_{6\text{-}7'}$.

La línea de influencia en la armadura básica es la misma que en el caso precedente. Aceptamos que el peso se halla en el nudo *7*. El elemento auxiliar superior no trabaja (fig. 4.16*b*). Cortamos la barra *6-7'* y otras dos. El nudo *7* y, por consiguiente, el peso $P = 1$ pertenecen al disco derecho. El punto *7* se proyecta sobre la recta derecha.

Examinamos el peso en el nudo *8*. El elemento auxiliar inferior no trabaja (fig. 4.16*d*). La carga nodal se transmite desde el elemento auxiliar superior a los nudos *6'* y *9'*. Proyectamos el nudo *8* sobre la línea de transmisión nodal de la armadura básica. Uniendo con segmento de rectas los puntos obtenidos construimos la línea de influencia de $N_{6\text{-}7'}$ (fig. 4.14*e*).

La línea de influencia de $N_{8'\text{-}9'}$ se construye análogamente (fig. 4.17*b*).

Construimos la línea de influencia de $N_{8\text{-}8'}$.

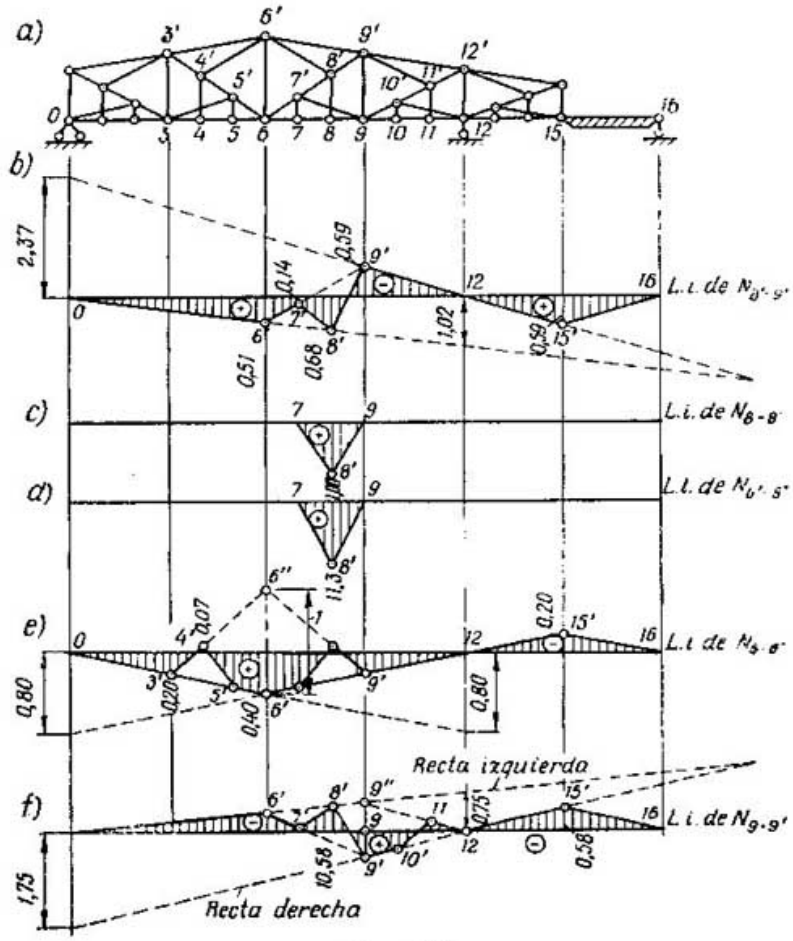


Fig. 4.17

Examinamos el peso en el nudo *8*. Recortando el nudo *8* (fig. 4.18*a*) hallamos:

$$N_{8\text{-}8'} = P = 1.$$

Ahora aceptamos que el peso se encuentra en el nudo *7* o a su izquierda, en el *9* o a su derecha. En este caso, ninguna porción del peso se transmite al nudo *8*. Recortando este último encontramos:

$$N_{8\text{-}8'} = 0.$$

Cuando el peso se encuentra en los paneles *7-8* y *8-9*, entonces ocurre la transmisión nodal del esfuerzo. Por eso trazamos los segmentos *7-8'* y *8'-9* (fig. 4.17*c*).

La línea de influencia de $N_{6'\text{-}8'}$ se construye por el recorte del nudo *8'* (fig. 4.18*b*):

$$\sum u = 0; \quad -N_{6'\text{-}8'} \cos \alpha_1 + N_{8\text{-}8'} \cos \alpha_2 = 0;$$

$$N_{6'\text{-}8'} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} N_{8\text{-}8'} = \frac{0{,}806}{0{,}716} N_{8\text{-}8'} = 1{,}13 N_{8\text{-}8'}.$$

La línea de influencia de $N_{6'\text{-}8'}$ se obtiene de la de $N_{8\text{-}8'}$ multiplicando todas sus ordenadas por 1,13 (fig. 4.17*d*).

Construimos la línea de influencia de $N_{6\text{-}6'}$. Recortamos el nudo *6'* en la armadura básica (fig. 4.19*a*):

$$\sum u = 0; \quad N^0_{6'\text{-}9'} \operatorname{sen} 2\alpha + N^0_{6\text{-}6'} \cos \alpha = 0;$$

$$N^0_{6\text{-}6'} = -\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos \alpha} N^0_{6'\text{-}9'} = -2 \operatorname{sen} \alpha N^0_{6'\text{-}9'} =$$

$$= -2 \cdot 0{,}180 N^0_{6'\text{-}9'} = -0{,}360 N^0_{6'\text{-}9'}.$$

Por medio de la línea de influencia del esfuerzo $N^0_{6'\text{-}9'}$ en el elemento *6'-9'* de la armadura básica (fig. 4.14*b*, la línea *0-6'-7'-9'-12-15'-16*), construimos la línea de influencia del esfuerzo en el elemento *6-6'* de dicha armadura (véase la fig. 4.15) según la fórmula

$$N^0_{6\text{-}6'} = -0{,}360 N^0_{6'\text{-}9'}$$

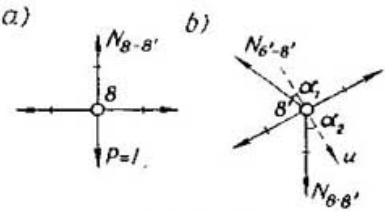


Fig. 4.18

Investigamos la armadura básica suponiendo, para la transmisión nodal respectiva en los nudos *3-6* y *6-9* o a los *3'-6'* y *6'-9'*, que en la primera variante la circulación del peso es por abajo y, en la segunda, por arriba.

Para la armadura básica, para circulación por abajo, es correcta la línea *0-3'-6'-9'-12-15'-16* (fig. 4.17*e*).

Examinemos la circulación por arriba. Sea que el peso se halle en el nudo *6'* (fig. 4.19*b*). Obtenemos:

$$N^0_{6\text{-}6'} = -0{,}360 N^0_{6'\text{-}9'} - 1{,}000.$$

Desde el punto *6'* hacia arriba trazamos un segmento igual a 1. Obtenemos el punto *6''* (fig. 4.17*e*). Cuando el peso se halla sobre el nudo *3'* o a su izquierda y, también, sobre el *9'* o a su derecha, entonces el nudo *6'* trabaja por el esquema de la fig. 4.19*a*. Así, la línea de influencia en la barra *6-6'* de la armadura básica, con circulación por arriba y transmisión nodal de la carga, se determina por la línea *0-3'-6''-9'-12-15'-16* (fig. 4.17*e*).

Prosiguiendo, examinamos las posiciones del peso en los nudos de los paneles *3-6* y *6-9*. Sea que el peso se encuentre sobre el nudo *4*. El elemento auxiliar superior *3'-4'-6'-4* efectúa la transmisión nodal para circulación por arriba. Proyectamos el nudo *4* sobre la línea de la transmisión nodal para circulación por arriba (el punto *4'*).

Examinemos el peso en el nudo *5*. El elemento auxiliar superior no trabaja. En cambio trabaja el inferior *3-5'-6-5*. La transmisión nodal se efectúa sobre los nudos inferiores *3* y *6*. Proyectamos el nudo *5* sobre la línea de transmisión nodal, para circulación por abajo (el punto *5'*).

Sea que el peso se encuentre sobre el nudo *6*. La circulación es por abajo. A esto, sobre la línea de influencia, le corresponde el punto *6'*.

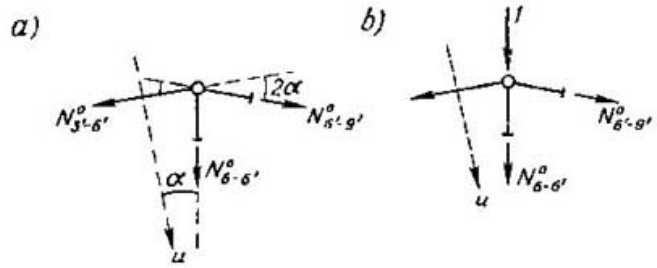


Fig. 4.19

Para el panel *6-9*, las consideraciones son análogas. La línea de influencia definitiva de N_{6-6} se da en la fig. 4.17*e*.

La línea de influencia de $N_{9-9'}$ se construye en forma analoga. En la armadura básica trazamos el corte $I - I$ (fig. 4.15). Prosiguiendo, construimos en ésta las líneas de influencia de $N^0_{9-9'}$, para las circulaciones por arriba y por abajo, mediante el punto de momento situado en la intersección de las rectas que pasan por las barras *9'-12'* y *6-9*.

En la fig. 4.17*d* la línea de influencia de $N^0_{9-9'}$, para circulación por abajo, se determina con la línea *0-6'-9'-12-15'-16* y, para circulación por arriba, con la *0-6'-9''-12-15'-16*.

El segmento *9''-12* es la línea de transmisión nodal para circulación por arriba y el *6'-9'*, para circulación por abajo.

Ahora examinamos el trabajo de los elementos auxiliares. Sea que el peso esté ubicado en el nudo *7*. En el panel *6-9* trabaja sólo el elemento auxiliar inferior. La transmisión nodal ocurre en los nudos *6* y *9*, esto es, para circulación por abajo (fig. 4.20) Proyectamos el nudo *7* sobre la línea *6'-9'* (el punto *7'* en la fig. 4.17*f*).

Aceptamos, ahora, que el peso está en el nudo *8*. En el panel *6-9* trabaja sólo el elemento auxiliar superior, distribuyendo la fuerza $P = 1$ entre los nudos *6'* y *9'*, o sea, la transmite al disco

izquierdo. Por eso proyectamos el nudo *8* sobre la recta izquierda (el punto *8'*).

Examinamos el peso en el nudo *9*. En este caso el peso pertenece al disco derecho. Proyectamos el nudo *9* sobre la recta derecha (el punto *9'*).

El peso se halla en el nudo *10*. En este caso trabaja sólo el elemento auxiliar inferior del panel *9-12*. El peso pertenece al disco derecho. El punto 10' está sobre la recta derecha.

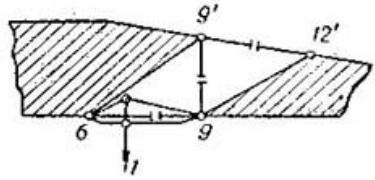


Fig. 4.20

El peso se halla en el nudo *11*. Trabaja sólo el elemento auxiliar superior del panel *9-12*. El elemento auxiliar distribuye el peso entre los nudos *9'-12'* uno de los cuales pertenece al disco izquierdo y, el segundo, al derecho. La transmisión nodal ocurre para circulación por arriba. Proyectamos el nudo *11* sobre la línea correspondiente de transmisión nodal (el punto *11'*).

Unimos los puntos obtenidos mediante los segmentos de recta, sobre la base de una transmisión nodal, dentro de los límites de los paneles pequeños.

CAPITULO 5 * CALCULO DE SISTEMAS TRIARTICULADOS

Problemas 5.1—5.5. Determinar las reacciones de apoyo, para los arcos circulares triarticulados, por los métodos gráfico y analítico (fig. 5.1—5.5).

Resolución del problema 5.1 (fig. 5.1).

Para la determinación analítica de las reacciones descomponemos la fuerza P y las reacciones de los apoyos en componentes verticales y horizontales y componemos las condiciones de equilibrio $\sum M_A = 0$ y $\sum M_A = 0$, de donde encontraremos precisamente las reacciones componentes verticales V_A y V_B:

$$\sum M_B = V_A l + P_x y_k - P_y (l - x_k) = 0;$$

$$\sum M_A = V_B l - P_x y_k - P_y x_k = 0.$$

Considerando que

$$P_x = P \operatorname{sen} \alpha; \quad P_y = P \cos \alpha,$$

$$y_k = r \cos \alpha = \frac{l}{2} \cos \alpha; \quad x_k = r (1 - \operatorname{sen} \alpha) = \frac{l}{2} (1 - \operatorname{sen} \alpha),$$

obtenemos que

$$V_A = V_B = \frac{P}{2}\cos\alpha = \frac{10}{2}\cos 45° = 3{,}54 \text{ tf}.$$

Obtenemos las componentes horizontales igualando a cero las sumas algebraicas de los momentos de las fuerzas izquierdas y derechas con respecto a la articulación C:

$$\sum M_C^{izq} = V_A \frac{l}{2} + H_A f - P_y (r - x_k) - P_x (f - y_k) = 0;$$

$$\sum M_C^{der} = V_B \frac{l}{2} - H_B f = 0,$$

de donde

$$H_A = H_B = \frac{P}{2}\operatorname{sen}\alpha = \frac{10}{2}\operatorname{sen} 45° = 3{,}54 \text{ t}.$$

Las reacciones completas R_A y R_B son obtenidas como una suma geométrica:

$$R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2} = \sqrt{\left(\frac{P}{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{P}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)^2} = \frac{P}{2} = 5 \text{ t};$$

$$R_A = R_B = 5 \text{ tf}.$$

Indicaciones al problema 5.2. Si consideramos que el momento exterior M (fig. 5.2) está aplicado a la derecha de la

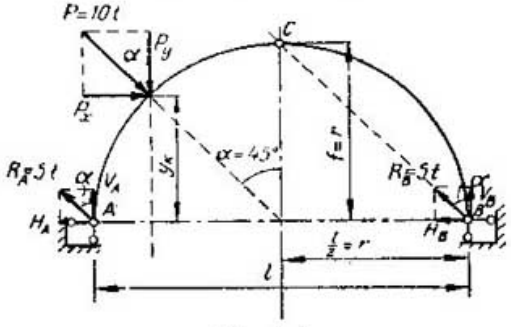


Fig. 5.1

articulación C, entonces, la dirección de la reacción R_A pasa por dicha articulación. La dirección de la reacción R_B es paralela a la línea AC.

Si el momento M está aplicado a la izquierda de la articulación C, entonces, la dirección de las reacciones se modifica, como lo muestra el punteado en la fig. 5.2.

Las respuestas a los problemas 5.3—5.5 se dan en las figs. 5.3—5.5.

Problema 5.6. Determinar por el método analítico, para un arco con tensor (fig. 5.6*a*), las reacciones de apoyo y los esfuerzos en dicho tensor. Construir los diagramas de M, Q y N.

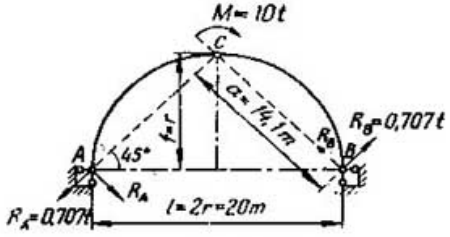


Fig. 5.2

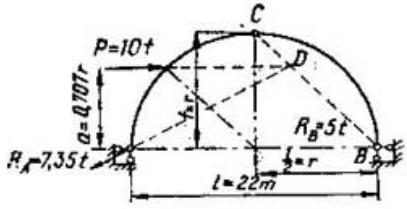


Fig. 5.3

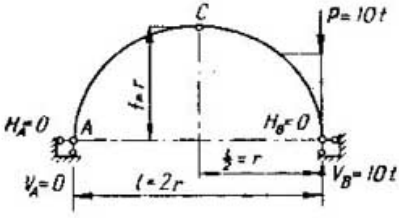


Fig. 5.4

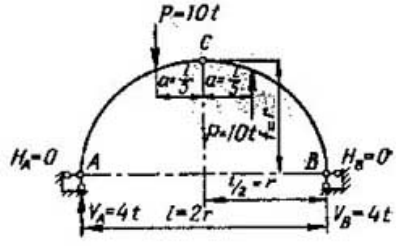


Fig. 5.5

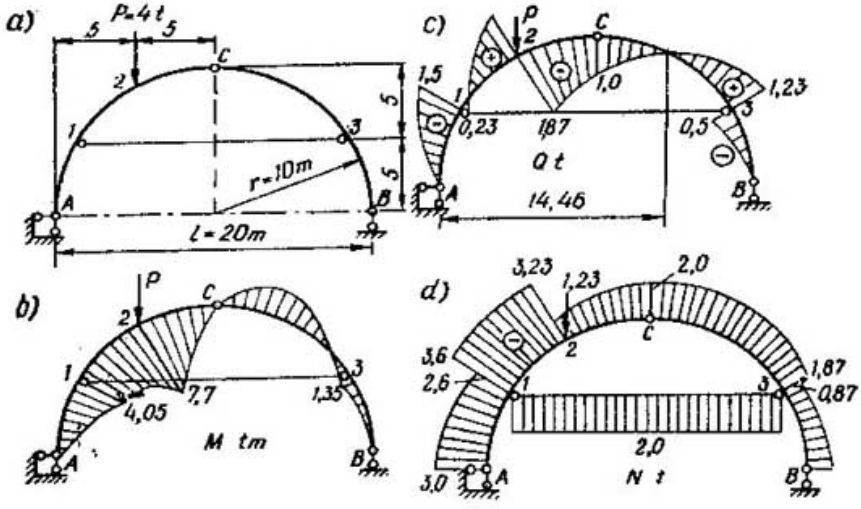


Fig. 5.6

Las respuestas se dan en la fig. 5.6*b*—*d*.

Problema 5.7. Construir los diagramas de M, Q y N para un pórtico triarticulado (fig. 5.7*a*). Determinar el esfuerzo en la articulación del medio C.

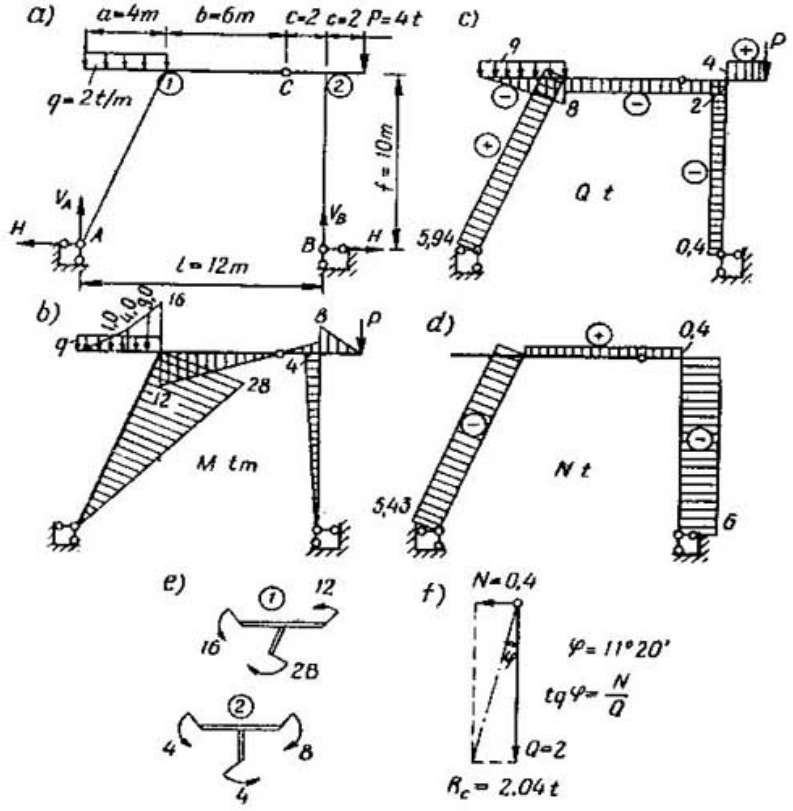


Fig. 5.7

Indicaciones: 1. En las articulaciones de apoyo se determina las componentes verticales V_A y V_B por las condiciones de la estática:

$$\sum M_A = 0 \quad \text{y} \quad \sum M_B = 0.$$

Las componentes horizontales de las reacciones (el empuje horizontal H) se determinan de las condiciones

$$\sum M_C^{\text{der}} = \sum M_C^{\text{izq}} = 0,$$

esto es, igualando las sumas algebraicas de los momentos respecto a la articulación C de las fuerzas derechas e izquierdas, incluyendo las reacciones de apoyo.

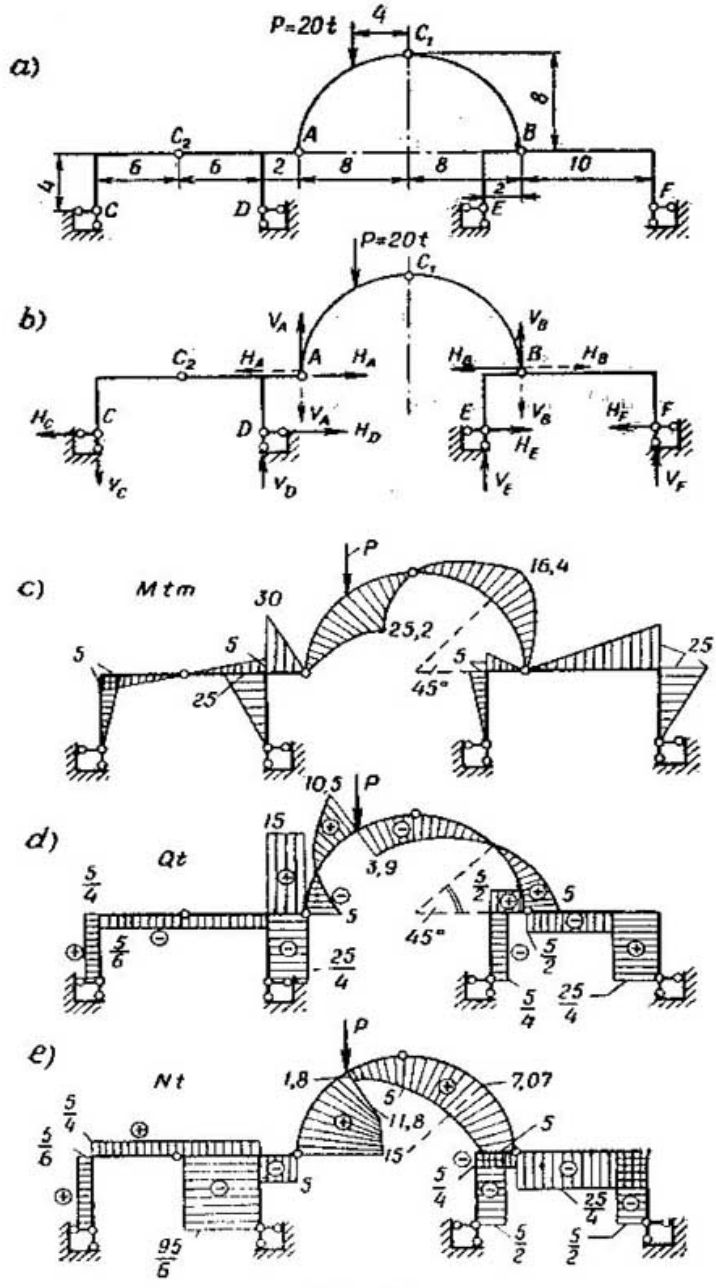

a)
P=20t
4
C1
8
C2
A
B
6
6
2
8
8
10
4
C
D
E
F
2
b)
P=20t
C1
VA
VB
C2
HA
A
HA
HB
B
HB
HC
C
D
VA
HD
E
VB
HE
HF
F
VC
VD
VE
VF
c)
Mtm
P
16,4
30
25,2
5
5
5
25
45°
25
d)
Qt
10,5
P
15
3,9
5/4
5/2
5
5
45°
5/6
25/4
5/2
5/4
25/4
e)
Nt
P
1,8
7,07
5
11,8
5
5/4
5/6
15
5
5/4
25/4
95/6
5/2
5/2

Fig. 5.8

2. Para cada elemento del pórtico se componen las expresiones analíticas de M, Q y N, por las cuales se determinan los valores numéricos de estas magnitudes para las secciones características (fig. 5.7*b—d*). En el diagrama de N la tracción se toma con el signo más.

3. Se verifica el equilibrio de los nudos del pórtico (fig. 5.7*e*).

4. Por los diagramas de Q y N se determina el esfuerzo en la articulación C (fig. 5.7*f*).

Problema 5.8. Determinar analíticamente las reacciones de los apoyos y construir los diagramas de M, Q y N para el pórtico de la fig. 5.8*a*.

Indicaciones. Examinando el arco triarticulado ABC, determinamos las reacciones en las articulaciones A y B:

$$V_A = 15 \text{ tf}; \quad V_B = 5 \text{ tf}; \quad H_A = H_B = 5 \text{ tf}.$$

En la fig. 5.8*b* las reacciones se muestran con líneas llenas.

Variando las direcciones de las reacciones V_A, V_B, H_A y H_B en sentido contrario (se muestran en punteado), examinamos los pórticos izquierdo y derecho por separado y, por el procedimiento habitual, encontramos las reacciones de los apoyos:

$$V_C = \frac{5}{6} \text{ tf}; \quad H_C = \frac{5}{4} \text{ tf}; \quad V_D = \frac{95}{6} \text{ tf};$$

$$H_D = \frac{24}{4} \text{ tf}; \quad V_E = \frac{5}{2} \text{ tf}; \quad H_E = \frac{5}{4} \text{ tf}; \quad V_F = \frac{5}{2} \text{ tf};$$

$$H_F = \frac{25}{4} \text{ tf}.$$

En la fig. 5.8*c—e* se muestran los diagramas de M, Q y N, construidos sobre el contorno del pórtico. En el arco, la fuerza axil compresora N se toma positiva, en los restantes elementos del pórtico, negativa.

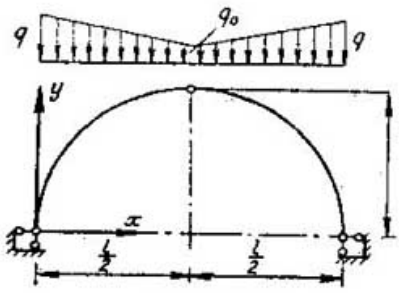


Fig. 5.9

Problema 5.9. En el arco triarticulado de la fig. 5.9 se exige:

1) establecer la configuración racional del eje del arco cargado con una carga fija, si están dadas la luz l y la flecha f del arco y la carga continua con una intensidad q sobre las articulaciones de apoyo y q_0 sobre la articulación del medio;

2) hallar el eje racional del arco para una carga vertical uniformemente repartida de intensidad q.

Los ejes racionales se encuentran por el esquema indeformado.

Indicaciones. Componer la expresión analítica para el momento flector en la sección transversal del arco con abscisa x e igualarla a cero. Entonces, la ecuación racional del eje del arco

será:

$$y = \frac{2fx}{l^3(q+2q_0)}\left[4x^2(q-q_0) - 6xal + 3l^2(q+q_0)\right].$$

Suponiendo que $q = q_0 = \text{const.}$, obtenemos la ecuación del eje racional del arco para una carga continua uniformemente repartida:

$$y = \frac{4f}{l^2}\,x(l-x).$$

Problema 5.10. Construir las líneas de influencia de los esfuerzos en el tensor H y en los colgantes S_1 y S_2. Construir la línea de influencia del momento flector en la sección k de un arco de medio punto o semicircular (fig. 5.10*a*)

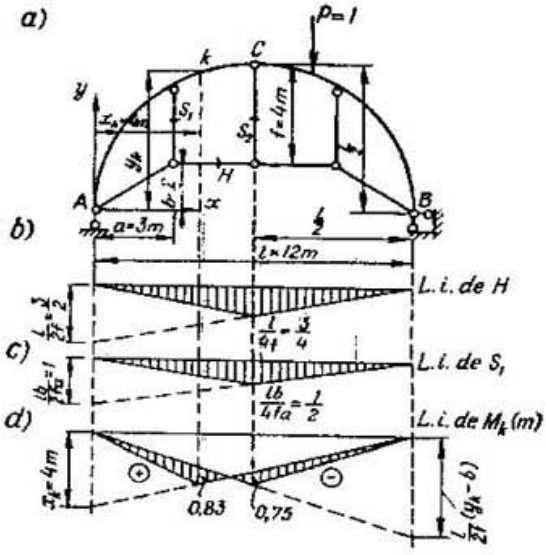


Fig. 5.10

Las respuestas se dan en la fig. 5.10*b*—*d*.

Ejemplo 5.11. Para la sección k dada de un arco triarticulado (fig. 5.11*a*) se exige:

a) determinar analítica y gráficamente todos los factores de fuerza internos (las resultantes de las fuerzas internas) M, Q, N y $M^{\text{núcl}}$, las reacciones de los apoyos y las tensiones normales de borde;

b) construir las líneas de influencia de las reacciones del apoyo A en las componentes oblicuángulas y rectangulares V_A, Z_A, V_A^* y H y, también, las líneas de influencia de M, N, Q y $M^{\text{núcl}}$ en la sección k;

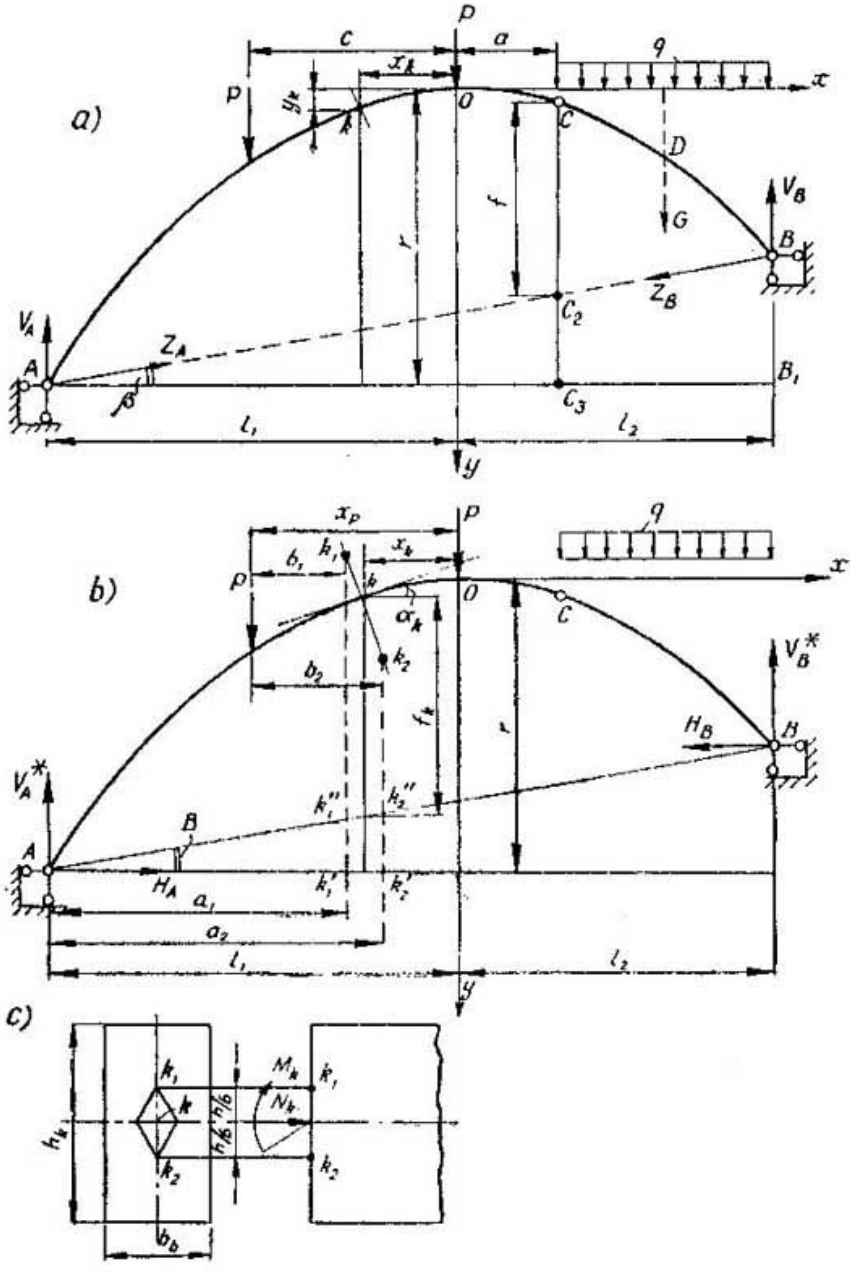

a)
b)
c)
P
c
a
q
x
y
O
C
D
G
B
A
V_A
V_B
Z_A
Z_B
C_2
C_3
B_1
l_1
l_2
x_k
y_k
x_p
b_1
b_2
α_k
f_k
H_A
H_B
V_A^*
V_B^*
a_1
a_2
M_k
N_k
h_k
b_b

Fig. 5.11

c) determinar los valores de V_A, Z_A, V_A^*, H, M_k, N_k, Q_k y $M_k^{\text{núcl}}$ por las líneas de influencia;

d) confrontar los valores de las magnitudes de las reacciones, fuerzas internas y tensiones obtenidas analíticamente, gráficamente y por las líneas de influencia.

Efectuar el cálculo de acuerdo a los siguientes datos:

1) el eje del arco fue trazado siguiendo una parábola, cuya ecuación es:

$$y = \frac{r}{l_1^2} x^2;$$

2) las medidas básicas son: $l_1 = 8$m; $l_2 = 6$m; $a = 2$m; $r = 6$m; $c = 4$m; $x_k = -2$m;

3) la sección transversal k es rectangular y sus medidas son: $h_k = 0{,}9$ m y $b_k = 0{,}45$ m;

4) las fuerzas externas verticales son: $P = 16$ t y $q = 11$ t/m (fig. 5.11*a*).

Resolución

1. Geometría del eje del arco

Empleando la ecuación del eje del arco, calculamos las ordenadas para los diferentes valores de las abscisas y los resultados los llevamos a la tabla de coordenadas (véase la tabla 5.1).

Tabla 5.1

x, m	−8,0	−6,0	−4,0	−2,0	0	+2,0	+4,0	+6,0
y, m	6,0	3,38	1,5	0,375	0	0,375	1,5	3,38

Por los datos de la tabla 5.1 dibujamos el eje del arco (comúnmente en escala 1 : 100 ó 1 : 150), aplicándole articulaciones de arranque y en el centro y con las fuerzas dadas (fig. 5.11*b*).

Hallamos los parámetros geométricos de la sección k dada: $x_k = -2$ m; $y_k = 0{,}38$ m y, la tangente del ángulo de inclinación de la tangente al eje del arco en el punto k con el eje x, por la fórmula

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{2r}{l_1^2} x \quad \text{ó} \quad \operatorname{tg}\alpha_k = \frac{2r}{l_1^2} x_k = \frac{2 \cdot 6}{8^2} 2 = 0{,}375.$$

La superficie de la sección transversal es

$$F_k = h_k b_k = 0{,}9 \cdot 0{,}45 = 0{,}405 \text{ m}^2;$$

el momento resistente,

$$W_k = \frac{b_k h_k^2}{6} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}9^2}{6} = 0{,}0607 \text{ m}^3.$$

Determinación de las reacciones de apoyo en las componentes rectangulares y oblicuángulas. Sustituimos la carga uniformemente repartida por su resultante $G = q(l_2 - a) = 11(6 - 2) = 44$ t, con el punto de aplicación en D y la abscisa $x_D = 4$ m (fig. 5.11*a*).

Descomponiendo las reacciones en los arranques A y B, en componentes verticales (reacciones verticales de viga) y por la dirección de la línea de los arranques (fuerzas de arco), para la determinación de V_A y V_B componemos las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum M_B = 0; \quad \sum M_A = 0;$$

$$\sum M_B = V_A \cdot 14 - P \cdot 10 - P \cdot 6 - G \cdot 2 = 0;$$

$$\sum M_A = V_B \cdot 14 - P \cdot 4 - P \cdot 8 - G \cdot 12 = 0,$$

de donde $V_A = 24{,}6$ t y $V_B = 51{,}4$ t.

Hacemos la verificación, componiendo la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje y:

$$\sum Y = 0; \quad -51{,}4 - 24{,}6 + 16 + 16 + 44 = 0.$$

Descomponiendo las reacciones en los arranques en componentes verticales y horizontales (fig. 5.11*b*) (las componentes rectangulares V_A' y V_B' son reacciones de arco verticales y $H_A = H_B = H$, el empuje horizontal) determinamos el empuje horizontal H por la fórmula

$$H = \frac{M_C^{\text{vig}}}{f} = \frac{118}{3{,}75} = 31{,}4 \text{ tf};$$

donde M_C^{vig} es el momento de viga igual al momento flector en la sección C de una viga horizontal, simplemente apoyada, con una luz igual a la del arco: $l = l_1 + l_2$;

$$M_C^{\text{vig}} = V_A(l_1 + a) - P(c + a) - Pa =$$

$$= 24{,}6(8 + 2) - 16(4 + 2) - 16 \cdot 2 = 118 \text{ tfm};$$

$$f = r - y_C - (l_1 + a)\operatorname{tg}\beta = 6 - 0{,}375 - (8 + 2)\,0{,}187 = 3{,}75 \text{ m},$$

aquí,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r - y_B}{l_1 + l_2} = \frac{6 - 3{,}38}{8 + 6} = 0{,}187.$$

Determinamos las fuerzas de arco $Z_A = Z_B = Z$ por la fórmula

$$Z = \frac{H}{\cos\beta} = \frac{31{,}4}{0{,}98} = 32{,}1 \text{ tf}.$$

Hallamos las reacciones de arco verticales V_A' y V_B' por las fórmulas:

$$V_A' = V_A + Z_A \operatorname{sen}\beta = V_A + H\operatorname{tg}\beta = 24{,}6 + 31{,}4 \cdot 0{,}187 = 30{,}5 \text{ tf}.$$

$$V_B' = V_B - Z_B \operatorname{sen}\beta = V_B - H\operatorname{tg}\beta = 51{,}4 - 31{,}4 \cdot 0{,}187 = 45{,}5 \text{ tf}.$$

Verificación: $\sum Y = 0$; $-30,5 - 45,5 + 16 + 16 + 44 = 0$.

Hallamos los valores de las reacciones en las articulaciones de arranque por las fórmulas:

$$R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2} = \sqrt{30,5^2 + 31,4^2} = 43,8 \text{ tf};$$

$$R_B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2} = \sqrt{45,5^2 + 31,4^2} = 55,1 \text{ tf}.$$

Determinación de las fuerzas internas en la sección k (fig. 5.11*b*). El momento flector en la sección k se determina por la fórmula

$$M_k = M_k^{\text{vig}} - Hf_k = 115,6 - 31,4 \cdot 4,503 = -25,5 \text{ tfm},$$

donde M_k^{vig} es el momento flector de viga para la sección k; se determina de la relación

$$M_k^{\text{vig}} = V_A(l_1 - x_k) - P(x_p - x_k) =$$
$$= 24,6\,(8 - 2) - 16\,(4 - 2) = 115,6 \text{ tfm};$$

f_k es la distancia vertical desde el centro de gravedad de la sección k hasta la línea de apoyo (línea de los arranques):

$$f_k = r - y_k - (l_1 - x_k) \operatorname{tg} \beta = 6 - 0,375 - (8 - 2)\,0,187 = 4,503 \text{ m}$$

La fuerza de corte en la sección k es

$$Q_k = (Q_k^{\text{vig}} + H \operatorname{tg} \beta) \cos \alpha - H \operatorname{sen} \alpha =$$
$$= (8,6 + 31,4 \cdot 0,187)\,0,934 - 31,4 \cdot 0,354 = 2,5 \text{ tf},$$

donde Q_k^{vig} es la fuerza de corte de viga en la sección k:

$$Q_k^{\text{vig}} = V_A - P = 24,6 - 16 = 8,6 \text{ tf};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,375^2}} = 0,934$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{0,375}{\sqrt{1 + 0,375^2}} = 0,354.$$

La fuerza axil en la sección k es

$$N_k = (Q_k^{\text{vig}} + H \operatorname{tg} \beta) \operatorname{sen} \alpha + H \cos \alpha =$$
$$= (8,6 + 31,4 \cdot 0,187)\,0,354 + 31,4 \cdot 0,934 = 34,53 \text{ tf}.$$

Se debe prestar atención al signo de los sen α y cos α.

A fin de obtener el valor correcto de N_k y Q_k, para la parte izquierda del arco, es necesario tomar el sen α y cos α con el signo más. Para la derecha el cos α se toma con el signo más y sen α, negativo. Por α se toma el ángulo agudo entre la tangente al eje del arco y la horizontal. En este caso la fuerza axil compresora; para el arco, se considera positiva.

Para la determinación de los momentos nucleares $M_{k_1}^{\text{nucl}}$ y $M_{k_2}^{\text{nucl}}$ hallamos la posición de los puntos nucleares k_1 y k_2, para lo cual construimos el número central de la sección transversal del arco (fig. 5.11*c*).

Las medidas del núcleo de la sección para el rectángulo por los ejes principales constituyen $\frac{h}{3}$ y $\frac{b}{3}$, de donde

$$kk_1 = kk_2 = \frac{hk}{6} = \frac{0{,}9}{6} = 0{,}15 \text{ m}.$$

En la fig. 5.11*b* se muestran los puntos nucleares k_1 y k_2 con la escala alterada. Las sumas algebraicas de los momentos respecto a estos puntos de las fuerzas izquierdas (o derechas) que actúan sobre el arco serán, precisamente, los momentos nucleares para la sección k:

$$M_{k_1}^{\text{nucl}} = V_A^{\circ} a_1 - H_A (k_1 k_1') - P b_1;$$
$$M_{k_2}^{\text{nucl}} = V_A^{\circ} a_2 - H_A (k_2 k_2') - P b_2.$$

Aquí, $(k_1 k_1')$ es la longitud del segmento $k_1 k_1'$ sobre la fig. 5.11*b* y, $(k_2 k_2')$ ídem, del segmento $k_2 k_2'$;

$$a_1 = l_1 - x_k - \frac{h}{6} \operatorname{sen} \alpha_k = 8 - 2 - \frac{0{,}9}{6} 0{,}354 = 5{,}947 \text{ m};$$

$$a_2 = a_1 + (k_1' k_2') = a_1 + \frac{h}{3} \operatorname{sen} \alpha = 5{,}947 + \frac{0{,}9}{3} 0{,}354 = 6{,}053 \text{ m};$$

$$b_1 = x_p - x_k - \frac{h}{6} \operatorname{sen} \alpha = 4 - 2 - \frac{0{,}9}{6} 0{,}354 = 1{,}947 \text{ m};$$

$$b_2 = b_1 + (k_1' k_2') = 1{,}947 + \frac{0{,}9}{3} 0{,}354 = 2{,}053 \text{ m};$$

$$(k_1 k_1') = r - y_k + \frac{h}{6} \cos \alpha = 6 - 0{,}38 + \frac{0{,}9}{3} 0{,}934 = 5{,}76 \text{ m};$$

$$(k_2 k_2') = (k_1 k_1') - \frac{h}{3} \cos \alpha = 5{,}76 - \frac{0{,}9}{3} 0{,}934 = 5{,}48 \text{ m}.$$

Colocando los valores numéricos de las fuerzas y los brazos en las fórmulas para los momentos nucleares, obtenemos:

$$M_{k_1}^{\text{nucl}} = 30{,}5 \cdot 5{,}947 - 31{,}4 \cdot 5{,}76 - 16 \cdot 1{,}947 = -30{,}67 \text{ tfm};$$
$$M_{k_2}^{\text{nucl}} = 30{,}5 \cdot 6{,}053 - 31{,}4 \cdot 5{,}48 - 16 \cdot 2{,}053 = -20{,}32 \text{ tfm}.$$

Se puede determinar también el momento nuclear por otro procedimiento, o sea, por medio del momento flector y de la fuerza axil (fig. 5.11*c*):

$$M_{k_1}^{\text{nucl}} = M_k - N_k \frac{h}{6} = -25{,}5 - 34{,}53 \frac{0{,}9}{6} = -30{,}67 \text{ tfm};$$

$$M_2^{\text{nucl}} = M_k + N_k \frac{h}{6} = -25{,}5 + 34{,}53 \frac{0{,}9}{6} = -20{,}32 \text{ tfm}.$$

3. Cálculo gráfico del arco

Determinación de las reacciones (fig. 5.12*a*). Determinamos previamente las resultantes R_{izq} y R_{der} de las cargas aplicadas

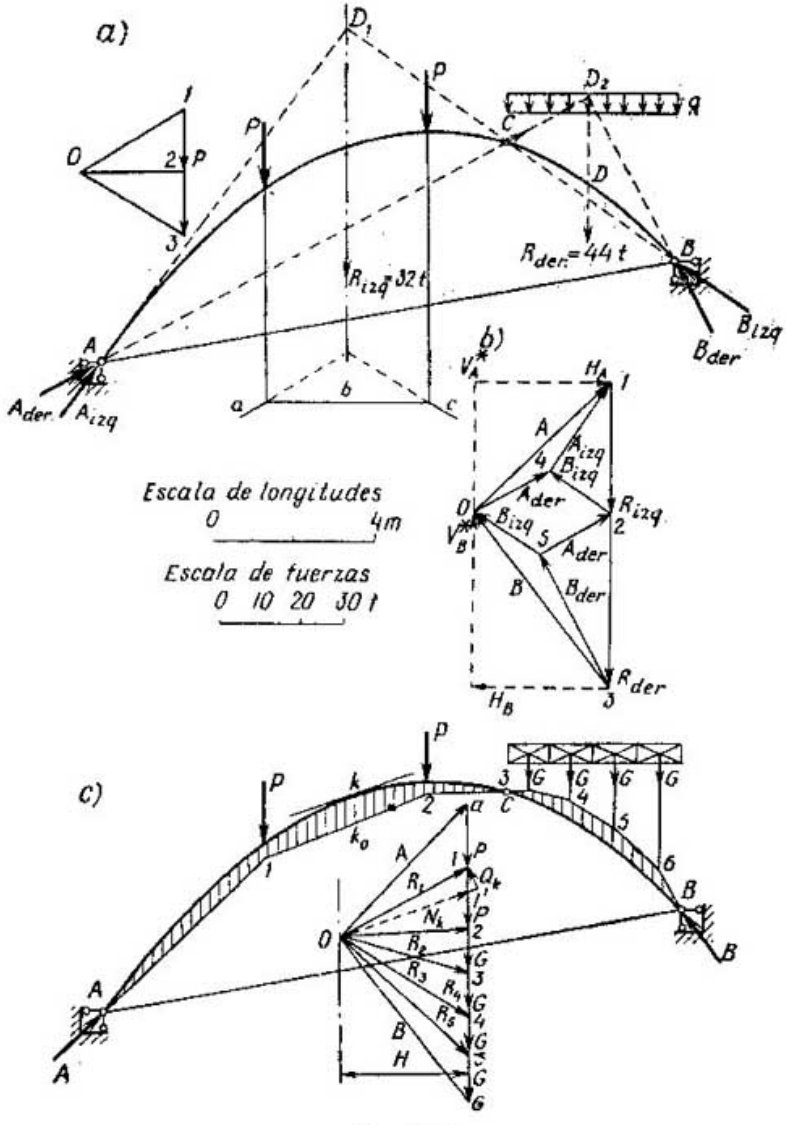


Fig. 5.12

a las partes izquierda y derecha del arco. A la izquierda están aplicadas dos fuerzas $P = 16$ tf. En la fig. 5.12*b* fue construido el polígono de fuerzas *1-2-3* con el polo 0 y el polígono funicular

con los lados *a*, *b* y *c*. Por el polígono de fuerzas se determina el valor de la resultante de las fuerzas izquierdas $R_{izq} = P + P = 16 + 16 = 32$ tf y por el funicular, la dirección de R_{izq} la que deberá pasar por el punto de intersección de los lados extremos *a* y *c* del polígono funicular, paralelos, respectivamente, a los rayos *0-1* y *0-3* del polígono de fuerzas. La resultante de las fuerzas derechas es $R_{der} = q \cdot 4 = 11 \cdot 4 = 44$ tf y está aplicada en el centro del tramo cargado.

Para la acción sobre el arco de una sola fuerza R_{izq}, la dirección de la reacción B_{izq} deberá pasar a través de la articulación *C*, por la línea BCD_1 y la reacción A_{izq}, por la AD_1.

Construido el triángulo de fuerzas *1-2-4* (fig. 5.12*b*), obtenemos las reacciones A_{izq} y B_{izq}. Aquí, $2\text{-}4 \parallel BD_1$ y $1\text{-}4 \parallel AD_1$.

Para la acción sobre el arco de la fuerza R_{der}, la dirección de la reacción A_{der} pasará a través de la articulación *C*, por la línea ACD_2 y, la de la B_{der}, por la BD_2.

Marcamos la fuerza R_{der} desde el extremo final de la fuerza R_{izq}, sobre el polígono de fuerzas, trazamos por los extremos inicial y final de R_{der} las líneas $3\text{-}5 \parallel BD_2$ y $2\text{-}5 \parallel AD_2$, obteniendo las reacciones A_{der} y B_{der}.

Obtenemos las reacciones plenas de *A* y *B* sumando gráficamente las fuerzas A_{der} y A_{izq} y B_{der} y B_{izq}.

Por fin, descomponiendo las reacciones *A* y *B* en componentes verticales y horizontales, determinamos que

$$V_A = 30{,}7 \text{ tf}; \quad H_A = H_B = H = 31{,}2 \text{ tf}.$$

Al descomponerlas en componentes oblicuángulas, obtenemos que $Z_A = 32$ tf; $V_A = 24{,}8$ tf.

4. Construcción del polígono de resultantes

Se dibuja el eje del arco en la escala anterior (fig. 5.12*c*). La carga uniforme es sustituida por las fuerzas concentradas $G = 11$ tf (cuatro fuerzas). Luego se construye el polígono de fuerzas recorriendo el arco en el sentido de las agujas del reloj, con un polo *O* y una distancia polar $H = 3 \cdot 14$ tf.

Esta construcción se puede sincronizar con la del polígono de fuerzas, dada en la fig. 5.12*b*.

Los rayos *O-a*, *O-1*, *O-2*, etc. del polígono de fuerzas representan resultantes de las fuerzas izquierdas (derechas) para distintas secciones del arco.

Por fin, se construye el polígono funicular comenzando desde el apoyo *A* (fig. 5.12*c*), a través del cual trazamos la línea $A\text{-}1 \parallel O\text{-}a$ hasta la intersección con la dirección de la fuerza *P* (izquierda) en el punto *1*, por el cual trazamos la línea *1-2*, paralela al eje *0-1* del polígono de fuerzas. Habiendo la exactitud necesaria en la construcción, la dirección de la resultante R_2

deberá pasar por la línea *2-c*‖*O-2* a través de la articulación en la clave *C*.

El lado *6-B* del polígono funicular, paralelo al rayo *O-b* del polígono de fuerzas, deberá pasar por el apoyo derecho *B* del arco.

La línea *A-1-2-C* es el polígono de resultantes para la parte izquierda del arco y, la *C-3-4-5-6-B*, al dividirse la carga continua en gran cantidad de partes, se transforma de quebrada en curva de resultantes.

Determinación de las fuerzas internas. Las fuerzas de corte Q_k y axil N_k se determinan, descomponiendo la resultante R_1 por la dirección de la tangente al eje del arco en el punto k y por la dirección de la normal (fig. 5.12*c*) y midiendo los segmentos *1-1'* y *O-1'* en escala de las fuerzas, obtenemos:

$$Q_k = 0{,}3 \cdot 8 = 2{,}4 \text{ tf}$$

y

$$N_k = 0{,}3 \cdot 114 = 34{,}2 \text{ ft.}$$

Determinamos el momento flector M_k multiplicando la ordenada kk_0 por el empuje horizontal H, considerando la escala de longitudes:

$$M_k = (kk_0)\, H = \\ = -0{,}8 \cdot 31{,}4 = -25{,}2 \text{ tfm.}$$

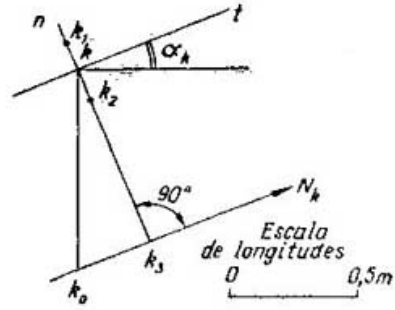


Fig. 5.13

Determinamos gráficamente los momentos nucleares como se indica en la fig. 5.13. Para esto dibujamos la parte de arco que contiene la sección k. Trazamos la tangente kt bajo el ángulo α_k ($\operatorname{tg} \alpha_k = 0{,}375$) y la normal k_3k, en la cual situamos los puntos nucleares k_1 y k_2, sabiendo que $kk_1 = kk_2 = h/6 = 0{,}15$ m. Después desde el punto k (centro de gravedad de la sección transversal) trazamos verticalmente el segmento kk_0, el valor del cual lo tomamos de la fig. 5.12*c* ($kk_0 = 0{,}8$ m) y, por el punto k_0 trazamos una recta en la dirección de la fuerza axil $N_k \| kt$. Entonces,

$$M_{k_1}^{\text{nucl}} = -N_k\,(k_3k_1) = -34{,}2 \cdot 0{,}9 = -30{,}8 \text{ tfm;}$$

$$M_{k_2}^{\text{nucl}} = -N_k\,(k_3k_2) = -34{,}2 \cdot 0{,}6 = -20{,}52 \text{ tfm.}$$

5. Construcción de las líneas de influencia

Línea de influencia de las reacciones de los apoyos. La línea de influencia de la reacción V_A se construye como también para una viga simplemente apoyada (fig. 5.14*a*, *b*). La expresión analítica de la reacción V_A será:

$$V_A = 1\,\frac{l-z}{l}.$$

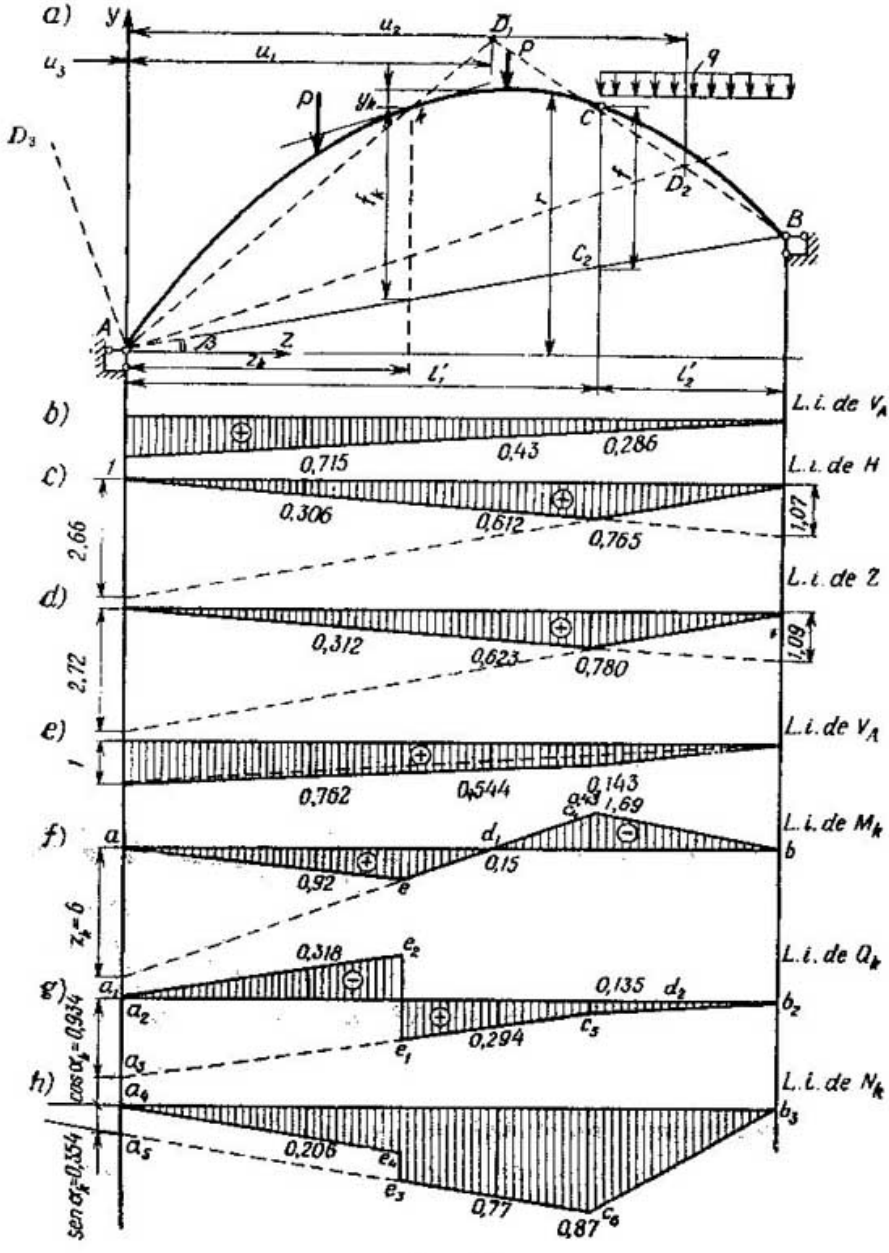

a)
y
u_2
u_1
u_3
D_1
P
q
p
y_k
k
C
D_3
f_k
f
D_2
B
C_2
A
β
Z
z_k
l_1'
l_2'
b)
L.i. de V_A
0,715
0,43
0,286
c)
1
L.i. de H
0,306
0,612
0,765
1,07
2,66
d)
L.i. de Z
0,312
0,623
0,780
1,09
2,72
e)
L.i. de V_A
1
0,762
0,544
0,143
f)
a
d_1
c_1
1,69
L.i. de M_k
b
0,92
e
0,15
$z_k = b$
0,318
e_2
L.i. de Q_k
g)
a_1
a_2
0,135
d_2
b_2
e_1
0,294
c_5
$\cos\alpha_k = 0,834$
a_3
h)
a_4
L.i. de N_k
b_3
a_5
0,206
e_4
e_3
0,77
0,87
c_6
$\operatorname{sen}\alpha_k = 0,554$

Fig. 5.14

donde z es una ordenada corriente (el origen de las coordenadas está en la articulación A).

Las ordenadas de los puntos extremos serán: $z = 0$; $V_A = 1$ y $z = l$; $V_A = 0$, por las que se construye precisamente la l. i. de V_A.

La línea de influencia del empuje horizontal H se construye partiendo de la expresión analítica para éste, cuya forma es:

$$H = \frac{M_C^{\text{viga}}}{f} = \frac{M_C^{\text{viga}}}{(CC_2)}.$$

Por consiguiente, la l. i. de H se construye del mismo modo que la línea de influencia del momento de viga para la sección coincidente con la articulación C, la posición de la cual se determina por los segmentos l_1' y l_2' (fig. 5.14*a*), con ordenadas disminuidas f veces. Por eso, desde el eje de las abscisas trazamos el segmento $\frac{l'}{f} = \frac{10}{3{,}75} = 2{,}66$ sobre el apoyo izquierdo, y el $\frac{l_2'}{f} = \frac{4}{3{,}75} = 1{,}07$ sobre el apoyo derecho y unimos sus extremos, como se muestra en la fig. 5.14*c*.

En la línea de influencia se marcan los valores de las ordenadas correspondientes a las fuerzas concentradas y la articulación C.

La línea de influencia de la fuerza de arco Z se determina con la expresión analítica para Z:

$$Z = \frac{H}{\cos \beta}.$$

Por eso, obtenemos la l. i. de Z de la de H, dividiendo a sus ordenadas por

$$\cos \beta = \cos 10^\circ 35' = 0{,}98.$$

La construcción de la l. i. de Z es análoga a la de la l. i. de H, pero las ordenadas extremas serán

$$\frac{2{,}66}{0{,}98} = 2{,}72 \quad \text{y} \quad \frac{1{,}07}{0{,}98} = 1{,}09$$

por debajo de los apoyos izquierdo y derecho, respectivamente (fig. 5.14*d*). La línea de influencia de la componente vertical completa de la reacción (reacción vertical de arco) se construye partiendo de la expresión analítica para V_A^*:

$$V_A^* = V_A + H \operatorname{tg} \beta,$$

o bien,

$$\text{l. i. de } V_A^* = \text{l. i. de } V_A + \text{l. i. de } H \operatorname{tg} \beta.$$

Por consiguiente, las ordenadas de la l. i. de V_A^* se obtienen sumando las de la l. i. de V_A y las de la l. i. de H, multiplicadas por la $\operatorname{tg} \beta = 0{,}187$.

Prácticamente, este sumado se efectúa así:

1) se construye la l. i. de V_A;

2) se calcula la magnitud $H \operatorname{tg} \beta$ para el valor de la ordenada de H, por debajo de la articulación C, esto es, $0{,}765 \cdot 0{,}187 = 0{,}143$;

3) a la ordenada de la l. i. de V_A, debajo de la articulación C, se le agrega el segmento $0{,}143 = H \operatorname{tg} \beta$ y los puntos obtenidos se unen con los puntos extremos del diagrama de la l. i. de V_A (fig. 5.14*e*).

Las líneas de influencia para las fuerzas internas, M_k, Q_k y N_k, en la sección se puede construir partiendo de la expresión analítica para estos valores.

Es conocido que $M_k = M_k^{\text{vig}} - Hf_k$. Por eso se puede obtener la l. i. de M_k, sumando la l. i. de M_k^{vig} y la de H multiplicada por f_k.

La fuerza de corte es

$$Q_k = Q_k^{\text{vig}} \cos \alpha - H (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \beta \cos \alpha);$$

por consiguiente, la l. i. de Q_k se obtiene sumando la l. i. de Q_k^{vig} con las ordenadas multiplicadas por el $\cos \alpha$ y la l. i. de H con las ordenadas multiplicadas por el coeficiente $(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \beta \cos \alpha)$.

Por fin, poseyendo la expresión analítica para N_k, en forma de

$$N_k = Q_k^{\text{vig}} \operatorname{sen} \alpha + H (\cos \alpha + \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \alpha)$$

(para compresión, N_k es positiva), obtenemos la l. i, de N_k sumando la l. i. de Q_k^{vig} y la l. i. de H, multiplicando previamente las ordenadas de estas líneas de influencia por $\operatorname{sen} \alpha$ y $(\cos \alpha + \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \alpha)$, respectivamente.

Otro procedimiento de construcción de líneas de influencia es el de construcción de puntos en cero, el cual empleamos precisamente en nuestro ejemplo para construir las l. i. de M_k, Q_k y N_k.

La línea de influencia de M_k. Determinamos la posición del punto en cero gráfica y analíticamente.

Para la determinación gráfica, trazamos las rectas AK y BC y llevamos el punto de su intersección a la base horizontal para la construcción de la línea de influencia (el punto d_1, fig. 5.14*f*).

Se puede obtener analíticamente la abscisa del punto en cero, por la fórmula

$$u_1 = \frac{fl}{l_2' \frac{f_k}{z_k} + f} = \frac{f(l_1 + l_2)}{l_2' \frac{f_k}{z_k} + f},$$

donde

$$f = 5{,}62 - 1{,}87 = 3{,}75 \text{ m};$$

$$l_1 + l_2 = 8 + 6 = 14 \text{ m};$$

$$l_2' = 4 \text{ m};$$

$$f_k = r - z_k \operatorname{tg} \beta - y_k = 6 - 6 \cdot 0{,}187 - 0{,}38 = 4{,}5 \text{ m}.$$

$$z_k = 6 \text{ m}.$$

Luego de realizar la sustitución en la fórmula para u_1, obtenemos que

$$u_1 = \frac{3{,}75 \cdot 14}{4\frac{4{,}5}{6} + 3{,}75} = 7{,}8 \text{ m.}$$

Determinado el punto en cero d_1 (fig. 5.14*f*), desde la base ab, por debajo del apoyo izquierdo, trazamos el segmento $z_k = 6$ m, y por el punto a_1 y el punto en cero d_1 trazamos la recta a_1d_1.

Llevamos la sección k a la recta a_1d_1 y unimos el punto obtenido e con el a. Obtenemos las rectas ae izquierda y ec_4 media. Por fin, llevamos la articulación C a la recta del medio y unimos el punto c_4 con el b. La línea c_4b es la recta derecha de la línea de influencia.

Sobre la línea de influencia indicamos las ordenadas que corresponden a los puntos de aplicación de las fuerzas concentradas y a la articulación C.

Los valores numéricos de las ordenadas características se deben obtener por cálculo, partiendo de las relaciones geométricas, y se han de mostrar en la l. i. de M_k.

La línea de influencia de Q_k. El punto en cero de la línea de influencia se obtiene gráficamente con la siguiente construcción: por la articulación A trazamos la línea AD_2 paralela a la tangente al eje del arco en el punto k (*fig.* 5.14*a*). Luego, por el apoyo B y la articulación C trazamos una recta hasta la intersección con la recta AD_2 en el punto D_2, al que proyectamos sobre la base a_2b_2 de la l. i. de Q_k, en el punto en cero d_2 con abscisa $u_2 = 11{,}7$ m. Encontramos analíticamente el punto en cero por la fórmula

$$u_2 = \frac{fl}{l'_2(\operatorname{tg}\alpha_k - \operatorname{tg}\beta) + f} = \frac{f(l_1 + l_2)}{l'_2(\operatorname{tg}\alpha_k - \operatorname{tg}\beta) + f},$$

donde $\operatorname{tg}\alpha_k = 0{,}375$; $\operatorname{tg}\beta = 0{,}187$;

$$u_2 = \frac{3{,}75 \cdot 14}{4(0{,}375 - 0{,}187) + 3{,}75} = 11{,}7 \text{ m.}$$

Debajo del apoyo A, desde la base trazamos el segmento a_2a_3, igual al $\cos\alpha_k = 0{,}934$, y unimos el punto a_3 con el punto en cero d_2 (fig. 5.14*g*). Proyectando sobre esta línea la sección k y la articulación C obtenemos la recta del medio e_1c_5. Por el punto a_2 trazamos la recta a_2e_2 paralela a la e_1c_5 del medio y, sobre ella proyectamos la sección k. La línea a_2e_2 será la recta izquierda. Por fin, proyectamos la articulación C sobre la recta del medio y unimos el punto obtenido c_5 con el b_2. La línea c_5b_2 será la recta derecha.

Calculamos los valores de las ordenadas características de la l. i. de Q_k y los señalamos en ésta (fig. 5.14*g*).

La línea de influencia de N_k. El punto en cero se determina gráficamente con la intersección de la línea AD_3 perpendicular

a la tangente al eje del arco en el punto k, y la BC (fig. 5.13a). En la fig. 5.13a el punto de intersección de estas rectas escapa fuera de los límites del dibujo. Determinamos analíticamente el punto en cero por la fórmula

$$u_3 = \frac{fl}{l_2'(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha_k) - f} = \frac{f(l_1 + l_2)}{l_2'(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha_k) - f};$$

$$u_3 = \frac{3{,}75 \cdot 14}{4(0{,}187 + 2{,}67) - 3{,}75} = 6{,}85 \text{ m}.$$

Proyectando, el punto de intersección de las rectas AD_3 y BC (fig. 5.14a) sobre la base de la l. i. de N_k (fig. 5.14h) obtenemos

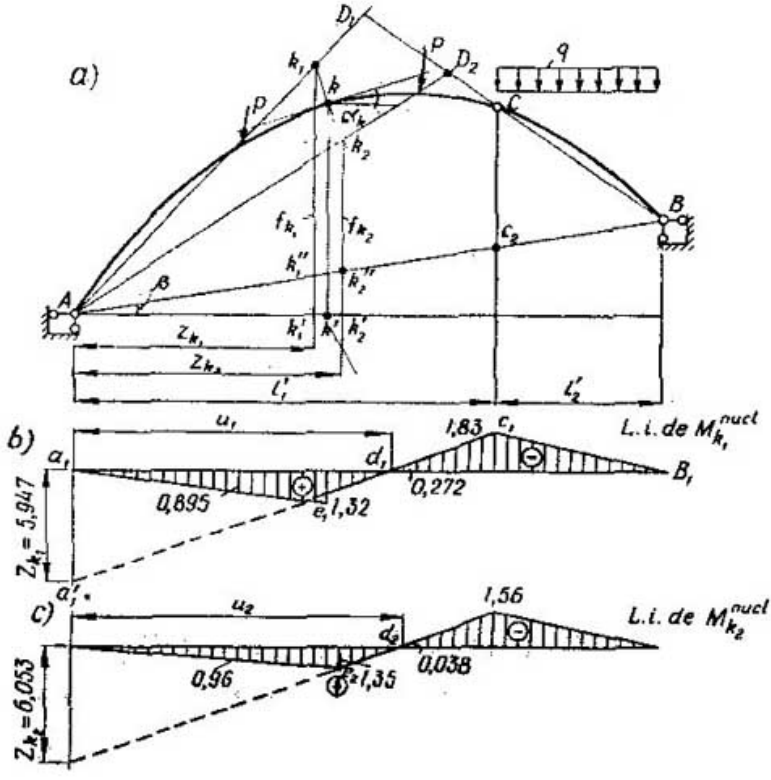


Fig. 5.15

el punto en cero d_3, el cual no se muestra en la fig. 5.14h, dado que salió de los límites del dibujo.

Luego, desde el punto a_4 trazamos el segmento $a_5a_4 = \operatorname{sen}\alpha_k = 0{,}354$, y por el punto en cero d_3 y el punto a_5 la línea d_3a_5. Proyectando sobre ésta la sección k y la articulación C obtenemos la recta del medio e_3c_5. Por el punto a_4 trazamos la recta izquierda paralela a la del medio y llevamos a elle la sec-

ción k. Entonces, a_4e_4 será la recta izquierda. Por fin, unimos el punto c_6 con el b_3 y obtenemos la recta derecha c_6b_3. Calculamos las ordenadas características de la l. i. de N_k, señalándolas sobre dicha l. i. (fig. 5.14*h*).

Las líneas de influencia de los momentos nucleares $M_{k_1}^{\text{nucl}}$ y $M_{k_2}^{\text{nucl}}$. Construimos las líneas de influencia de los momentos nucleares, también por el método de los puntos en cero.

Para determinar gráficamente los puntos en cero de los momentos nucleares $M_{k_1}^{\text{nucl}}$ y $M_{k_2}^{\text{nucl}}$ trazamos el corte transversal k (fig. 5.15*a* *), dibujando previamente la tangente al eje del arco en el punto k bajo el ángulo α_k ($\operatorname{tg}\alpha_k = 0{,}375$).

En escala adoptada para la construcción del arco, marcamos los puntos nucleares sobre la sección transversal k_1 y k_2, partiendo de la relación

$$(kk_1) = (kk_2) = \frac{h}{6} = \frac{0{,}9}{6} = 0{,}15 \text{ m}.$$

Trazamos las rectas Ak_1 y Ak_2 hasta la intersección con la BC en los puntos D_1 y D_2. Proyectando los puntos D_1 y D_2 sobre las líneas de base de las l. i. de $M_{k_1}^{\text{nucl}}$ y $M_{k_2}^{\text{nucl}}$ obtenemos los respectivos puntos en cero d_1 y d_2. Efectuamos la determinación analítica de las posiciones de los puntos en cero, en forma análoga a como se hizo para determinar el punto en cero de la línea de influencia del momento flector en la sección k (fig. 5.14*a* y *f*), empleando la fórmula

$$u = \frac{fl}{l_2' \frac{f_k}{z_k} + f}.$$

Para $M_{k_1}^{\text{nucl}}$ obtenemos que (fig. 5.15 *a* y *b*)

$$u_1 = \frac{f(l_1 + l_2)}{l_2' \frac{f_{k_1}}{z_{k_1}} + f} = \frac{3{,}75 \cdot 14}{4 \frac{4{,}65}{5{,}947} + 3{,}75} = 7{,}65 \text{ m},$$

donde

$$f_k = (k_1k_1'') = (k_1k_1') - (k_1''k_1') = (k_1k_1') - z_{k_1} \operatorname{tg}\beta =$$
$$= 5{,}76 - 5{,}947 \cdot 0{,}187 = 4{,}65 \text{ m};$$
$$l_2' = 4 \text{ m}; \quad z_{k_1} = a_1 = 5{,}947 \text{ (véase la fig. 5.11}a\text{)}.$$

El punto en cero para $M_{k_2}^{\text{nucl}}$ se determina análogamente:

$$u_2 = \frac{f(l_1 + l_2)}{l_2' \frac{f_{k_2}}{z_{k_2}} + f} = \frac{3{,}75 \cdot 14}{4 \frac{4{,}35}{6{,}053} + 3{,}75} = 7{,}95 \text{ m},$$

*) En la fig. 5.15*a*, al marcar los puntos k_1 y k_2 se alteró la escala para brindar mayor claridad. Por eso, los puntos D_1 y D_2 también están desplazados al igual que los puntos en cero d_1 y d_2 en la fig. 5.15*b* y *c*.

donde

$$f_{k_2} = (k_2 k_2'') = (k_2 k_2') - (k_2'' k_2') = (k_2 k_2') - z_{k_2} \operatorname{tg} \beta =$$

$$= 5{,}48 - 6{,}053 \cdot 0{,}187 = 4{,}35 \text{ m};$$

$$z_{k_2} = 6{,}053 \text{ m}; \quad z_{k_2} = a_2 \text{ (fig. 5.11}a\text{)}.$$

Después del cálculo de las coordenadas u_1 y u_2 de los puntos en cero, marcamos a éstas en las líneas de base para $M_{k_1}^{nucl}$ y $M_{k_2}^{nucl}$. Obtenemos los puntos d_1 y d_2 (fig. 5.15*b* y *c*).

Más adelante, para construir, por ejemplo, la l. i. de $M_{k_1}^{nucl}$ desde la base $a_1 b_1$, debajo del apoyo izquierdo, trazamos el segmento $z_{k_1} = 5{,}947$ m y, por los puntos a_1' y d_1, la recta $a_1' d_1$, sobre la cual llevamos el punto nuclear k_1. Unimos el punto obtenido e_1 con el a_1. La línea $a_1 e_1$ será la recta izquierda de la línea de influencia. Por fin, llevamos la articulación C a la prolongación de la línea $e_1 d_1$ en el punto c_1 y unimos este último con el b_1. La línea $e_1 c_1$ es la recta del medio y la $c_1 b_1$, la recta derecha. Se debe señalar que la l. i. de M_k^{nucl} tiene una discontinuidad debajo del centro de gravedad de la sección k y por eso, hablando en rigor, es necesario considerar recta izquierda no $a_1 e_1$, sino la línea del tramo que va desde a_1 hasta la intersección con la vertical que pasa por el centro de gravedad de la sección k. Lo mismo se refiere también a la recta del medio, por la que es necesario tomar el tramo de recta desde el punto c_1 hasta la intersección con la vertical que pasa por el punto k.

En la fig. 5.15*c* se muestra la l. i. del momento nuclear $M_{k_2}^{nucl}$, la cual se construye análogamente a la l. i. de $M_{k_1}^{nucl}$. Las ordenadas características de las líneas de influencia se determinan por semejanza de triángulos y sus valores se señalan en las líneas de influencia.

6. Determinación de los factores de fuerza internos N_k, Q_k, M_k, M_k^{nucl} y las reacciones de los apoyos por las líneas de influencia

Las reacciones de los apoyos. Determinamos la reacción del apoyo V_A por la fórmula

$$V_A = \sum P_i y_i + \sum q_i \omega_i,$$

donde P_i son las fuerzas concentradas;

y_i, las ordenadas de la l. i. de V_A bajo las fuerzas P_i;

q_i, la intensidad de la carga continua en sectores sueltos del arco;

ω_i, la superficie de la l. i. de V_A en los sectores con carga continua.

Para nuestro ejemplo tenemos:

$$V_a = Py_1 + Py_2 + q\omega = 16 \cdot 0{,}715 + 16 \cdot 0{,}43 + 11 \frac{0{,}286 \cdot 4}{2} = 24{,}7 \text{ tf}.$$

Determinamos análogamente las restantes reacciones, empleando las respectivas líneas de influencia:

$$Z_a = 16 \cdot 0{,}312 + 16 \cdot 0{,}623 + 11 \frac{0{,}78 \cdot 4}{2} = 32{,}2 \text{ tf},$$

el empuje horizontal es $H = 16 \cdot 0{,}306 + 16 \cdot 0{,}612 + 11 \frac{0{,}765}{2} 4 =$ $= 31{,}5$ t.

La reacción vertical de arco V_A^* es:

$$V_A^* = 16 \cdot 0{,}762 + 16 \cdot 0{,}544 + 11 \frac{0{,}43 \cdot 4}{2} = 30{,}4 \text{ tf}.$$

La fuerza axil N_k en la sección k se determina por la fórmula

$$N_k = \sum P_i y_i + \sum q_i \omega_i.$$

Las ordenadas y_i y el área ω_i se toman de la l. i. de N_k:

$$N_k = 16 \cdot 0{,}206 + 16 \cdot 0{,}77 + \frac{11 \cdot 0{,}87 \cdot 4}{2} = 34{,}8 \text{ tf}.$$

La fuerza transversal Q_k en la sección k se determina del mismo modo como N_k, pero a las ordenadas y_i y el área ω_i es necesario tomarlas de la l. i. de Q_k:

$$Q_k = 16(-0{,}318) + 16 \cdot 0{,}294 + \frac{0{,}135 \cdot 4}{2} 11 = 2{,}6 \text{ tf}.$$

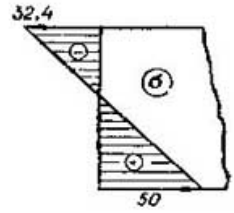


Fig. 5.16

El momento flector M_k en la sección k. El cálculo lo realizamos por aquellas mismas fórmulas, empleando la l. i. de M_k:

$$M_k = 16 \cdot 0{,}92 - 16 \cdot 0{,}15 - \frac{1{,}69 \cdot 4}{2} 11 = -24{,}9 \text{ tfm}.$$

Los momentos nucleares en la sección k. Para la determinación de $M_{k_1}^{\text{nucl}}$ y $M_{k_2}^{\text{nucl}}$ empleamos las l. i. de $M_{k_1}^{\text{nucl}}$ y $M_{k_2}^{\text{nucl}}$, respectivamente, entonces

$$M_{k_1}^{\text{nucl}} = 16 \cdot 0{,}895 - 16 \cdot 0{,}272 - 11 \frac{1{,}83 \cdot 4}{2} = -30{,}3 \text{ tfm};$$

$$M_{k_2}^{\text{nucl}} = 16 \cdot 0{,}96 - 16 \cdot 0{,}038 - 11 \frac{1{,}56 \cdot 4}{2} = -19{,}6 \text{ tfm}.$$

7. Determinación de los valores de borde de las tensiones normales en la sección k

Realizamos el cálculo partiendo de los valores numéricos de N_k, M_k, $M_{k_1}^{\text{nucl}}$ y $M_{k_2}^{\text{nucl}}$, obtenidos por las líneas de influencia,

esto es, adoptamos los siguientes valores:

$$N_k = 34{,}8 \text{ tf}; \quad M_k = -26 \text{ tfm};$$
$$M_{k_1}^{\text{nucl}} = -30{,}3 \text{ tfm};$$
$$M_{k_2}^{\text{nucl}} = -19{,}6 \text{ tfm}.$$

Determinación de σ por la fórmula binomia

$$\sigma = \frac{N_k}{F_k} \mp \frac{M_k}{W_k} \text{ (fig. 5.16).}$$

La tensión de borde en el punto sobre la superficie interna del arco es

$$\sigma_1 = \frac{N_k}{F_k} - \frac{M_k}{W_k} = \frac{34{,}8}{0{,}405} + \frac{24{,}9}{0{,}0607} = 500 \text{ t/m}^2 = 50 \text{ kg/cm}^2.$$

Idem, sobre la superficie externa, en el punto *2*:

$$\sigma_2 = \frac{N_k}{F_k} + \frac{M_k}{W_k} = \frac{34{,}8}{0{,}405} - \frac{24{,}9}{0{,}0607} = -32{,}4 \text{ kg/cm}^2.$$

Tabla 5.2

Magnitudes que se determinan		Método de determinación		
		analítico	gráfico	por las líneas de influencia
Reacciones de apoyo, tf	V_A	24,60	24,80	24,70
	H	31,40	31,20	31,50
	Z_A	32,10	32,00	32,20
	V_A^*	30,50	30,70	30,40
Momento flector M_k, tfm		—25,50	—25,20	—24,90
Fuerza transversal Q_k, tf		2,50	2,40	2,60
Fuerza axil N_k, tf		34,53	34,20	34,80
Momentos nucleares, tfm	$M_{k_1}^{\text{nucl}}$	—30,67	—30,80	—30,30
	$M_{k_2}^{\text{nucl}}$	—20,32	—20,52	—19,6

Determinación de σ por la fórmula monomia:

$$\sigma_1 = \frac{-M_{k_1}^{nucl}}{W_k} = \frac{30{,}3}{0{,}0607} = 500 \text{ t/m}^2 = 50 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\sigma_2 = \frac{M_{k_2}^{nucl}}{W_k} = -\frac{19{,}6}{0{,}0607} = -324 \text{ t/m}^2 = -32{,}4 \text{ kg/cm}^2.$$

En la fig. 5.16 se muestra el diagrama de las tensiones normales en la sección *k*.

Los resultados del cálculo del arco ejecutado por distintos procedimientos los reseñamos en la tabla 5.2.

CAPÍTULO 6 * CALCULO DE LOS SISTEMAS PLANOS COMBINADOS ISOSTATICOS

Ejemplo 6.1. Para un sistema combinado colgante, compuesto por la cadena *0-1-2-3-4* y la viga de rigidez *ACB*, para $l = 16$ m y $f = 3$ m y, debidos a la carga constante dada $P = 8$ t y $q = 1$ t/m, se exige:

a) determinar los esfuerzos en los elementos de la cadena y los pendolones·

b) determinar el empuje horizontal H de la cadena y la presión vertical sobre los pilones R_A y R_B;

c) construir los diagramas de M y Q para la viga de rigidez (fig. 6.1*a*).

Resolución

Eliminamos los apoyos A y B de la viga ACB y trazamos cortes en la cadena por las secciones A_1 y B_1, situadas en las verticales AA_1 y BB_1 (fig. 6.1*a*).

Examinamos el equilibrio del sistema $ACBB_1A_1$. Sobre éste, además de los pesos P y q, actúan, desde el lado de los vínculos eliminados, las reacciones V'_A, V'_B, $N_{0\,1}$ y $N_{3\text{-}4}$.

Descomponemos las dos últimas reacciones en las componentes verticales V''_A y V''_B y horizontales H_A y H_B. Para cargas verticales, la reacción horizontal en el nudo B es igual a cero. Componemos las ecuaciones de equilibrio $\sum X=0$; $\sum M_A=0$ y $\sum M_B=0$.

De la ecuación $\sum X = 0$ obtenemos que $H_A = H_B = H$.

Prosiguiendo

$$\sum M_B = (V'_A + V''_A)\, l - \frac{7}{8} Pl - \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{8} = 0,$$

de donde

$$V'_A + V''_A = V_A = \frac{7}{8} P + \frac{ql}{32} = \frac{7}{8} 8 + \frac{1 \cdot 16}{32} = 7{,}5 \text{ tf}$$

y

$$\sum M_A = (V'_B + V''_B)\, l - \frac{Pl}{8} - \frac{ql}{4} \cdot \frac{7}{8}\, l = 0,$$

donde

$$V'_B + V''_B = V_B = \frac{P}{8} + \frac{7}{32} ql = \frac{8}{8} + \frac{7}{32}\, 1 \cdot 16 = 4{,}5 \text{ tf}.$$

Por consiguiente, la suma de la reacción vertical de apoyo de la viga de rigidez (V'_A, V'_B) y la componente vertical del esfuerzo

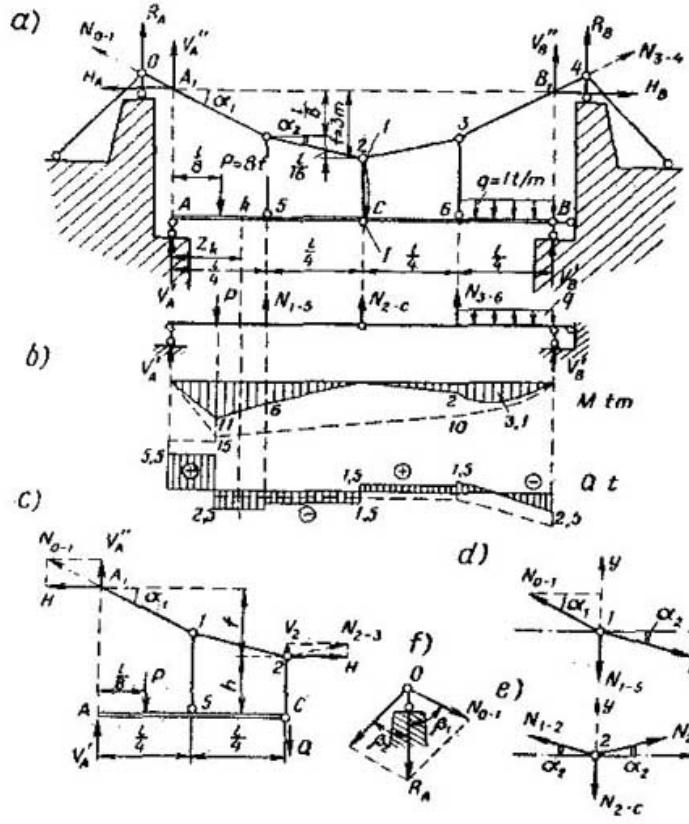


Fig. 6.1

en la cadena (V''_A y V''_A) es igual a la reacción de una viga simplemente apoyada de luz l.

Para determinar la magnitud del empuje horizontal H hacemos el corte complementario I—I (fig. 6.1*a*) infinitamente cercano a la derecha de las articulaciones C y 2 y, en la articulación 2 de la sección aplicamos el esfuerzo $N_{2\text{-}3}$ que sustituye a la acción de la parte derecha de la cadena (fig. 6.1*c*). Descomponiendo el

esfuerzo $N_{2\text{-}3}$ en las componentes vertical y horizontal, escribimos las condiciones de equilibrio $\sum X = 0$ y $\sum M_C = 0$. De la primera condición establecemos que el empuje horizontal de la cadena en el eslabón *2-3* es igual al empuje horizontal en el *0-1* y, en general, para la cadena, en todos sus eslabones es una magnitud constante, igual a H.

De la segunda condición obtenemos que

$$\sum M_C = (V'_A + V''_A)\frac{l}{2} - P\frac{3}{8}l - H(f + h) + Hh = 0,$$

de donde

$$H = \frac{(V'_A + V''_A)\frac{l}{2} - \frac{3}{8}Pl}{f} = \frac{V_A\frac{l}{2} - \frac{3}{8}Pl}{f} = \frac{7{,}5\frac{16}{2} - \frac{3}{8}8 \cdot 16}{3};$$

$H = 4$ tf.

No es difícil ver que el empuje horizontal H de la cadena se determina análogamente al empuje horizontal del arco triarticulado, por la fórmula

$$H = \frac{M^0_C}{f},$$

donde M^0_C es el momento flector en la sección C, para una viga simplemente apoyada de luz l y,
f, la flecha de la cadena.

Las reacciones V''_A y V''_B se determinan por la fórmula (fig. 6.1*c*)

$$V''_A = V''_B = H \operatorname{tg} \alpha_1 = 4 \operatorname{tg} 26° 30' = 2 \text{ tf}.$$

Después de esto encontramos las reacciones de los apoyos de la viga

$$V'_A = V_A - V''_A = 7{,}5 - 2 = 5{,}5 \text{ tf};$$

$$V'_B = V_B - V''_B = 4{,}5 - 2 = 2{,}5 \text{ tf}.$$

Determinamos los esfuerzos $N_{0\text{-}1}$ y $N_{3\text{-}4}$ en la cadena, de la relación

$$N_{0\text{-}1} = N_{3\text{-}4} = \frac{H}{\cos \alpha_1} = \frac{4}{\cos 26° 30'} = 4{,}47.$$

Análogamente encontramos los esfuerzos $N_{1\text{-}2}$ y $N_{2\text{-}3}$ (fig. 6.1*c*):

$$N_{1\text{-}2} = N_{2\text{-}3} = \frac{H}{\cos \alpha_2} = \frac{4}{\cos 14°} = \frac{4}{0{,}97} = 4{,}13 \text{ tf},$$

donde

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{l}{16} \cdot \frac{1}{\frac{l}{4}} = \frac{1}{4}; \quad \alpha_2 = 14°.$$

Examinando el equilibrio de los nudos *1*, *2* y *3*, determinamos los esfuerzos en los colgantes *1-5*, *2-C* y *3-6* (fig. 6.1*d*, *e*):

$$\sum Y = 0;\ N_{0\text{-}1} \operatorname{sen} \alpha_1 - N_{1\text{-}2} \operatorname{sen} \alpha_2 - N_{1\text{-}5} = 0;$$

$$N_{1\text{-}5} = N_{0\text{-}1} \operatorname{sen} \alpha_1 - N_{1\text{-}2} \operatorname{sen} \alpha_2 = 4{,}47 \operatorname{sen} 26°\,31' - 4{,}13 \operatorname{sen} 14°;$$

$$N_{1\text{-}5} = 1 \text{ tf};\quad N_{3\text{-}6} = N_{1\text{-}5} = 1 \text{ tf};$$

$$N_{2\text{-}C} = 2N_{1\text{-}2} \operatorname{sen} \alpha_2 = 2 \cdot 4{,}13 \operatorname{sen} 14° = 2 \text{tf}.$$

En la fig. 6.1*b* se muestran los diagramas de M y Q para la viga de rigidez, construidos por el procedimiento de costumbre, mediante el examen de una viga de doble apoyo sobre la cual actúan, además de las fuerzas dadas, las reacciones de los pendolones. Para la misma carga, se muestran en punteado los diagramas de M y Q para una viga común de alma llena sin cadena. La comparación de estos diagramas muestra que la viga de rigidez se descarga considerablemente de los momentos flectores y las fuerzas transversales, en el caso de haber cadena.

La presión vertical sobre el pilón R_A la determinamos de la relación (fig. 6.1*f*)

$$\frac{N_{0\text{-}1}}{\operatorname{sen} \beta_2} = \frac{R_A}{\operatorname{sen} (180° - \beta_1 - \beta_2)},$$

de donde,

$$R_A = N_{0\text{-}1} \frac{\operatorname{sen} (180° - \beta_1 - \beta_2)}{\operatorname{sen} \beta_2} = 4{,}47 \frac{\operatorname{sen} (180° - 63°\,30' - 40°)}{\operatorname{sen} 40°} = 6{,}8 \text{ tf}.$$

La reacción R_B se determina análogamente.

Ejemplo 6.2. Para el sistema combinado de arco, compuesto por la viga de rigidez ACB y la cadena A_1, C_1 y B_1, construir, por el método de los puntos en cero, las líneas de influencia de la reacción V'_A del apoyo izquierdo de la viga, del momento flector M_k y de la fuerza transversal Q_k en la sección k de la viga, por los siguientes datos:

$$l = 30 \text{ m};\quad a = 7 \text{ m};\quad z_k = 9 \text{ m};\quad f = 7{,}5 \text{ m};\quad f_k = 6{,}75 \text{ m};$$

$$\alpha = 45°;\quad \alpha_k = 23°\,40' \text{ (fig. 6.2}a\text{)}.$$

Resolución

Recordemos que los puntos en cero de las líneas de influencia son aquellos en donde las ordenadas son iguales a cero, para el caso de la aplicación de una carga vertical unitaria fuera del nudo (directa). La posición de los puntos en cero se determina gráficamente por la siguiente construcción (fig. 6.2*a*). En forma vertical, se baja la sección k de la viga de rigidez al punto k_1 de la cadena A_1, C_1, B_1, luego, por la articulación A_1 de apoyo de la cadena se trazan los rayos $A_1 = 1$, $A_1 = k_1$ y $A_1 = D_Q$ paralelo al eslabón de la cadena *1-2*, al cual se llevó la sección k y se fijan los puntos de intersección de estos rayos con la recta que

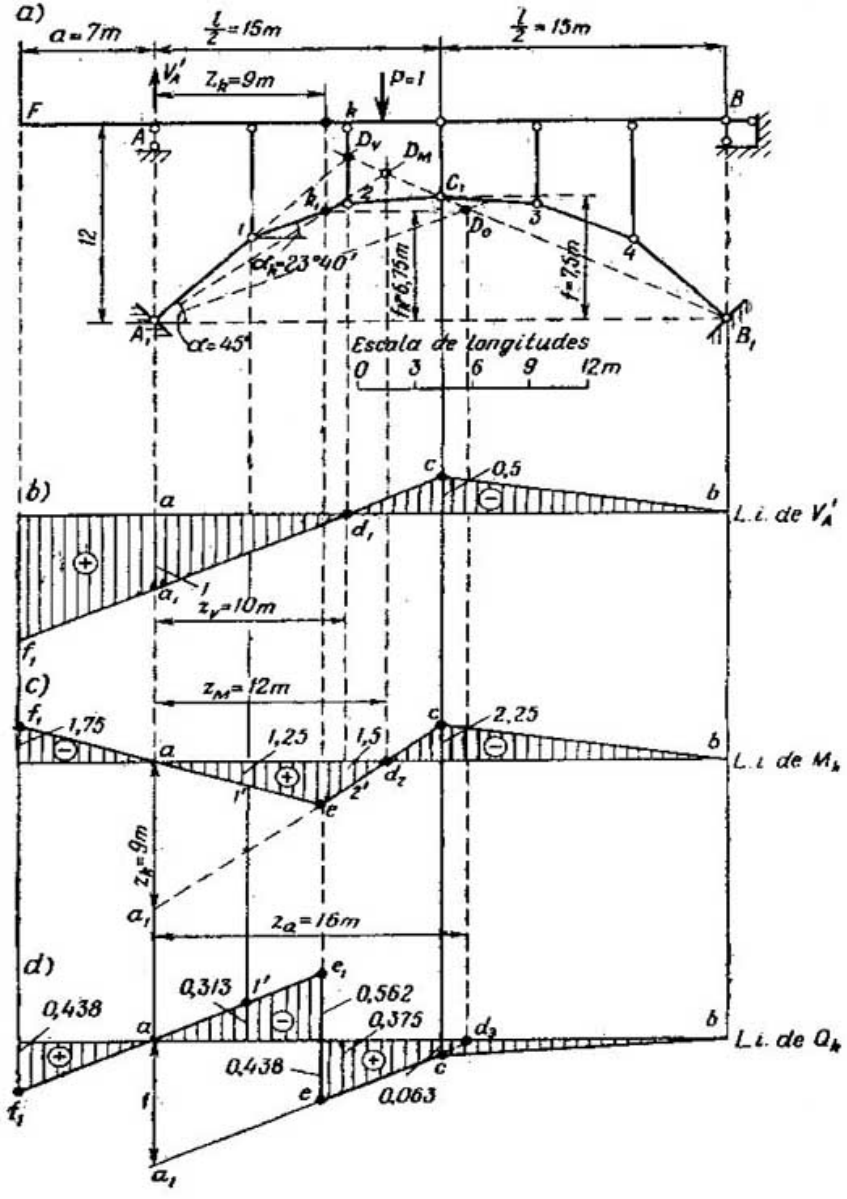

a)
a = 7m
l/2 = 15m
l/2 = 15m
V'A
zk = 9m
P = 1
F
k
B
A
DV
DM
C1
k1
2
1
3
4
DO
12
α1 = 23°40'
f = 6,75m
f = 7,5m
A1
α = 45°
B1
Escala de longitudes
0 3 6 9 12m
b)
a
c
0,5
b
L.i. de V'A
d1
a1
1
zV = 10m
f1
c)
zM = 12m
f1
1,75
a
1,25
1,5
c
2,25
b
L.i. de Mk
d2
1'
2'
e
zk = 9m
a1
za = 16m
d)
e1
0,313
1'
0,562
0,438
a
0,375
d3
b
L.i. de Qk
0,438
c
e
0,063
f1
1
a1

Fig. 6.2

pasa por las articulaciones B_1 y C_1 de la cadena. Los puntos obtenidos D_V, D_M y D_Q se llevan a las líneas de base para construir las líneas de influencia de V'_A, M_k y Q_k.

Los puntos obtenidos de tal manera d_1, d_2 y d_3 (fig. 6.2*b*—*d*) serán precisamente los puntos en cero correspondientes a las l. i. de V'_A, M_k y Q_k.

Además de estos puntos en cero se obtienen directamente, también los puntos en cero debajo del apoyo derecho B de la viga para las l. i. de V'_A, M_k y Q_k (los puntos *b*, fig. 6.2*b*—*d*) y debajo del apoyo izquierdo A para las l. i. de M_k y Q_k (el punto *a*, fig. 6.2*c*, *d*).

La posición de los puntos en cero se puede obtener determinando analíticamente sus abscisas por las siguientes fórmulas:

para la l. i. de V'_A

$$z_V = \frac{l}{1 + \frac{l}{2f} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{30}{1 + \frac{30}{2 \cdot 7{,}5} \operatorname{tg} 45^\circ} = 10 \text{ m};$$

para la l. i. de M_k

$$z_M = \frac{l}{1 + \frac{lf_k}{2fz_k}} = \frac{30}{1 + \frac{30 \cdot 6{,}75}{2 \cdot 7{,}5 \cdot 9}} = 12 \text{ m};$$

para la l. i. de Q_k

$$z_Q = \frac{l}{1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha_k}{2f} l} = \frac{30}{1 + \frac{\operatorname{tg} 23^\circ 40'}{2 \cdot 7{,}5} 30} = 16 \text{ m}.$$

Prosiguiendo, efectuamos la construcción de la l. i. de V'_A en el siguiente orden: desde la base *ab* (fig. 6.2*b*), debajo del apoyo izquierdo A de la viga, trazamos, en escala arbitraria, el segmento $aa_1 = 1$ hacia abajo, y por los puntos a_1 y d_1, una recta, sobre la cual llevamos la articulación C y el punto F. Por fin, uniendo el punto *c* con el *b* obtenemos la l. i. de V'_A definitiva.

Para la construcción de la l. i. de M_k, desde la base *ab* (fig. 6.2*c*), debajo del apoyo A de la viga, trazamos verticalmente la ordenada $z_k = 9$ m (en cualquier escala). Por el punto a_1 y el punto en cero d_2 trazamos una recta a la cual bajamos la sección *k* y la articulación C. Luego unimos el punto *c* con el *b* y el *e* con el *a* y bajamos el extremo F de la viga a la prolongación de la línea *ea* (el punto f_1).

La línea f_1 *aecb* (fig. 6.2*c*) será, precisamente, la l. i. de M_k.

Para la construcción de la l. i. de Q_k trazamos verticalmente, desde la base *ab* (fig. 6.2*d*), debajo del apoyo izquierdo A, el segmento $aa_1 = 1$ (en escala arbitraria) y unimos el punto a_1 y el punto en cero d_3 con una recta a la cual bajamos la sección *k* en el punto *e* y la articulación C en el *c*. Trazando por el punto *a* la línea ae_1 paralela a la a_1d_3 y llevando a ella los puntos F y *k* obtenemos la l. i. de Q_k (la quebrada f_1ae_1ecb).

Por fin, en todas las l. i. se indican los valores numéricos de todas las ordenadas características las que se determinan de simples relaciones geométricas.

Ejemplo 6.3. Para una armadura de cable, determinar los esfuerzos en las barras señaladas, debidos a la carga dada, y

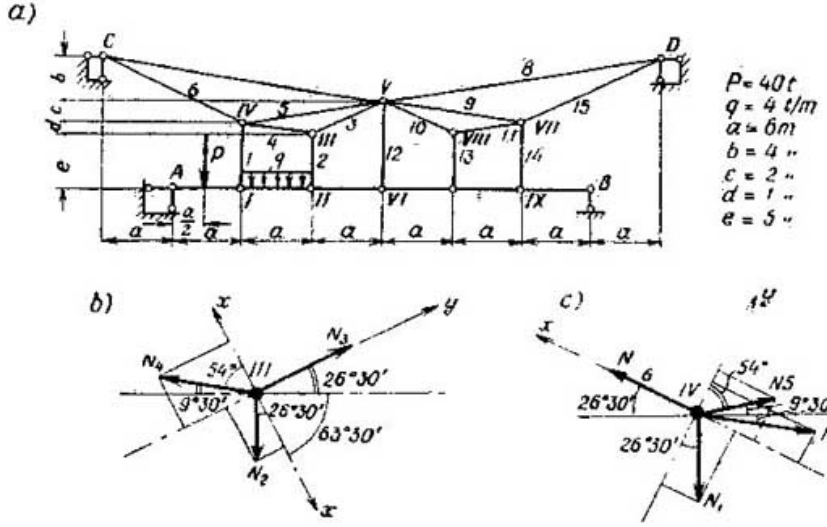


Fig. 6.3

construir las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras *2*, *3*, *5*, *6* y *8* para la circulación de un peso por la línea *AB* (fig. 6.3*a*).

Resolución

1) Determinación de los esfuerzos en las barras debidos a la carga dada

Los esfuerzos en las barras *1* y *2* se determinan por la condición de que la carga *P* y *qa* es resistida, antes que nada, por el apoyo *A* y las barras *1* y *2*. De aquí encontramos que

$$V_A = \frac{P}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ tf};$$

$$N_1 = \frac{P}{2} + \frac{qa}{2} = \frac{40}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2} = 32 \text{ tf};$$

$$N_2 = \frac{qa}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ tf}.$$

Recortando el nudo *III*, por la condición de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre éste (fig. 6.3*b*), hallar los esfuerzos N_3

y N_4. Dirigimos los ejes de coordenadas como se indica en la fig. 6.3*b*.

Entonces

$$\sum X = 0; \quad N_4 \cos 54° - N_2 \cos 26° 30' = 0;$$

$$N_4 = N_2 \frac{\cos 26° 30'}{\cos 54°} = 12 \frac{0{,}895}{0{,}588} = 18{,}2 \text{ tf};$$

$$\sum Y = 0; \quad N_3 - N_4 \operatorname{sen} 54° - N_2 \operatorname{sen} 26° 30' = 0.$$

$$N_3 = N_4 \operatorname{sen} 54° + N_2 \operatorname{sen} 26° 30' =$$

$$= 18{,}2 \cdot 0{,}809 + 12 \cdot 0{,}446 = 20{,}1 \text{ tf}.$$

Del equilibrio del nudo *IV* (fig. 6.3*a* y 6.3*c*) encontramos los esfuerzos N_5 y N_6:

$$\sum Y = N_5 \cos 54° + N_4 \cos 73° - N_1 \cos 26° 30' = 0,$$

de donde $N_5 = 39{,}6$ tf.

$$\sum X = N_6 - N_5 \operatorname{sen} 54° - N_4 \operatorname{sen} 73° - N_1 \operatorname{sen} 26° 30' = 0,$$

de donde $N_6 = 64{,}3$ tf.

Del equilibrio del nudo *V* (fig. 6.3*a*) determinamos los esfuerzos N_7 y N_8 (el eje y es perpendicular a la barra 7):

$$\sum Y = N_8 \cos 71° - N_5 \cos 71° - N_3 \cos 54° = 0,$$

$$N_8 = 75{,}5 \text{ tf}.$$

$$\sum X = N_7 - N_8 \operatorname{sen} 71° + N_5 \operatorname{sen} 71° + N_3 \operatorname{sen} 54° = 0,$$

$$N_7 = 18{,}1 \text{ tf}.$$

Recortando sucesivamente los nudos que quedan y examinando su equilibrio no es difícil establecer que los esfuerzos en las barras restantes de la armadura son iguales a cero.

Es cómodo determinar los esfuerzos en las barras por el método de los puntos de momento.

Por este método determinamos los esfuerzos N_8, N_7 y N_6. Para esto trazamos un corte en la armadura por la línea *I*, como se indica en la fig. 6.4*a*. En ésta no se muestran los esfuerzos en las barras *9*, *10* y *12*, porque son iguales a cero. Eligiendo como punto de momento la articulación *C*, obtenemos que

$$\sum M_C = 0; \quad V_A a - P \cdot 1{,}5a - qa \cdot 2{,}5a + N_8 h_8 = 0.$$

Determinamos previamente la longitud de la barra 7 y, luego, el brazo h_8 del esfuerzo N_8 por la relación

$$h_8 = l_7 \operatorname{sen} 19° = 24{,}4 \cdot 0{,}326 = 7{,}95 \text{ m}.$$

Entonces

$$N_8 = \frac{-V_A a + 1{,}5Pa + 2{,}5qa}{h_7} = \frac{-20 \cdot 6 + 1{,}5 \cdot 40 \cdot 6 + 2{,}5 \cdot 4 \cdot 6^2}{7{,}95}.$$

$$N_8 = 75{,}5 \text{ tf}.$$

Para la determinación del esfuerzo N_7 elegimos como punto de momento el nudo IV, con respecto al cual componemos la

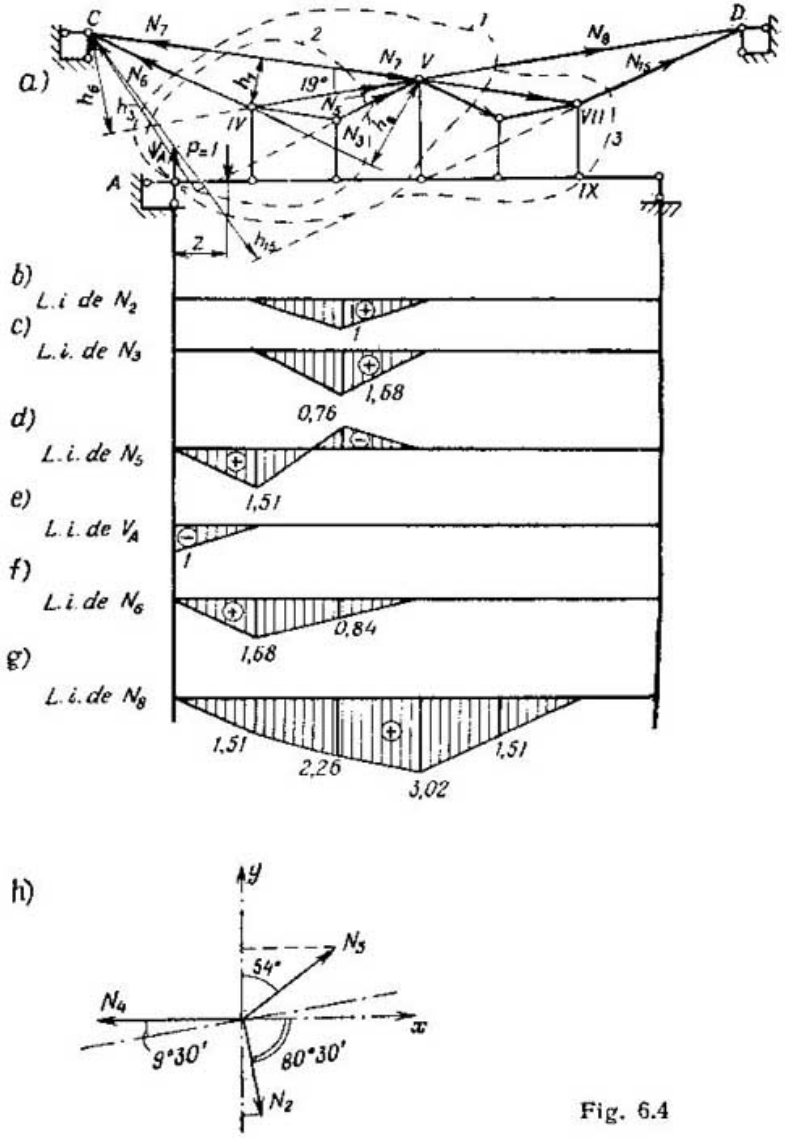


Fig. 6.4

condición de equilibrio

$$\sum M_{IV} = 0; \quad V_A a - P\frac{a}{2} + qa\frac{a}{2} - N_7 h_7 = 0,$$

de donde

$$N_7 = \frac{V_A a - P\frac{a}{2} + \frac{qa^2}{2}}{h_7} = \frac{20 \cdot 6 - \frac{40 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 6^2}{2}}{3{,}97} = 18{,}1 \text{ tf.}$$

donde $h_7 = l_5 \operatorname{sen} 19° = 12{,}2 \cdot 0{,}326 = 3{,}97$ m.

Se halla la longitud de la barra l_5 por simples relaciones geométricas.

Para la determinación del esfuerzo N_6 tomamos como punto de momento el nudo V.

Entonces

$$\sum M_V = N_6 h_6 + V_A \cdot 3a - 2{,}5Pa - qa \cdot 1{,}5a = 0,$$

de donde

$$N_6 = \frac{-V_A 3a + 2{,}5Pa + 1{,}5qa^2}{h_6}$$

$$N_6 = \frac{-20 \cdot 3 \cdot 6 + 2{,}5 \cdot 40 \cdot 6 + 1{,}5 \cdot 4 \cdot 6^2}{7{,}14} = 64{,}3 \text{ tf,}$$

donde

$$h_6 = l_7 \operatorname{sen} 17° = 24{,}4 \cdot 0{,}292 = 7{,}14 \text{ m.}$$

2) Construcción de las líneas de influencia

Construimos la línea de influencia del esfuerzo N_2 partiendo de los valores del esfuerzo $N_2 = 0$, para la posición del peso $P = 1$ en las partes *A-I* y *VI-B*, y $N_2 = 1$ para la posición del peso unitario en el nudo *II* (fig. 6.4*b*), lo que se desprende del examen del equilibrio en dicho nudo para diferentes posiciones del peso unitario vertical sobre la línea *AB*.

Recortando el nudo *III* examinamos su equilibrio para la posición del peso unitario en el nudo *II* (6.4*h*). Proyectando las fuerzas que actúan en el nudo sobre el eje *Y*, al que orientamos ⊥ a la barra *4*, obtenemos que

$$\sum Y = N_3 \cos 54° - N_2 \operatorname{sen} 80° 30' = 0,$$

de donde

$$N_3 = \frac{N_2 \cdot \operatorname{sen} 80° 30'}{\cos 54°} = \frac{N_2 0{,}986}{0{,}588} = 1{,}68 N_2.$$

Por consiguiente, obtenemos la l. i. de N_3 por la de N_2, aumentando sus ordenadas 1,68 veces. En la fig. 6.4*c* se muestra la l. i. de N_3.

Para la construcción de la l. i. de N_5 hacemos un corte en la armadura, como se muestra en la fig. 6.4*a*, con la línea punteada *2* y, eligiendo como punto de momento la articulación *C*, compone-

mos la condición de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre la parte recortada de la armadura:

$$\sum M_C = 0.$$

Admitiendo que el peso unitario está ubicado sobre el sector $A-I$ obtenemos que

$$\sum M_C = V_A a - 1\,(a+z) + N_5 h_5 = 0. \qquad (6.1)$$

Expresamos la reacción V_A como función de la abscisa z del peso unitario:

$$V_A = \frac{1\,(a-z)}{a} = 1 - \frac{z}{a}. \qquad (6.2)$$

Considerando que $h_5 = h_8 = 7{,}95$ m, de (6.1) obtenemos:

$$N_5 = \frac{-V_A + 1\,(a+z)}{h_5} = \frac{-\left(1-\frac{z}{a}\right)a + a + z}{h_5} = \frac{2z}{h_5};$$

$$N_5 = \frac{2}{7{,}95}\,z = 0{,}252z. \qquad (6.3)$$

La expresión analítica para la l. i. de N_5 (6.3) es correcta cuando $0 \leqslant z \leqslant a$.

Para la posición del peso unitario sobre la parte $I-VI$, la expresión $\Sigma M_c = 0$ toma la forma:

$$\sum M_C = N_5 h_5 + N_3 h_3 - 1\,(z+a) = 0, \qquad (6.4)$$

dado que la reacción $V_A = 0$.

De ahí tenemos

$$N_5 = \frac{z + a - N_3 h_3}{h_5} = \frac{z + 6 - N_3 \cdot 14{,}3}{7{,}95}, \qquad (6.5)$$

donde $h_3 = 24{,}4$ sen $36° = 24{,}4 \cdot 0{,}588 = 14{,}3$ m.

$$N_5 = 0 \qquad (6.6)$$

La expresión (6.5) representa la ecuación de la l. i. de N_5 en el sector $6 \leqslant z \leqslant 18$.

Para la posición del peso unitario en la parte VI-B, el esfuerzo es $N_5 = 0$ (6.6).

Calculamos los valores de las ordenadas características de la l. i. de N_5 por las ecuaciones (6.3), (6.5) y (6.6) y los resultados los llevamos a una tabla.

z	0	6	12	18	24	30	36
N_5	0	1,51	−0,76	0	0	0	0

La l. i. de N_5 se muestra en la fig. 6.4*d*.

Para la construcción de las l. i. de los esfuerzos N_6 y N_8 hacemos un corte en la armadura, como se indica en la fig. 6.4*a*, con la línea *1*.

Obtenemos la ecuación de la l. i. de N_6, eligiendo el punto de momento en el nudo V y componiendo la ecuación de equilibrio:

$$\sum M_V = 0;$$

$$V_A \cdot 3a + N_6 h_6 - 1\,(3a - z) = 0. \qquad (6.7)$$

De donde

$$N_6 = \frac{3a - z - V_a \cdot 3a}{h_6} = \frac{3a\,(1 - V_A) - z}{h_6}. \qquad (6.8)$$

La expresión (6.8) representa la ecuación de la l. i. de N_6 en la parte $0 \leqslant z \leqslant 18$.

En ella entra la reacción V_A, cuya l. i. se muestra en la fig. 6.4*e*.

La ecuación de la l. i. de N_6 en la parte $18 \leqslant z \leqslant 36$ será: $N_6 = 0$, ya que para la posición del peso unitario sobre esta parte, los esfuerzos N_1 y N_2 son iguales a cero y, por consiguiente, el esfuerzo N_6, es también igual a cero.

Abajo se expone la tabla de las ordenadas características de la l. i. de N_6 en la parte $0 \leqslant z \leqslant 18$, compuesta por la ecuación (6.8).

z	0	6	12	18
N_6	0	1,68	0,84	0

En la fig. 6,4 *f* se muestra la l. i. de N_6.

Para la construcción de la l. i. del esfuerzo N_8 trazamos un corte por el apoyo *A*, las barras *6*, *7*, *8*, *15* y el nudo *IX*, como lo indican las líneas *1* y *3* en la fig. 6.4*a*.

Adoptando como punto de momento la articulación *C* componemos la ecuación de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre la parte recortada de la armadura:

$$\sum M_C = V_A a - 1\,(z + a) + N_8 h_8 + N_{15} h_{15} = 0.$$

El brazo h_{15} se determina así:

$$h_{15} = 8 \cdot a \cdot \operatorname{sen} 26^\circ 30' = 8 \cdot 6 \cdot 0{,}446 = 21{,}4 \text{ m}.$$

Por consiguiente, la l. i. de N_8 se expresa por medio de las l. i. de V_A y N_{15}:

$$\text{l.i. de } N_8 = \frac{1\,(z + a) - \text{l.i. de } V_A a - \text{l.i. de } N_{15} h_{15}}{h_8}.$$

Ubicando sucesivamente el peso unitario $P = 1$ en los nudos del cordón inferior de la armadura y empleando la l. i. de N_6 en

lugar de la de N_{15}, en imagen especular, componemos la tabla de ordenadas de la l. i. de N_8.

z	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$
V_A	1	0	0	0	0	0	0
N_{15}	0	0	0	0	0,84	1,68	0
N_8	0	1,51	2,27	3,02	1,51	0	0

en la fig. 6.4*g* se muestra la l. i. de N_8.

CAPÍTULO 7 * CARGAS LIMITES DE LOS SISTEMAS ISOSTATICOS PLANOS

Ejemplo 7.1. En la fig. 7.1 se muestra una armadura, todas las barras de la cual tienen una sección transversal igual: dos

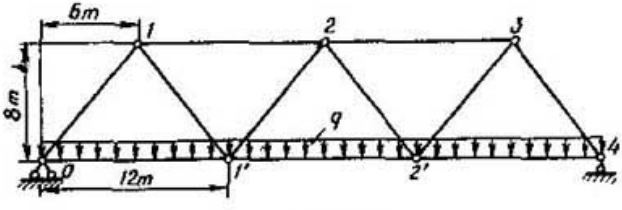


Fig. 7.1

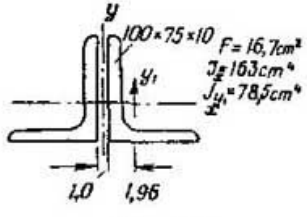


Fig. 7.2

ángulos de $100 \times 75 \times 10$ (fig. 7.2). Calcular la intensidad de la carga límite, uniformemente repartida por todo el cordón inferior, si $\sigma_t = 2400$ kg/cm².

Resolución

Hemos de considerar límite a tal carga que origine la tensión límite σ_t, aunque sea en una sola de las barras traccionadas, o bien, tal que suscite tensión crítica aunque sea en una sola de las barras comprimidas.

Expresamos el esfuerzo en las barras por medio de la carga q, empleando el método estático de cálculo de armaduras:

$$N_{0\text{-}1} = -N_{1\text{-}1'} = N_{3\text{-}4} = -N_{3\text{-}2'} = -15q; \quad N_{1'\text{-}2} = N_{2\text{-}2'} = 0;$$

$$N_{1\text{-}2} = N_{2\text{-}3} = -18q; \quad N_{0\text{-}1'} = N_{2'\text{-}4} = 9q; \quad N_{1'\text{-}2'} = 18q.$$

Por consiguiente, cuando en la barra $1'$-$2'$ del cordón inferior la presión llega a ser igual a 2400 kg/cm² o bien, cuando en las

armaduras comprimidas *1-2* y *2-3* del cordón superior surge una tensión crítica $\sigma = \sigma_{crít}$, la carga será considerada límite.

Examinemos estas variantes.

1. Para una tensión de 2400 kg/cm² en la barra *1'-2'* del cordón inferior, el esfuerzo en ésta, para nudos de piezas soldadas, es

$$N_{1'-2'} = \sigma_{tl} F = 2400 \cdot 2 \cdot 16{,}7 = 80\,160 \text{ kg}.$$

En este caso, la intensidad de la carga límite es

$$q_{1\,lim} = \frac{N_{1'-2'}}{18} = \frac{80\,160}{18} = 4450 \text{ kg/m}.$$

2. La fuerza crítica en las barras del cordón superior, en el estadio de trabajo elástico, puede ser calculada por la fórmula

$$P_{crít} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2}, \quad \text{si } \lambda \geqslant 100.$$

En la sección dada

$$J_x = 2 \cdot 163 = 326 \text{ cm}^4; \quad J_z = 2\,(78{,}5 + 16{,}7 \cdot 2{,}46^2) = 359 \text{ cm}^4;$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{326}{2 \cdot 16{,}7}} = 3{,}12 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1200}{3{,}12} > 100;$$

$$N_{crít\ 1\text{-}2} = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^6 \cdot 326}{1200^2} = 4490 \text{ kg};$$

$$q_{2\,lim} = \frac{4490}{18} = 250 \text{ kg/m}.$$

Esto significa que en nuestro caso la carga $q = 250$ kg/m, originadora de carga crítica en las barras del cordón superior, es

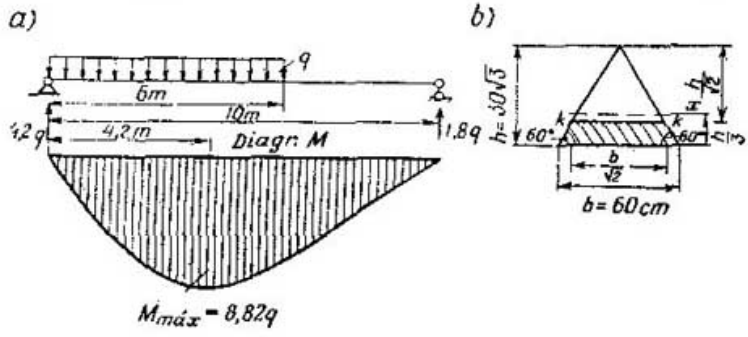


Fig. 7.3

límite para el sistema dado, ya que $q_{1\,lim} > q_{2\,lim}$. Esta carga deberá incluir también el peso propio de la armadura.

Ejemplo 7.2. La viga dada (fig. 7.3*a*) tiene la sección transversal triangular (fig. 7.3*b*). Despreciando la influencia de la fuerza transversal, calcular el valor límite de la carga fija asignada para $\sigma_t = 500$ kg/cm².

Resolución

Calculemos el valor del momento límite para la sección dada. Hemos de considerar estado límite a la aparición de una articulación plástica en la sección más tensionada de la viga.

Con la aparición de la articulación plástica, la línea en cero divide la sección dada en dos partes de dimensiones iguales. Esta línea pasará a la distancia $\frac{h}{\sqrt{2}}$ del vértice del triángulo.

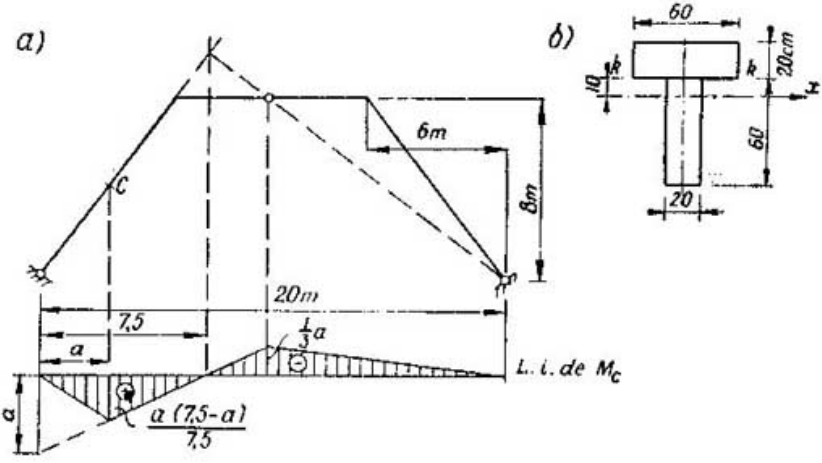


Fig. 7.4

El par de resistencia plástico es igual al doble momento estático de la parte de sección traccionada o comprimida con respecto al eje x (fig. 7.3*b*). Examinemos la parte comprimida superior:

$$W_{pl} = 2\,\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}\cdot\frac{h}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}h - \frac{2}{3}\cdot\frac{h}{\sqrt{2}}\right);$$

para $b = 60$ cm,

$$h = 30\sqrt{3}\ \text{cm}, \quad W_{pl} = 15\,800\ \text{cm}^3.$$

El valor numérico del momento límite es

$$M_{lim} = W_{pl}\sigma_t = 15\,800 \cdot 500 = 79 \cdot 10^5\ \text{kg} \cdot \text{cm} = 79\ \text{tfm}.$$

El valor numérico de la intensidad de la carga fija límite lo encontramos de la relación

$$M_{máx} = M_{lim}; \quad 8{,}82q = 79\ \text{tfm}; \quad q = 8{,}96\ \text{tfm}.$$

Ejemplo 7.3. Calcular la intensidad de la carga rodante límite, uniformemente repartida, para el pórtico triarticulado dado en la fig. 7.4*a*. La sección transversal se muestra en la fig. 7.4*b*, $\sigma_t = 500\ \text{kg/cm}^2$.

Resolución

Calculemos la carga límite considerando solamente la influencia del momento flector.

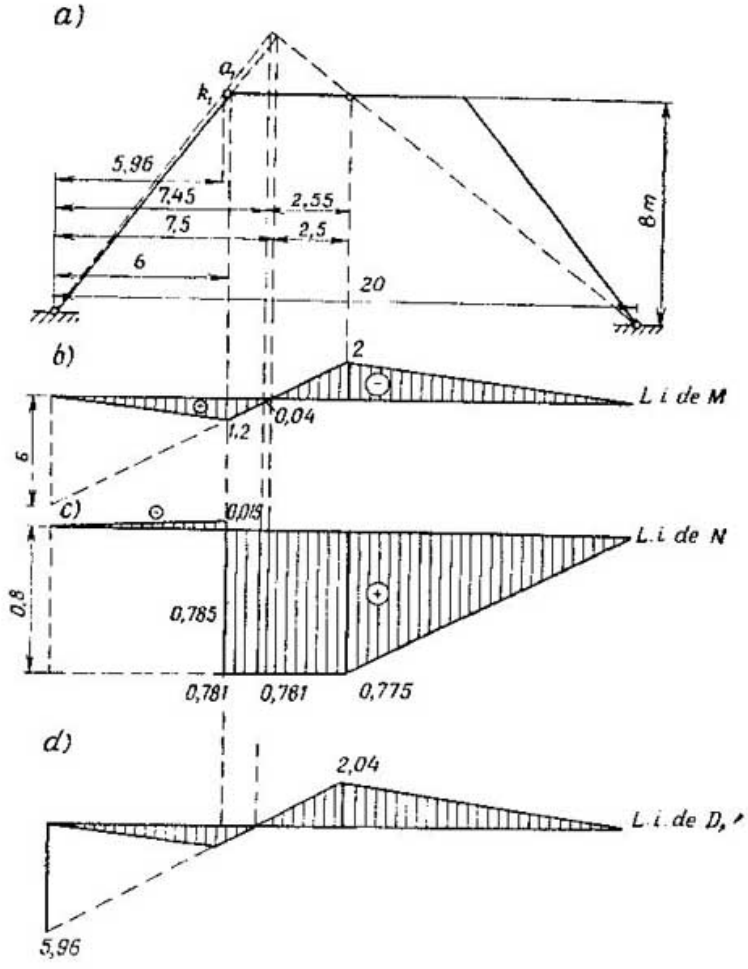


Fig. 7.5

Con la aparación de una articulación plástica, la sección transversal queda dividida por la linea en cero $k - k$ en dos partes de dimensiones iguales. El momento límite de resistencia $W = 2 \cdot 20 \cdot 60 \cdot 20 = 48 \cdot 10^3$ cm³.

Para $\sigma_t = 500$ kg/cm² el momento flector límite es igual a

$$M^{\text{lím}} = W_{\text{pl}} \sigma_t = 48 \cdot 10^3 500 = 240 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 240 \text{ tfm}.$$

Construimos la línea de influencia del momento flector en la sección c del puntal inclinado del sistema. No es difícil notar que el punto en cero de la línea de influencia no depende de la posición de la sección examinada en el puntal. Hallamos las áreas de las partes positiva y negativa de la línea de influencia de M_C:

$$\omega_+ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(7{,}5 - a)}{7{,}5} 7{,}5 = 3{,}75a - 0{,}5a^2;$$

$$\omega_- = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} a \cdot 12{,}5 = 2{,}08a.$$

De la condición $\omega_+ = \omega_-$ encontramos que $a = 3{,}34$ m. Para $a > 3{,}34$ m predomina el área negativa. Por consiguiente, para $a = 6$ m el momento flector negativo máximo será:

$$\omega_- = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} 6 \cdot 12{,}5 = 12{,}5 \text{ m}^2; \quad M_{\text{máx}} = 12{,}5q.$$

Encontramos la intensidad de la carga rodante límite, uniformemente repartida, de la condición $M_{\text{máx}} = M_{\text{lim}}$:

$$q = \frac{M_{\text{lim}}}{12{,}5} = \frac{240}{12{,}5} = 19{,}2 \text{ tf/m}.$$

Ejemplo 7.4. Señalar el orden de seleccionar las alturas de la sección transversal rectangular de un ancho de 0,5 m, en el pórtico triarticulado de resistencia uniforme, tomando en consideración la influencia de la fuerza axil frente a la acción de una carga móvil de intensidad $q = 64$ tf/m, siendo $\sigma_t = 500$ kg/cm². El pórtico se muestra en la fig. 7.5*a*.

Resolución

Para la viga cuyo perfil transversal es rectangular (fig. 7.6), en el caso de flexión pura en aquella sección donde ha surgido una articulación plástica, la línea en cero pasará por el centro de gravedad. El momento de resistencia plástico puede ser escrito así:

$$W_{\text{pl}} = 2\frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4} = \frac{0{,}5h^2}{4} = \frac{h^2}{8}.$$

La condición de estado límite para una sección rectangular, tomando en consideración las fuerzas axiles, tiene la forma:

$$M_{\text{lim}} + \frac{N_{\text{lim}}^2}{4b\sigma_t} = W_{\text{pl}}\sigma_t. \tag{7.1}$$

Es necesario encontrar una posición de la carga rodante, para la cual el primer miembro de la ecuación (7.1) tendría el valor máximo. Al principio presentamos la expresión (7.1) en la

siguiente forma:

$$M_{\text{lim}} + \mu N^* N_{\text{lim}} = W_{\text{pl}} \sigma_t,$$

$$\text{donde } \mu = \frac{1}{4b\sigma_t} = \frac{1}{4 \cdot 0{,}5 \cdot 5000} = 10^{-4} \text{ m/tf};$$

N^* es el valor de la fuerza axil hallado de la posición supuesta de la carga rodante.

Designamos a $\mu N_i^* = a_i$. Ahora, con respecto a M y N, el primer miembro se torna lineal, pudiendo ser construida la línea de influencia de cierta magnitud D: l.i. de D = l.i. de $M + a \cdot$ l.i. de N.

La magnitud D tiene el sentido de momento flector en la sección respecto a cierto punto K, cuya coordenada a, en el área de la sección, es calculada por la normal desde el centro de gravedad hasta el eje del pórtico. El cálculo lo efectuamos para la sección tomada en el montante izquierdo cerca de su paso a la viga de estructura (fig. 7.5*a*).

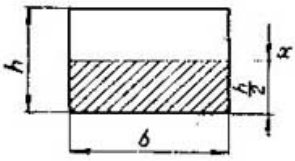


Fig. 7.6

Las líneas de influencia de M y N se construyen, como es común en un sistema triarticulado (fig. 7.5*b*, *c*).

Dado que la parte negativa de la línea de influencia del momento con respecto al centro de gravedad posee un área mayor que la positiva entonces, apoyamos la carga rodante sobre la parte negativa de la línea de influencia.

Con esta carga, hallamos por las líneas de influencia que

$$M = \frac{2 \cdot 12{,}5}{2} 64 = 800 \text{ tfm};$$

$$N = \left(\frac{0{,}775 \cdot 10}{2} + \frac{0{,}781 + 0{,}775}{2} 2{,}5 \right) 64 = 367 \text{ tf} = N_1^*;$$

$$D_1 = M + \mu N^* N = 800 + 10^{-4} \cdot 367 \cdot 367 = 814 \text{ tfm}.$$

Por consiguiente, como primera aproximación, la altura de la sección puede ser tomada

$$h = \sqrt{\frac{8D}{\sigma_t}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 814}{5000}} = 1{,}14 \text{ m}.$$

Ahora hallamos el punto K_1 por la fórmula de su coordenada:

$$a_1 = \mu N_1^* = 10^{-4} 372 \approx 0{,}04 \text{ m}.$$

Construimos la línea de influencia de D_1 como línea de influencia del momento con respecto al punto K_1.

En el caso de cargar la parte derecha del pórtico, de longitud 12,55 m, el nuevo valor del momento, con respecto al centro de gravedad, constituye

$$M = \left(\frac{2 \cdot 12{,}5}{2} - \frac{0{,}04 \cdot 0{,}05}{2}\right) 64 = 800 \text{ tfm}.$$

El nuevo valor de la fuerza axil es

$$N = 64\left(\frac{0{,}755 \cdot 10}{2} + \frac{0{,}781 + 0{,}755}{2} 2{,}55\right) = 369 \text{ tf}.$$

$$a_2 = \mu N_2^* = 10^{-4} \cdot 369 \approx 0{,}04m.$$

Dentro de los límites de precisión de los cálculos, los puntos K_1 y K_2 coinciden. Por consiguiente, la línea de influencia de D_1, en calidad de línea de influencia del valor límite de $W_{pl}\sigma_t$, puede ser tomada como de cálculo.

Este mismo cálculo deberá ser efectuado para una serie de secciones del pórtico, a resultas de lo cual obtenemos un pórtico de resistencia uniforme, es decir, la carga dada será límite para cada sección.

CAPÍTULO 8 * DESPLAZAMIENTOS DE SISTEMAS LINEALES PLANOS

La determinación de los desplazamientos de los sistemas lineales se basa en un análisis del trabajo cumplido por las fuerzas del así llamado estado auxiliar, sobre los desplazamientos del estado real, debidos a la solicitación prefijada sobre el sistema (carga, temperatura, asentamiento de los apoyos, etc.).

El estado auxiliar se forma en un sistema libre de la solicitación dada, aplicando una fuerza "unitaria" adimensional, en la dirección del desplazamiento lineal buscado, o un par de fuerzas "unitario", adimensional, en la dirección del desplazamiento angular o, por último, un grupo "unitario" de fuerzas, aplicadas en la dirección de las componentes del desplazamiento de grupo buscado.

Los desplazamientos para los sistemas de barras rectas o de pequeña curvatura se calculan por las fórmulas:

1) los desplazamientos debidos a la carga

$$\Delta_{kP} = \sum \int \bar{M}_k \frac{M_P}{EJ} ds + \sum \int \bar{N}_k \frac{N_P}{EF} ds + \sum \int \mu \bar{Q}_k \frac{Q_P}{GF} ds, \quad (8.1)$$

donde

$\bar{M}_k$, $\bar{N}_k$, $\bar{Q}_k$, M_p, N_p y Q_p son los momentos flectores y las fuerzas axiles y transversales en los estados auxiliar y real, respectivamente;

J, el momento de inercia de la sección;

F, el área de la sección transversal;

E y G, los módulos de elasticidad de primero y segundo género;

μ, el coeficiente que toma en consideración la irregularidad en la distribución de las tensiones tangenciales.

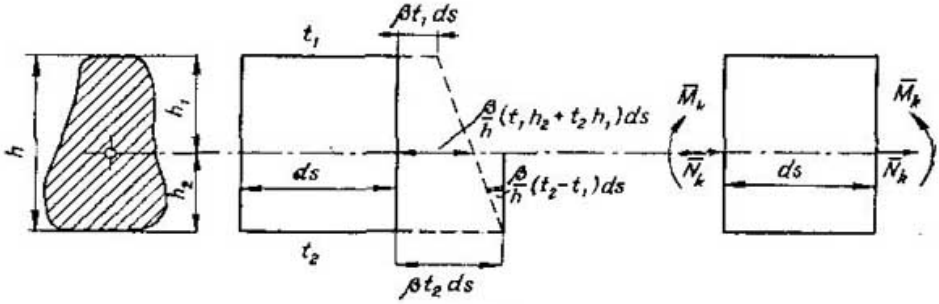


Fig. 8.1

En los casos en que el cálculo de las integrales se puede efectuar "multiplicando" diagramas, la fórmula (8.1) se escribe, convencionalmente, así:

$$\Delta_{kP} = (M_p) \cdot (\bar{M}_k) + (N_p) \cdot (\bar{N}_k) + (Q_p) \cdot (\bar{Q}_k); \qquad (8.1')$$

2) los desplazamientos debidos a la temperatura t (fig. 8.1)

$$\Delta_{kt} = \sum \int \frac{\beta}{h} (t_1 h_2 + t_2 h_1) \bar{N}_k \, ds + \sum \int \frac{\beta}{h} (t_2 - t_1) \bar{M}_k \, ds =$$

$$= \sum \frac{\beta}{h} (t_1 h_2 + t_2 h_1) \omega_{\bar{N}_k} + \sum \frac{\beta}{h} (t_2 - t_1) \omega_{\bar{M}_k}, \qquad (8.2)$$

donde β es el coeficiente de dilatación lineal;

$\omega_{\bar{N}_k}$ y $\omega_{\bar{M}_k}$, las áreas de los diagramas de $\bar{N}_k$ y $\bar{M}_k$;

t_1 y t_2, las variaciones de temperatura a uno y otro lado de la barra;

t_2 y h_2 se deben marcar en el lado de la zona traccionada por el momento flector $\bar{M}_k$;

3) los desplazamientos debidos a la dislocación de los apoyos

$$\Delta_{k\Delta} = -\sum \bar{R}_{mk} \Delta_m, \qquad (8.3)$$

donde $\Delta_{k\Delta}$ es el desplazamiento incógnito por la dirección de la fuerza auxiliar

$P_k = 1$, debida al grupo de los desplazamientos dados Δ_m;

$\bar{R}_{mk}$, la reacción en el vínculo m, debida a la fuerza $P_k = 1$. La reacción se considera positiva si coincide por la dirección con Δ_m;

Δ_m, el desplazamiento imprimido por la dirección del vínculo m.

En los elementos que trabajan en forma predominante a la flección, por lo común, es insignificante la influencia de la deformación, debida a N y Q, sobre el desplazamiento Δ_{kP} y, en este caso, en la fórmula (8.1) se puede dejar sólo el primer miembro.

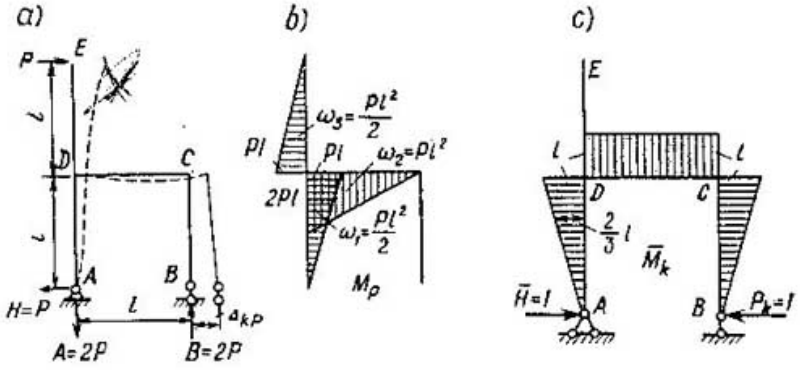


Fig. 8.2

Para determinar los desplazamientos en las armaduras podemos escribir las fórmulas (8.1) y (8.2) de la siguiente forma:

$$\Delta_{kP} = \sum \bar{N}_{ik} \frac{N_{iP}}{E_i F_i} l_i; \tag{8.4}$$

$$\Delta_{kt} = \sum \bar{N}_{ik} \beta_i t_i l_i, \tag{8.5}$$

donde $\bar{N}_{ik}$ es el esfuerzo en la i^{ma} barra de la armadura, debido a $P_k = 1$; l_i, la longitud de la i^{ma} barra; β_i, su coeficiente de dilatación lineal; t_i, el incremento de temperatura en esta barra para una temperatura igual a ambos lados de la misma.

Ejemplo 8.1. Determinar el desplazamiento del apoyo rodante derecho, debido a una carga dada (fig. 8.2*a*), despreciando las deformaciones debidas a N y Q. En todos los tramos, las rigideces de flección son constantes e iguales.

Resolución

En la fig. 8.2*a*, *b* se presenta el estado real con las reacciones de los apoyos halladas para las cargas dadas. En la fig. 8.2*c* se da el estado auxiliar con la fuerza $P_k = 1$, la dirección de la cual se toma por la línea del desplazamiento buscado del apoyo móvil.

El desplazamiento lo determinamos por la fórmula (8.1) y el cálculo de las integrales lo realizamos por las reglas de multiplicación de diagramas.

En todos los tramos del pórtico ambos diagramas, el de $\bar{M}_k$ y el de M_P, son rectilíneos, por lo que es indiferente en cual de ellos vamos a tomar el área de diagrama y en cual la ordenada. Por ejemplo, tomamos los áreas en el diagrama de M_P, entonces las ordenadas a nivel de sus centros de gravedad es necesario tomarlas en el diagrama de $\bar{M}_k$.

En el tramo AD el área del diagrama de M_P es igual a $\omega_1 = \frac{Pl^2}{2}$; a nivel de su centro de gravedad, en el diagrama de $\bar{M}_k$,

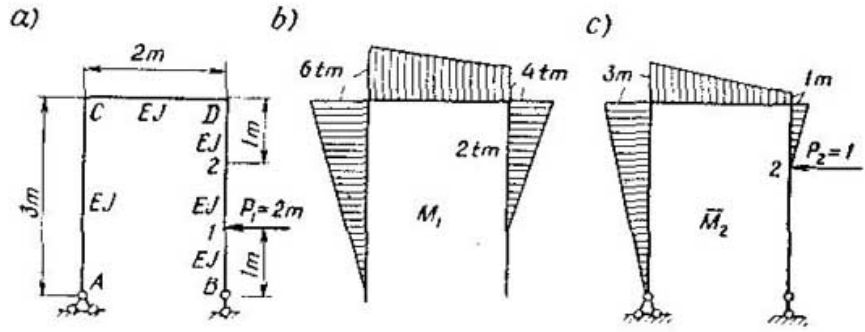


Fig. 8.3

la ordenada es igual a $\frac{2}{3}\,l$ (fig. 8.2*b*, *c*). El producto $(\bar{M}_k)\cdot(M_P)$ será negativo, dado que las ordenadas de los diagramas se trazaron a ambos lados del eje.

En el tramo DC, el área de M_P es igual a $\omega_2 = Pl^2$; no se hace necesario determinar su centro de gravedad ya que todas las ordenadas de $\bar{M}_k$ son iguales a l. Estas poseen el signo contrario por haber sido trazadas al otro lado del eje del diagrama y el producto $(\bar{M}_k)\cdot(M_P)$ también se obtiene negativo.

En los tramos DE y BC, los productos $(\bar{M}_k)\cdot(M_P)$ serán iguales a cero, porque en el tramo DE las ordenadas de $\bar{M}_k$, y en el BC, el área de M_P son iguales a cero.

En conclusión, aquí la suma de las integrales se compone solamente de dos productos:

$$\Delta_{kP} = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{Pl^2}{2}\cdot\frac{2}{3}\,l + Pl^2 l\right) = -\frac{4Pl^3}{3EJ}.$$

Siendo la rigidez constante, la división por EJ se puede efectuar no por sectores sino que sacar el multiplicando $\frac{1}{EJ}$ fuera de los paréntesis. El signo menos indica que el desplazamiento Δ_{kP}

está dirigido en sentido contrario a la fuerza elegida P_k. De dirigir la fuerza P_k hacia la derecha, también el diagrama de $\bar{M}_k$ ha de tener los mismos signos que el de M_P y, Δ_{kP} será positivo.

En la fig. 8.2*a*, en punteado se muestra el aspecto deformado del pórtico y se señala la magnitud Δ_{kP}.

Ejemplo 8.2. Calcular el desplazamiento horizontal del punto *2* de un pórtico cargado en el punto *1* con la fuerza $P_1 = 2$ t (fig. 8.3*a*). Las rigideces de flexión son constantes e iguales en todos los tramos.

Resolución

Construimos el diagrama de M_1 del estado real (fig. 8.3*b*). En el punto *2* del estado auxiliar aplicamos la fuerza horizontal $P_2 = 1$ y construimos el diagrama de $\bar{M}_2$ (fig. 8.3*c*).

Para el cálculo del desplazamiento Δ_{21} utilizamos la fórmula de "multiplicación de trapecios" (fig. 8.4):

$$(M_1) \cdot (M_2) = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc). \qquad (8.6)$$

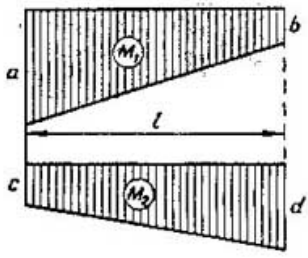


Fig. 8.4

Considerando que el triángulo es un caso particular del trapecio, que posee una ordenada extrema igual a cero, ejecutamos la multiplicación por los sectores *AC*, *CD* y *D2* (fig. 8.3*a*):

$$\Delta_{21} = \frac{1}{6EJ}[3(2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 6 \cdot 0) +$$
$$+ 2(2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 3) +$$
$$+ 1(2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1)] = \frac{40{,}33}{EJ}.$$

Para obtener el valor numérico de Δ_{21} en metros hay que tomar la unidad de EJ en t·m².

Problema 8.3. Calcular los ángulos de giro de las secciones de apoyo del pórtico del ejemplo precedente, debidos a la fuerza P_1 (fig. 8.3*a*).

Respuesta:

$$\varphi_A = \frac{43}{3EJ}; \quad \varphi_B = \frac{26}{3EJ}.$$

Ejemplo 8.4. Mostrar que el ángulo de giro φ_B de la sección en el apoyo *B* del pórtico (fig. 8.5*a*), debido a la fuerza vertical $P = 5$ tf es numéricamente igual a la flecha y_A, situada debajo de

esta fuerza debida a la acción del momento $M = 5$ tfm aplicado en la dirección del ángulo de giro φ_B. Las rigideces de flección EJ son constantes en todos los tramos e iguales entre sí.

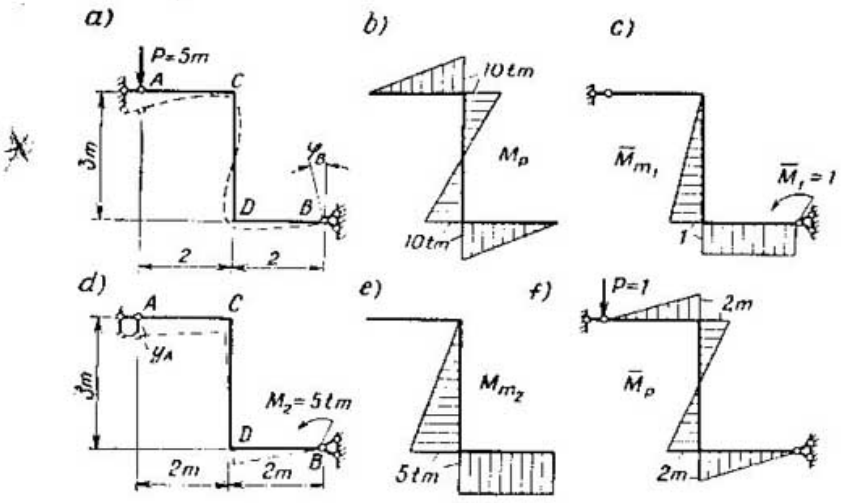


Fig. 8.5

Resolución

Al principio calculamos el ángulo de giro φ_B, luego, la flecha y_A y confrontamos sus valores.

El primer estado real lo tomamos cargado con la fuerza P y le construimos el diagrama M_P (fig. 8.5*b*). Para hallar el ángulo de giro φ_B es necesario aplicar en el estado auxiliar, por su dirección, el momento unitario $\bar{M}_1 = 1$ y construir el diagrama de $\bar{M}_{M1}$ (fig.8.5*c*). El ángulo de giro se debe marcar como desplazamiento por la dirección de M debido a P, esto es, $\varphi_B = \Delta_{MP}$.

Lo calculamos por las reglas de "multiplicación" de diagramas, empleando en el tramo CD la fórmula de "multiplicación" de trapecios" (8.6):

$$\Delta_{MP} = (M_P) \cdot (\bar{M}_{M_1}) =$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\frac{3}{6}(2 \cdot 10 \cdot 1 - 2 \cdot 10 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 10 \cdot 1) + \frac{10 \cdot 2}{2} 1\right] = \frac{15}{EJ} \text{ rad.}$$

Pasamos al cálculo de la flecha y_A. Aquí se debe tomar el estado real cargado con el momento $M_2 = 5$ tfm (fig. 8.5*d*). Le construimos el diagrama de M_{M2} (fig. 8.5*e*). El estado auxiliar y su diagrama de $\bar{M}_P$ están representados en la fig. 8.5*f*. Ahora marcamos la flecha como desplazamiento a lo largo de la fuerza P, debido al momento M, y la calculamos por medio de los diagra-

mas de M_{M2} y $\bar{M}_P$:

$$y_A = \Delta_{PM} = (M_{M_2}) \cdot (\bar{M}_P) =$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\frac{3}{6}(2 \cdot 5 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 0 \cdot 2) + 5 \cdot 2 \cdot 1\right] = \frac{15}{EJ} \text{ m.}$$

Confrontando los resultados, vemos que para $|P| = |M|$ se obtiene $|\Delta_{MP}| = |\Delta_{PM}|$ o $|\varphi_B| = |y_A|$, tal como se deduce del teorema de desplazamientos recíprocos.

Ejemplo 8.5. Hallar la variación de la distancia entre los puntos C y B del pórtico cargado con la fuerza horizontal P (fig. 8.6*a*).

Resolución

Calculamos las reacciones y construimos el diagrama de M_P debido a la carga dada (fig. 8.6*b*). Por la dirección del desplazamiento buscado (la variación de la longitud) aplicamos la fuerza

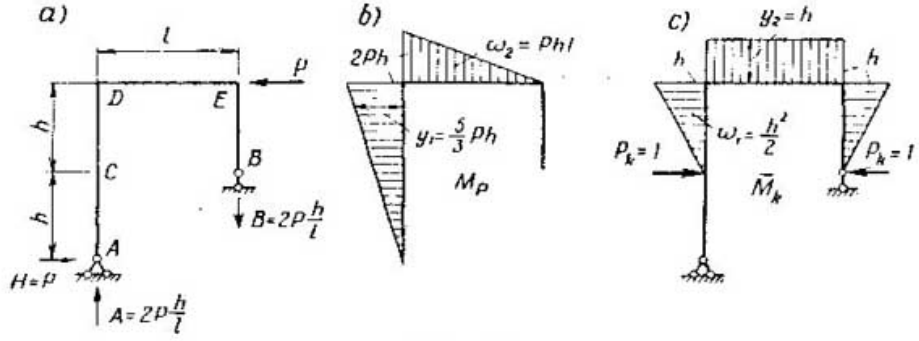


Fig. 8.6

generalizada en forma de dos fuerzas iguales y recíprocamente contrarias, $P_k = 1$ (fig. 8.6*c*). Elegimos la dirección de ellas suponiendo que la distancia entre C y B va disminuyendo. En la fig. 8.6*c* se representa el diagrama de $\bar{M}_k$. El desplazamiento buscado Δ_{kP} se determina mediante la multiplicación de los diagramas de M_P y $\bar{M}_k$ en los tramos CD y DE:

$$\Delta_{kP} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{h^2}{2} \cdot \frac{5}{3} Ph + Phlh\right) = \frac{Ph^2}{EJ}\left(\frac{5}{6}h + l\right).$$

Problema 8.6. Hallar el ángulo recíproco de giro de las secciones de apoyo debido a la carga P en el pórtico representado en la fig. 8.6*a*.

Respuesta. El estado auxiliar contiene dos momentos $Z = 1$, recíprocamente contrarios, aplicados a las secciones de apoyo. El ángulo recíproco de giro es

$$\Delta_{ZP} = \frac{Ph}{EJ}(2h + l).$$

Ejemplo 8.7. Calcular el ángulo de giro de la sección C del pórtico $AEDB$, portador de la carga uniforme q en el tramo ED (fig. 8.7). Las dimensiones y relaciones de los momentos de inercia de los elementos del pórtico se señalan en la figura.

Resolución

Determinamos las reacciones y construimos el diagrama de M_P debidos a la carga del estado real (fig. 8.7).

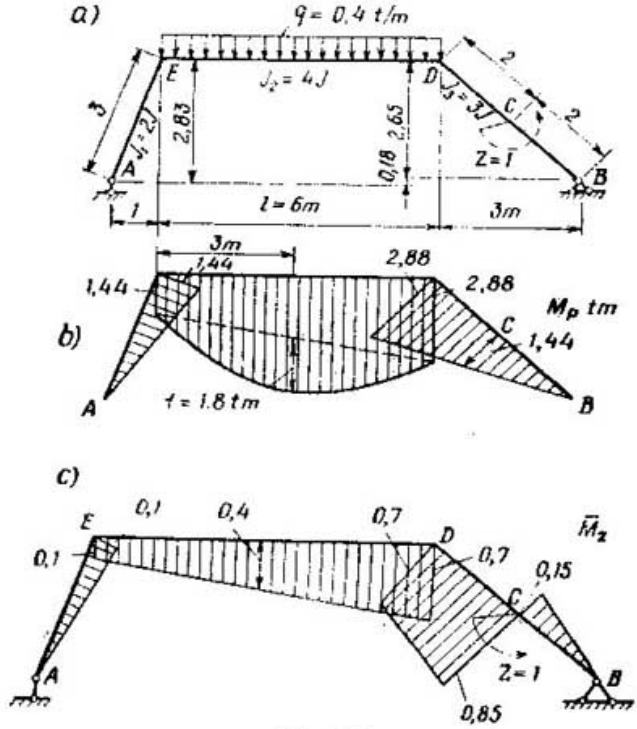


Fig. 8.7

En el estado auxiliar quitamos la carga, por la dirección del desplazamiento buscado aplicamos el momento unitario $Z = 1$ en la sección C y construimos el diagrama de $\bar{M}_Z$.

Para el cálculo de Δ_{ZP}, efectuamos la multiplicación de los diagramas por tramos, considerando los diversos valores de los momentos de inercia.

Multiplicamos los diagramas triangulares en los tramos AE y BC (fig. 8.7*b*, *c*):

$$\frac{3}{3 \cdot 2EJ} 1{,}44 \cdot 0{,}1 \frac{0{,}07}{EJ} \text{ y } -\frac{2}{3 \cdot 3EJ} 1{,}44 \cdot 0{,}15 = -\frac{0{,}05}{EJ}.$$

En el tramo CD, los diagramas son trapezoidales:

$$\frac{2}{6 \cdot 3EI}(2 \cdot 2{,}88 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 1{,}44 \cdot 0{,}85 + 2{,}88 \cdot 0{,}85 + 1{,}44 \cdot 0{,}7) = \frac{1{,}11}{EI}.$$

En el tramo DE descomponemos el diagrama de M_P en un trapecio y un segmento parabólico y los multiplicamos, separadamente, por el trapecio del diagrama de $\bar{M}_Z$. Dado que sólo se puede tomar la ordenada del diagrama rectilíneo (aquí es el de $\bar{M}_Z$), entonces, nos queda el coger el área del diagrama de M_P. El área del segmento parabólico es igual a $\frac{2}{3}lf$, con el centro de gravedad en la mitad de l.

De este modo, tenemos que

$$\frac{1}{4EI}\left[\frac{2}{3}6 \cdot 1{,}8 \cdot 0{,}4 + \right.$$

$$+ \frac{6}{6}(2 \cdot 1{,}44 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 2{,}88 \cdot 0{,}7 +$$

$$\left. + 1{,}44 \cdot 0{,}7 + 2{,}88 \cdot 0{,}1)\right] = \frac{2{,}13}{EI}.$$

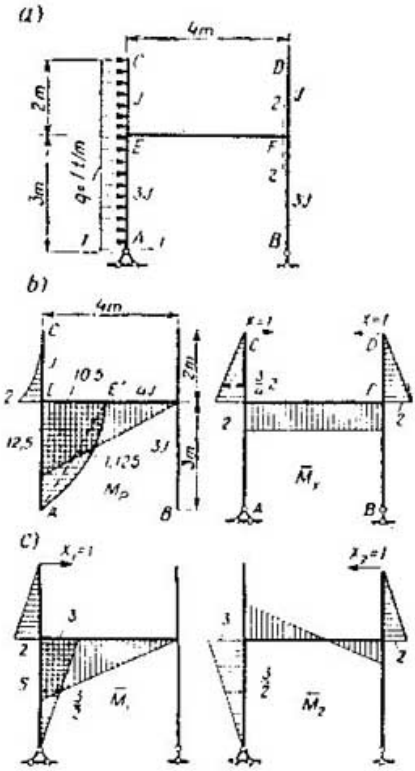


Fig. 8.8

Sumando los resultados por tramos, obtenemos:

$$\Delta_{ZP} =$$

$$= \frac{1}{EI}(0{,}07 - 0{,}05 + 1{,}11 + 2{,}13) =$$

$$= \frac{3{,}26}{EI} \text{ rad.}$$

Problema 8.8. Hallar el desplazamiento vertical del punto D debido a la carga uniforme q en el pórtico representado en la fig. 8.7*a*.

Respuesta:

$$\Delta_{YP} = \frac{9{,}28}{EI} \text{ m.}$$

Ejemplo 8.9. Hallar la variación de la distancia entre los puntos C y D del pórtico $ABCD$ debida a la carga horizontal uniforme, q y, luego, determinar las componentes de esta variación: los desplazamientos horizontales de cada punto C y D por separado (fig. 8.8*a*).

Resolución

En la fig. 8.8*b* están representados los diagramas de M_P y $\overline{M}_X$ de los estados real y auxiliar. En el auxiliar está aplicada la fuerza generalizada $X = 1$. La variación de la distancia CD será:

$$\Delta_{XP} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot \frac{3}{4} 2 + \frac{1}{4EJ} \cdot \frac{12{,}5 \cdot 4}{2} 2 = \frac{14{,}5}{EJ} \text{ m}.$$

En el tramo CE, la parábola tiene su origen en el punto C: aquí, la tangente a ésta coincide con el eje del elemento CE (la fuerza transversal $Q_C = \frac{dM}{dz} = 0$). En este caso, el área del diagrama parabólico cóncavo es igual a un tercio del producto de la longitud de la base 2 m por la altura 2 tfm. Su centro de gravedad se encuentra a una distancia que es $^3/_4$ de la longitud de la base a partir de C. Si la tangente a la parábola en el punto extremo no coincide con el eje del elemento (o no es paralela a él), entonces, es necesario descomponer a tal figura en un triángulo y un segmento parabólico.

Para hallar las componentes del desplazamiento Δ_{XP}, aplicamos, por separado, a los puntos C y D, en los nuevos estados auxiliares, las fuerzas $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$. En la fig. 8.8*c* están representados los diagramas de $\overline{M}_1$ y $\overline{M}_2$ debidos a estas fuerzas. Multiplicándolos, respectivamente, por el diagrama de M_P en los tramos EA, EF y EC, obtenemos:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{3EJ}\left(\frac{3 \cdot 10{,}5 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3} 3 \cdot 1{,}125 \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4EJ} \frac{4 \cdot 12{,}5 \cdot 5}{3} + \\ + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot \frac{3}{4} 2 = \frac{34{,}46}{EJ} \text{ m};$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{1}{3EJ}\left(\frac{3 \cdot 10{,}5 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3} 3 \cdot 1{,}125 \frac{3}{2}\right) + \\ + \frac{1}{4EJ} \cdot \frac{4}{6}(-2 \cdot 12{,}5 \cdot 3 + 12{,}5 \cdot 2) = -\frac{19{,}96}{EJ} \text{ m}.$$

Como era de esperar, $\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \Delta_{XP}$.

En el tramo EA, la tangente a la parábola, a nivel del punto E, no es paralela al eje $EA\left(Q_E = \frac{dM}{dz} \neq 0\right)$, por eso, para los primeros sumandos de ambos desplazamientos, el diagrama curvilíneo de M_P fue descompuesto en un triángulo y un segmento parabólico; el área de este último es igual a $^2/_3$ del producto de la longitud de la base (3 m) por la flecha $f = 1{,}125$ tfm. El centro de gravedad del segmento está en la mitad de la base. No es base de esta parábola la recta $E'A$, desde la cual se miden sus ordenadas, sino el eje del elemento EA, al cual éstas son perpendiculares (fig. 8.8*b*).

Problema 8.10. Determinar la variación del ángulo recto, para el pórtico del ejemplo anterior, entre la sección horizontal del mon-

tante en el punto A (la sección $1-1$ en la fig. 8.8a) y la sección vertical de la viga de estructura en el punto F (la sección $2-2$).

Respuesta:

$$\Delta_{ZP} = \frac{12{,}25}{EJ} \text{ rad.}$$

Ejemplo 8.11. Un pórtico con apoyos empotrados está seccionado por el eje de simetría. En el corte están aplicadas las fuerzas de grupo (en parejas) $X = 1$, $Y = 1$ y $Z = 1$ (fig. 8.9a). Hallar

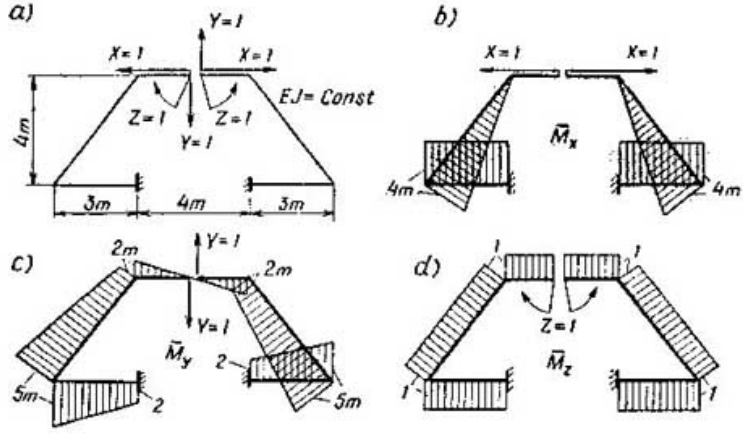


Fig. 8.9

en el corte el alejamiento horizontal de los extremos del pórtico, debido a cada fuerza de grupo por separado.

Resolución

Es costumbre designar por δ los desplazamientos provocados por las fuerzas unitarias. Los alejamientos buscados (los desplazamientos en la dirección de X), debidos a las fuerzas unitarias de grupo X, Y y Z, serán δ_{XX}, δ_{XY} y δ_{XZ}, respectivamente. En la fig. 8.9b, c y d se representan los estados reales debidos a cada fuerza de grupo. Estos dan los diagramas de $\bar{M}_X$, $\bar{M}_Y$ y $\bar{M}_Z$.

Para el conjunto de los tres desplazamientos es necesario tomar un solo estado auxiliar. En el caso dado, coincide con el estado real debido a $X = 1$ (fig. 8.9b). De tal modo, para hallar los desplazamientos requeridos es necesario multiplicar por turno, los diagramas de los estados reales $\bar{M}_X$, $\bar{M}_Y$ y $\bar{M}_Z$ por el de $\bar{M}_X$ del estado auxiliar.

Empleando la simetría del sistema obtenemos que

$$\delta_{XX} = (\bar{M}_X) \cdot (\bar{M}_X) = \frac{2}{EJ}\left(\frac{4 \cdot 5 \cdot 4}{3} + 4 \cdot 3 \cdot 4\right) = \frac{448}{3EJ};$$

$$\delta_{XY} = (\bar{M}_Y) \cdot (\bar{M}_X) = 0,$$

dado que el producto de los diagramas del primer miembro es igual al producto de los de la parte derecha, pero con signo contrario:

$$\delta_{XZ} = (\bar{M}_Z) \cdot (\bar{M}_X) = -\frac{2}{EI}\left(\frac{4 \cdot 5}{2} + 4 \cdot 3\right) 1 = -\frac{44}{EI}.$$

Problema 8.12. Hallar los desplazamientos δ_{YY}, δ_{YX}, δ_{YZ}, δ_{ZZ}, δ_{ZY}, δ_{ZX} del pórtico representado en la fig. 8.9.

Respuesta:

$$\delta_{YY} = \frac{640}{3EI}\ \text{m}; \quad \delta_{YX} = \delta_{XY} = 0;$$

$$\delta_{YZ} = \delta_{ZY} = 0, \quad \delta_{ZZ} = \frac{20}{EI} \cdot \frac{1}{\text{m}}; \quad \delta_{ZX} = \delta_{XZ} = -\frac{44}{EI}.$$

Ejemplo 8.13. Calcular el área del diagrama de las flechas de una viga simplemente apoyada debidas a la carga uniforme q (fig. 8.10*a*).

Resolución

Se puede representar el área del diagrama de las flechas $\Omega_y = \int_0^l y\,dz$ como un trabajo de la carga uniforme $\bar{q} = 1$ del

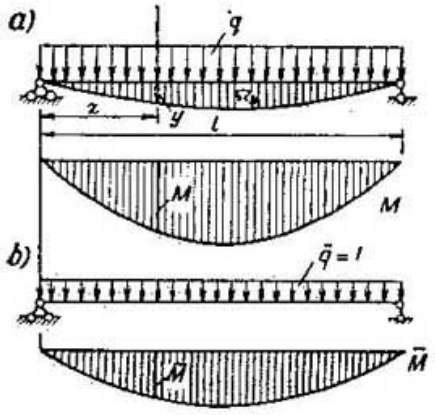


Fig. 8.10

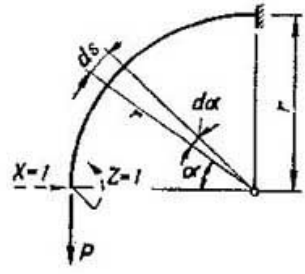


Fig. 8.11

estado auxiliar (fig. 8.10*b*) sobre las flechas del estado real, expresado por medio de las fuerzas internas:

$$\Omega_y = \int_0 q\,dz y = \int_0 \frac{M}{EI}\bar{M}\,dz.$$

Dado que ambos diagramas de M y $\bar{M}$ son curvilíneos, colocamos los valores de las ordenadas $M = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}$ y $\bar{M} = \frac{1}{2} z - \frac{z^2}{2}$ e integramos:

$$\Omega_y = \frac{q}{4EJ} \int_0^l (lz - z^2)^2 \, dz = \frac{ql^5}{120EJ}.$$

Ejemplo 8.14. Una barra curva de pequeña curvatura está circunscrita por el arco de un cuarto de la circunferencia de radio r, y cargada con una fuerza vertical P en el extremo (fig. 8.11). Determinar el desplazamiento vertical Δ_{PP}, el horizontal Δ_{XP} y el ángulo de giro Δ_{ZP} del extremo de la barra. Apreciar la influencia de las fuerzas longitudinal y transversal sobre el valor de los desplazamientos, si la sección de la barra es rectangular con una altura $h = \frac{r}{10}$, el coeficiente de irregularidad de las tensiones tangenciales es $\mu = 1{,}2$ y, el módulo de elasticidad, $G = 0{,}4\,E$.

Resolución

Las fuerzas internas del estado real son:

$$M_P = Pr\,(1 - \cos\alpha); \quad Q_P = -P \operatorname{sen}\alpha; \quad N_P = P\cos\alpha.$$

Para determinar el desplazamiento vertical tomamos el estado auxiliar con la fuerza vertical $\bar{P} = 1$ y hallamos:

$$\bar{M}_P = r\,(1 - \cos\alpha); \quad \bar{Q}_P = -\operatorname{sen}\alpha; \quad \bar{N}_P = \cos\alpha.$$

Por la fórmula (8.1), suponiendo que $ds = r\,d\alpha$, obtenemos que:

$$\Delta_{PP} = \frac{Pr^3}{EJ} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\alpha)^2 \, d\alpha + \mu \frac{Pe}{GF} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\alpha \, d\alpha + \frac{Pr}{EF} \int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha \, d\alpha.$$

Después de la integración hallamos:

$$\Delta_{PP} = \frac{Pr^3}{EJ}\left(\frac{3}{4}\pi - 2\right) + \mu \frac{Pr}{GF} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{Pr}{EF} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Sacando del paréntesis el factor común

$$\Delta_{PP} = \frac{\pi Pr}{4EF}\left[\frac{r^2}{i^2}\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) + \frac{\mu}{0{,}4} + 1\right]$$

y colocando $\mu = 1, 2$, $r = 10h$ e $i^2 = \frac{J}{F} = \frac{h^2}{12}$ (para el rectángulo), obtenemos:

$$\Delta_{PP} = \frac{\pi Pr}{4EF}(544 + 3 + 1).$$

De aquí se ve que la influencia de Q y N sobre el valor Δ_{PP} constituye $\frac{3+1}{544} 100 < 1\%$ en comparación con M.

Para hallar Δ_{XP} y Δ_{ZP} tomamos por separado dos estados auxiliares: el de fuerza horizontal $X = 1$ y el de momento $Z = 1$. Tenemos, respectivamente:

$$\bar{M}_X = r \operatorname{sen} \alpha; \quad \bar{Q}_X = -\cos \alpha; \quad \bar{N}_X = -\operatorname{sen} \alpha;$$
$$\bar{M}_Z = 1; \quad \bar{Q}_Z = 0; \quad \bar{N}_Z = 0.$$

Colocando estos resultados en la fórmula de desplazamientos e integrando, obtenemos:

$$\Delta_{XP} = \frac{Pr^3}{2EJ} + \mu \frac{Pr}{2GF} - \frac{Pr}{2EF}; \quad \Delta_{ZP} = \frac{Pr^2}{EJ}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Considerando los valores dados de G, μ y r, hallamos que

$$\Delta_{XP} = \frac{Pr}{2EF}(1200 + 3 - 1).$$

La influencia de Q y N sobre el valor de los desplazamientos es insignificante.

Problema 8.15. Un arco inarticulado de medio punto posee un corte en la parte media, en donde fueron aplicadas las fuerzas de

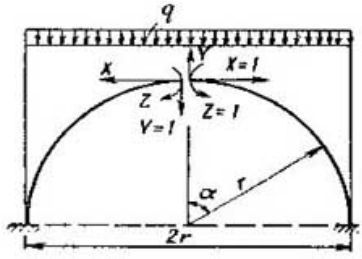


Fig. 8.12

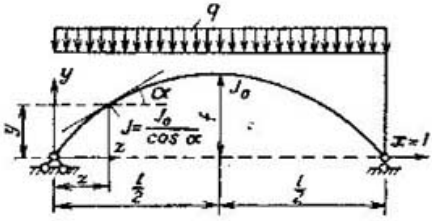


Fig. 8.13

grupo $X = 1$, $Y = 1$ y $Z = 1$ (fig. 8.12). Hallar los desplazamientos Δ_{XP}, Δ_{YP} y Δ_{ZP} debidos a la carga uniforme q a lo largo de todo el arco. La influencia de Q y N no se toma en consideración.

Respuesta:

$$\Delta_{XP} = -\frac{qr^4}{EJ}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right);$$
$$\Delta_{YP} = 0; \quad \Delta_{ZP} = \frac{\pi q r^3}{4EJ}.$$

Problema 8.16. Quitar la carga al arco del problema anterior (fig. 8.12) y hallar los desplazamientos δ_{XX}, δ_{YY}, δ_{ZZ}, δ_{XY}, δ_{XZ} y δ_{YZ} debidos a la flexión causada por las fuerzas en pareja $X = 1$, $Y = 1$ y $Z = 1$.

Respuesta:

$$\delta_{XX} = \frac{2r^3}{EJ}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right); \quad \delta_{YY} = \frac{\pi r^3}{2EJ};$$

$$\delta_{ZZ} = \frac{\pi r}{EJ}; \quad \delta_{XY} = \delta_{YX} = 0;$$

$$\delta_{XZ} = \delta_{ZX} = -\frac{2r^2}{EJ}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \delta_{YZ} = \delta_{ZY} = 0.$$

Ejemplo 8.17. Una barra curva, de pequeña curvatura, sobre dos apoyos y bajo carga uniforme q, está circunscrita por la parábola determinada por la ecuación $y = \frac{4f}{l^2} z(l - z)$ y posee una sección variable con un momento de inercia $J = \frac{J_0}{\cos \alpha}$, donde J_0 es el momento de inercia de la sección media y α, el ángulo de inclinación de la tangente al eje de la barra (fig. 8.13). Hallar el desplazamiento horizontal del apoyo derecho de la barra, sin considerar la influencia de Q y N.

Resolución

Tomamos el estado auxiliar con la fuerza horizontal $X = 1$ sobre el apoyo derecho. El desplazamiento horizontal del apoyo derecho lo calculamos por la fórmula (8.1):

$$\Delta_{XP} = \int_0 \frac{M_P \bar{M}_X}{EJ} ds.$$

Aquí efectuamos la sustitución

$$M_P = \frac{q}{2} z(l - z); \quad \bar{M}_X = 1 y = \frac{4f}{l^2} z(l - z);$$

$$ds = \frac{dz}{\cos \alpha} \text{ o } \frac{ds}{EJ} = \frac{dz}{EJ_0}$$

y realizamos la integración

$$\Delta_{XP} = \frac{2qf}{l^2 EJ_0} \int_0^l z^2 (l - z)^2 dz = \frac{ql^3 f}{15EJ_0}.$$

Problema 8.18. Hallar la flecha Δ_{YP} en la parte media y el ángulo de giro Δ_{ZP} sobre el apoyo izquierdo debidos a la carga q en la barra curva representada en la fig. 8.13.

Respuesta:

$$\Delta_{YP} = \frac{5ql^4}{384EJ_0} \text{ y } \Delta_{ZP} = \frac{ql^3}{24EJ_0}$$

(en el sentido de las agujas del reloj) se obtienen como en una viga simplemente apoyada.

Ejemplo 8.19. Una armadura (fig. 8.14*a*) está cargada con tres fuerzas iguales P. La rigidez EF de todas las barras de la armadura es igual. Determinar:

1) Δ_{1P}, el desplazamiento vertical del nudo *1*;
2) Δ_{2P}, el ángulo de giro de la barra *2-3*;
3) Δ_{3P}, la variación del ángulo entre las barras *1-2* y *3-4*.

Resolución

Según (8.4), los desplazamientos en la armadura, debidos a la carga, se determinan por la fórmula:

$$\Delta_{kP} = \sum \bar{N}_k \frac{N_P}{EF} l.$$

Para esto, en todas las barras de la armadura se hallan las fuerzas axiles N_P del estado real y las $\bar{N}_k$ de los estados auxiliares.

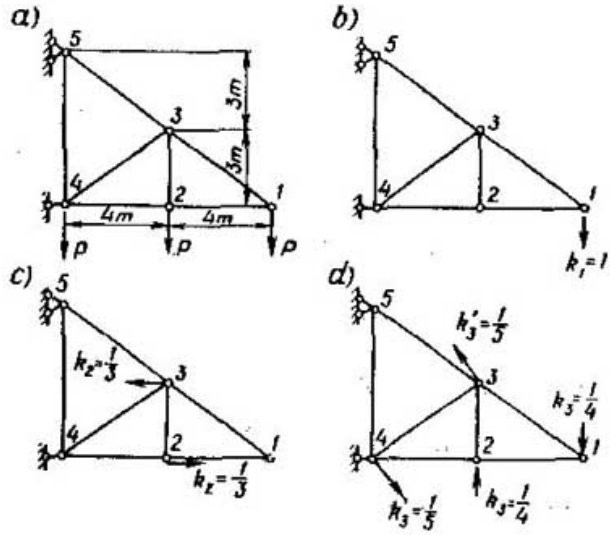


Fig. 8.14

En la fig. 8.14*b*—*d* están representados los estados auxiliares que corresponden a los tres desplazamientos buscados: 1) en la dirección del desplazamiento Δ_{1P} está aplicada la fuerza $K_1 = 1$; 2) en la dirección del ángulo de giro de la barra (Δ_{2P}) está aplicado el momento $M_2 = 1$ realizado por el par de fuerzas $K_2 = \frac{1}{l_{2\text{-}3}}$ sobre los extremos de la barra; 3) en la dirección de la variación del ángulo entre las barras (Δ_{3P}) están aplicados dos momentos recíprocamente contrarios $M_3 = 1$, realizados por los pares de

fuerzas

$$K_3 = \frac{1}{l_{1\text{-}2}} \text{ y } K_3' = \frac{1}{l_{3\text{-}4}}.$$

Las fuerzas axiles encontradas N_P, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ y $\bar{N}_3$, debidas a las cargas de cada estado, vienen reseñadas en la tabla 8.1. Tomando para cada barra los productos $\bar{N}\frac{N_P}{EF}l$ y sumándolos por todas las barras de la armadura, obtenemos los desplazamientos respectivos. Es conveniente efectuar esto en forma de tabla.

Los signos más, en Δ_{1P} y Δ_{3P}, indican que el nudo *1* (fig. 8.14*a*) se desplazó hacia abajo y el ángulo *3-4-1* se incrementó, lo que coincide con la dirección de las fuerzas K_1 y K_3. El signo menos, en Δ_{2P} indica que la barra *2-3* no giró en sentido contrario, sino, a favor de las agujas del reloj, esto es, Δ_{2P} no coincide con la dirección de la fuerza K_2.

Problema 8.20. Determinar el ángulo de giro de la barra *2-4* (Δ_{1P}) y la variación del ángulo *1-3-4* (Δ_{2P}) en la armadura del ejemplo anterior (fig. 8.14*a*).

Respuesta:

$\Delta_{1P} = \frac{71}{36} \cdot \frac{P}{EF}$, en el sentido de las agujas del roloj:

$\Delta_{2P} = \frac{14}{3} \cdot \frac{P}{EF}$, hacia el lado de decrecimiento.

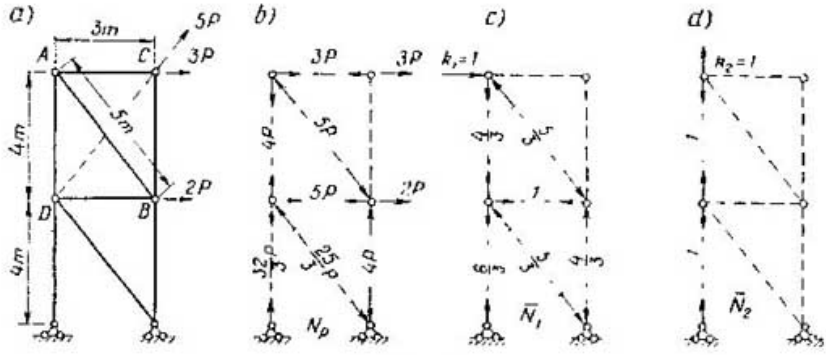


Fig. 8.15

Ejemplo 8.21. En la fig. 8.15*a* se dan la carga de una armadura y las longitudes de sus barras de sección constante. Hallar el desplazamiento completo del ángulo *A*.

Resolución

El desplazamiento completo del punto *A* da proyecciones sobre las direcciones horizontal Δ_{1P} y vertical Δ_{2P}. Primero determinamos estas componentes del desplazamiento completo.

Calculamos las fuerzas longitudinales del estado real y de dos estados auxiliares y las escribimos sobre los esquemas de la armadura (fig. 8.15*b*—*d*). Componiendo las sumas de los productos $\frac{l}{EF} N_P \bar{N} l$ por todas las barras y teniendo en cuenta los signos, obtenemos:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EF}\left(4P\,\frac{4}{3}\,4 + 5P\,\frac{5}{3}\,5 + 5P \cdot 1 \cdot 3 + \frac{32}{3}\,P\,\frac{8}{3}\,4 + \right.$$
$$\left. + \frac{25}{3}\,P\,\frac{5}{3}\,5 + 4P\,\frac{4}{3}\,4\right) = \frac{2543}{9} \cdot \frac{P}{EF};$$
$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EF}\left(4P \cdot 1 \cdot 4 + \frac{32}{3}\,P \cdot 1 \cdot 4\right) = \frac{176}{3} \cdot \frac{P}{EF}.$$

Tabla 8.1

Barra	l en m	N_P	$\bar{N}_1$	$\bar{N}_1 \frac{N_P}{EF} l$	$\bar{N}_2$	$\bar{N}_2 \frac{N_P}{EF} l$	$\bar{N}_3$	$\bar{N}_3 \frac{N_P}{EF} l$
1-2	4	$-\frac{4}{3}P$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{64}{9}\frac{P}{EF}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{16}{9}\frac{P}{EF}$
1-3	5	$\frac{5}{3}P$	$\frac{5}{3}$	$\frac{125}{9}\frac{P}{EF}$	0	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{125}{36}\frac{P}{EF}$
2-3	3	P	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}\frac{P}{EF}$
2-4	4	$-\frac{4}{3}P$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{64}{9}\frac{P}{EF}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{9}\frac{P}{EF}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{16}{9}\frac{P}{EF}$
3-4	5	$-\frac{5}{6}P$	0	0	$-\frac{5}{24}$	$\frac{125}{144}\frac{P}{EF}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{100}{90}\frac{P}{EF}$
3-5	5	$\frac{5}{2}P$	$\frac{5}{3}$	$\frac{125}{6}\frac{P}{EF}$	$-\frac{5}{24}$	$-\frac{125}{48}\frac{P}{EF}$	0	0
4-5	6	$\frac{3}{2}P$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{18}{16}\frac{P}{EF}$	0	0
$\Delta_{1P} = \sum \bar{N}_1 \frac{N_P}{EF} l = \frac{881}{18} \cdot \frac{P}{EF}$					$\Delta_{2P} = -\frac{43}{18} \cdot \frac{P}{EF}$		$\Delta_{3P} = \frac{31}{6}\frac{P}{EF}$	

El desplazamiento pleno del nudo A es

$$\Delta_{AP} = \sqrt{\Delta_{1P}^2 + \Delta_{2P}^2} = \frac{P}{9EF}\sqrt{2543^2 + 528^2} = \frac{2597}{9} \cdot \frac{P}{EF}.$$

Problema 8.22. Hallar el ángulo de giro Δ_{ZP} de la barra AB de la armadura, representada en la fig. 8.15*a*.

Respuesta: $\Delta_{ZP} = \frac{284}{9} \cdot \frac{P}{EF}$, en el sentido de las agujas del reloj.

Problema 8.23. La armadura se halla bajo la fuerza $5P$ por la dirección de la diagonal CD (el punteado de la fig. 8.15a). Determinar el desplazamiento del nudo C.

Respuesta: $\Delta_{CP} = 208 \frac{P}{EF}$, hacia la derecha.

Ejemplo 8.24. En la armadura semienriostrada se han calculado y anotado sobre las barras las tensiones $\sigma_P = \frac{N_P}{F}$ Kg/cm^2 debidas a la carga (fig. 8.16a). Determinar el ángulo recíproco de giro de las barras *1-2* y el alejamiento del punto *3*.

Resolución

Calculamos los esfuerzos en las barras debidos a las fuerzas unitarias de los estados auxiliares y los escribimos en los diagramas (fig. 8.16b, c). Las barras, cuyos esfuerzos tienen valor cero, están representadas en punteado.

Componiendo las sumas $\sum \bar{N}_k \frac{N_P}{EF} l = \sum \bar{N}_k \frac{\sigma_P}{E} l$ y empleando la simetría del sistema, obtenemos:

$$\Delta_{1P} = 2\left[1 \cdot 1000 \frac{3}{4} + \frac{5}{6}(1200 + 600)\frac{5}{4} - 1 \cdot 500 \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4}\right] \frac{l}{E} = \frac{4500}{E};$$

$$\Delta_{2P} = 2\left[\frac{5}{8}(1600 - 1200)\frac{5}{4} + \frac{3}{8}(1000 + 600)\frac{3}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(1600 - 1000)\right] \frac{d}{E} = \frac{1450d}{E}.$$

Problema 8.25. Determinar el desplazamiento vertical del apoyo B en el pórtico, si la temperatura varió desde 0 hasta $+20°$ C por dentro y hasta $-40°$ C por afuera del pórtico; el coeficiente de dilatación lineal es $\beta = 12 \cdot 10^{-6}$.

La sección y las dimensiones del pórtico se dan en la fig. 8.17a.

Resolución

El desplazamiento debido a la temperatura, según (8.2), para una altura constante h de la sección de la barra, es

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\beta}{h}\left[(t_1 h_2 + t_2 h_1)\omega_{\bar{N}} + (t_2 - t_1)\omega_{\bar{M}}\right].$$

Aquí tenemos $t_1 h_2 + t_2 h_1 = 20 \cdot 26 - 40 \cdot 34 = -840$ grad·cm y $t_2 - t_1 = -40 - 20 = -60°$ C. Los diagramas de los estados real y auxiliar están representados en la fig. 8.17b, c, e, f. Empleándolos, hallamos el desplazamiento

$$\Delta_{kt} = \frac{12 \cdot 10^{-6}}{60}\left[840\left(\frac{17}{10}500 + \frac{3}{2}300\right) - \right.$$

$$\left. - 60\left(\frac{300 \cdot 500}{2} + \frac{300 \cdot 300}{2}\right)\right] = -1{,}22 \text{ cm},$$

que está dirigido hacia arriba.

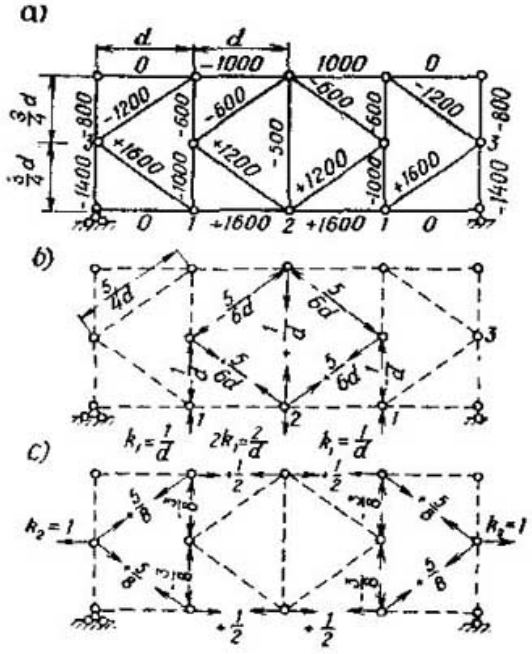


Fig. 8.16

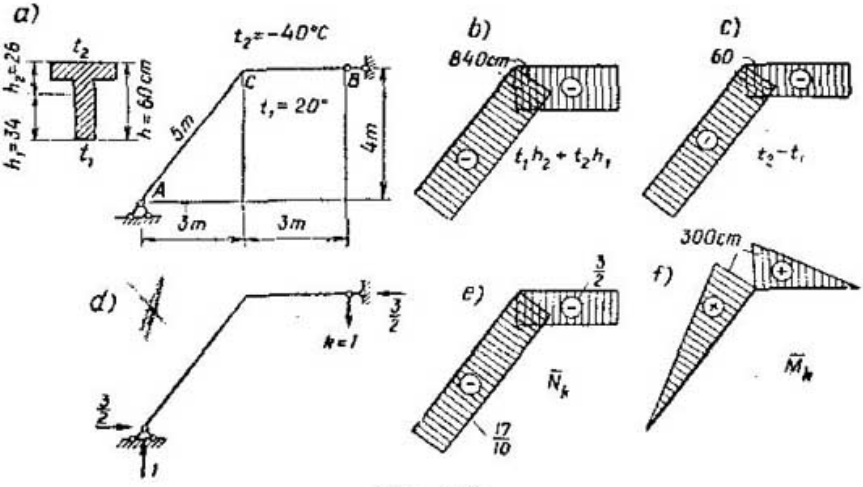


Fig. 8.17

Problema 8.26. Calcular el ángulo de giro Δ_{zt} de la sección A y el desplazamiento completo Δ_{Ct} del nudo C, debidos a una variación de temperatura en el pórtico representado en la fig. 8.17*a*.

Respuesta: $\Delta_{zt} = 0{,}028$, en el sentido de las agujas del reloj;

$$\Delta_{Ct} = \sqrt{\Delta_{XC}^2 + \Delta_{YC}^2} = 0{,}151 \text{ cm, hacia abajo y hacia la derecha}$$

Problema 8.27. Calcular el desplazamiento vertical del apoyo B y el ángulo de giro de la sección A del pórtico (fig. 8.17*a*) en dos casos:

a) al variar la temperatura sólo por dentro desde 0° hasta $t_1 = 20°$ C; $t_2 = 0$;

b) al variar regularmente la temperatura por dentro y por fuera $t_1 = t_2 = 20°$ C.

Ejemplo 8.28. Hallar el desplazamiento completo del nudo *3* de la armadura (fig. 8.18*a*) si se calientan a $t°$: a) sólo la diagonal A-*1* y b) todas las barras de la armadura.

Resolución

Los desplazamientos en la armadura, debidos a la temperatura, se determinan por la fórmula (8.5). La suma se extiende sólo a las barras en las cuales ocurre una variación de longitud debido a la temperatura.

Para el desplazamiento completo, cuya dirección no se conoce con antelación, al principio hallamos los desplazamientos vertical y horizontal. Por eso elegimos dos estados auxiliares con las fuerzas $Y = 1$ y $X = 1$ y calculamos los esfuerzos originados por ellas en las barras (fig. 8.18*b* y *c*).

a) Debido al calentamiento de una sola diagonal A-*1* tenemos:

$$\Delta_{Yt} = \frac{5}{6}\beta t \cdot 5 = \frac{25}{6}\beta t \text{ m};$$

$$\Delta_{Xt} = -\frac{5}{6}\beta t \cdot 5 = -\frac{25}{6}\beta t \text{ m}.$$

El desplazamiento completo del nudo *3* es

$$\Delta_{3t} = \sqrt{\Delta_{Yt}^2 + \Delta_{Xt}^2} = \frac{25}{3\sqrt{2}}\beta t \text{ m}$$

y por la barra *3*-*1* está dirigido hacia abajo y hacia la izquierda.

b) Debido al calentamiento de todas las barras de la armadura

$\Delta_{Yt} = 0$, por simetría:

$$\Delta_{Xt} = \Delta_{3t} = 2\left(\frac{7}{6}4 - \frac{5}{6}5 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\beta t = 4\beta t \text{ m}$$

y está dirigido hacia la derecha.

Problema 8.29. Calcular el ángulo de giro Δ_{z1} de la barra *1-3* (fig. 8.18), si la temperatura de las barras perimétricos *A-2-3-1-B* varió desde 0 hasta —10° C y, la de las diagonales *A-1* y *B-2*, hasta +20° C. El coeficiente de dilatación lineal es $\beta = 117 \cdot 10^{-7}$.

Respuesta: $\Delta_{z1} = 0{,}00183$ rad en sentido contrario a las agujas del reloj.

Ejemplo 8.30. El apoyo izquierdo de un pórtico triarticulado recibió un desplazamiento horizontal hacia la izquierda, en un

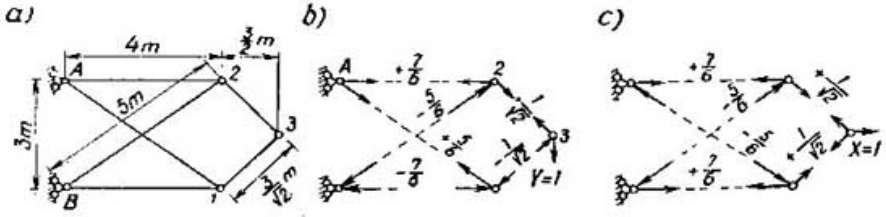


Fig. 8.18

valor $\Delta_1 = 6$ cm (fig. 8.19*a*). Calcular el desplazamiento completo de la articulación *C* y el giro recíproco de las secciones adyacentes a ésta.

Resolución

El desplazamiento debido a la dislocación de los apoyos se determina por la fórmula (8.3):

$$\Delta_{k\Delta} = -\sum \bar{R}_{mk}\Delta_m.$$

Para los desplazamientos buscados elegimos tres estados auxiliares: con las fuerzas $X = 1$ e $Y = 1$ y el momento generalizado $Z = 1$. En cada uno de estos estados determinamos las reacciones $\bar{R}$ por la dirección de la dislocación Δ_1 (fig. 8.19*b*—*d*).

Las componentes horizontal y vertical del desplazamiento completo son:

$$\Delta_{x\Delta} = -\bar{R}_{1X}\Delta_1 = -\left(-\frac{1}{2}6\right) = 3 \text{ cm};$$

$$\Delta_{Y\Delta} = -\bar{R}_{1Y}\Delta_1 = -\left(-\frac{1}{3}6\right) = 2 \text{ cm}.$$

Las reacciones $\bar{R}_{1X}$ y $\bar{R}_{1Y}$ están dirigidas en contra de la dislocación y realizan sobre esta un trabajo negativo. Los desplazamientos $\Delta_{X\Delta}$ y $\Delta_{Y\Delta}$ resultaron positivos: coinciden con las direcciones *X* e *Y*.

Hallamos el desplazamiento completo de la articulación *C*:

$$\Delta_{C1} = \sqrt{\Delta_{X1}^2 + \Delta_{Y1}^2} = \sqrt{13} \text{ cm}.$$

El ángulo reciproco de la sección C es

$$\Delta_{Z1} = -\bar{R}_{1Z}\Delta_1 = -\frac{1}{h}\Delta_1 = -0{,}01 \text{ rad.}$$

El está dirigido en contra de Z y se abre de abajo.

Problema 8.31. Hallar los desplazamientos vertical y horizontal de la articulación C (fig. 8.19), debidos al desplazamiento hacia abajo del apoyo izquierdo, en $\Delta_2 = 4$ cm.

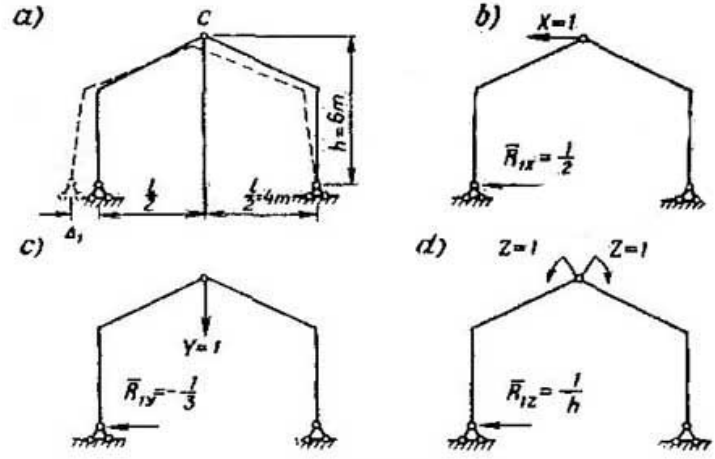


Fig. 8.19

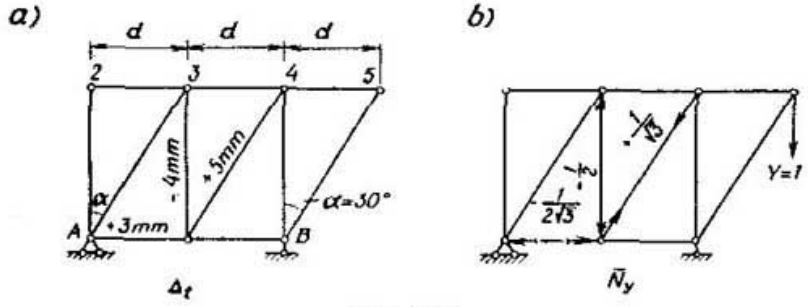


Fig. 8.20

Respuesta: $\Delta_{Y\Delta} = 2$ cm, hacia abajo; $\Delta_{X\Delta} = 3$ cm, hacia la izquierda.

Ejemplo 8.32. En una armadura (fig. 8.20*a*), las barras *1-A* y *1-4* se alargaron en 3 y 5 mm, respectivamente, y la barra *1-3* se acortó en 4 mm. Determinar el desplazamiento vertical del nudo *5*, debido a los alargamientos forzosos Δs_m de las barras indicadas.

Resolución

En el estado real se dan los alargamientos forzosos de las barras (fig. 8.20*a*). Determinamos en dichas barras (vínculos) las reacciones $\bar{R}_{mY} = \bar{N}_Y$ del estado auxiliar debidas a la fuerza $Y = 1$ (fig. 8.20*b*). Por la fórmula (8.3), en la cual el signo menos del segundo miembro está sustituido por el más, encontramos el desplazamiento vertical del nudo *5*:

$$\Delta_{Ym} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}3 + \frac{1}{2}4 + \frac{1}{\sqrt{3}}5 = 4{,}02 \text{ mm}.$$

Problema 8.33. Hallar el desplazamiento horizontal del punto *2* y el ángulo de giro de la barra *3-4*, debidos a los alargamientos forzosos de las barras de la armadura (fig. 8.20*a*).

Respuesta: $\Delta_{Xm} = 9{,}96$ mm, hacia la derecha; $\Delta_{Zm} = \frac{5{,}76}{d}$, en contra de las agujas del reloj.

CAPÍTULO 9 * FORMACION Y CALCULO DE SISTEMAS ESPACIALES ISOSTATICOS

§ 9.1. FORMACION Y ANALISIS CINEMATICO DE LOS SISTEMAS ESPACIALES. A los elementos de un sistema espacial ligados se los llama cuerpos. Cada cuerpo *C* por separado es geométricamente invariante y, en el espacio, posee seis grados de libertad. A un nudo suelto se lo puede examinar como cuerpo degenerado que tiene tres grados de libertad.

Los cuerpos se unen entre sí por medio de vínculos. Hay diversos tipos de éstos en los sistemas espaciales. Uno, básico (elemental), es la barra *B*, con articulaciones esféricas en los extremos, capaz de unir simultáneamente sólo dos cuerpos o nudos. A los otros vínculos se los puede considerar como una combinación de vínculos elementales. Así, por ejemplo, la articulación esférica *A* es equivalente a tres y, la soldadura, a seis vínculos elementales (para una distribución correcta de ellos). El vínculo que une varios cuerpos se llama múltiple. Su multiplicidad es menor al número de cuerpos ligados, en una unidad.

Los sistemas espaciales, al igual que los planos, se dividen en invariantes, variantes y de variación instantánea. Se puede determinar el grado de libertad de un sistema espacial compuesto de cuerpos, nudos y vínculos, por las fórmulas:

para los sistemas sujetos a la tierra

$$V = (6C + 3N) - (V^* + 3A + 6S) - V_{ap}; \qquad (9.1)$$

para los sistemas libres

$$V = (6C + 3N) - (V^* + 3A + 6S) = 6; \qquad (9.2)$$

donde V^* es el número de vínculos que fueron reducidos a elementales (aparte de las articulaciones esféricas y soldaduras).

Al igual que para los sistemas planos, el criterio suficiente de invariabilidad puede ser revelado recurriendo sólo a un análisis cinemático del sistema que, en los casos simples, se basa en los principios de formación de los sistemas espaciales y, en los más complicados, en criterios particulares desprendidos de los métodos generales de determinación de las reacciones de vínculos (vease el capítulo 2).

Los casos básicos de la formación de los sistemas espaciales geométricamente invariantes son los siguientes.

1. Dos cuerpos unidos por seis barras forman un sistema invariante si todas las seis barras no son interceptadas por una misma recta, o tres de ellas, pertenecientes a un mismo plano, no se cortan en un mismo punto. En caso contrario, los sistemas formados son de variación instantánea, o bien, variantes con vinculos superfluos. En este caso, la recta que corta las seis barras es un eje de rotación instantáneo o constante.

2. La unión de un nudo a un cuerpo por medio de una "triada", tres barras con articulaciones esféricas en los extremos no pertenecientes a un mismo plano, forma un sistema espacial invariante.

Examinemos varios ejemplos de un análisis cinemático de los sistemas espaciales.

Ejemplo 9.1. El sistema representado en la fig. 9.1*a* es invariante, y representa el sistema espacial, lineal articulado, elemen-

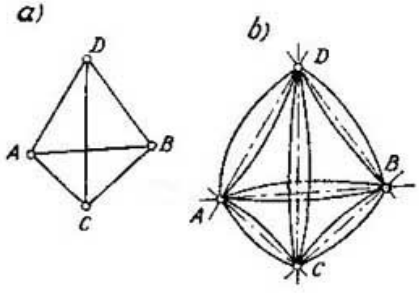


Fig. 9.1

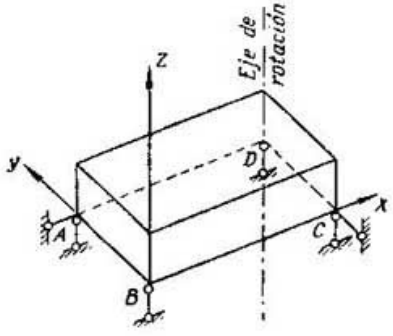


Fig. 9.2

tal. Aquí, $N = 4$, $B = 6$ y, por consiguiente, según (9.2), $V = 3 \cdot 4 - 6 - 6 = 0$. Se puede considerar que el sistema dado está formado mediante la sujeción, con tríada, del nudo D a un cuerpo que es el disco ABC.

Ejemplo 9.2. El sistema representado en la fig. 9.1*b* se distingue del precedente porque entre las articulaciones no se encuentran barras sino cuerpos. Aquí, $C = 6$, $A = 4 \cdot 2 = 8$ (cada articulación es de doble multiplicidad o bimúltiple) y, por consiguiente, según (9.2), $V = 6 \cdot 6 - 3 \cdot 8 - 6 = 6$. El sistema dado posee seis grados de libertad, ya que cada uno de los seis cuerpos puede rotar libremente alrededor de su eje, esto es, del eje que pasa por la articulación.

Ejemplo 9.3. El sistema representado en la fig. 9.2 es variante, a pesar de que la condición (9.1) se cumple ($V = 6 - 6 = 0$). Aquí, cuatro barras de apoyo son paralelas entre sí, o sea, se cortan en un mismo punto situado en el infinito. Por éste y el punto D, de intersección de las dos barras de apoyo restantes, se puede trazar una recta, la cual va a ser eje de rotación.

A fin de transformar al sistema dado en uno geométricamente invariante, es necesario "trasladar" una de las barras verticales (por ejemplo, la B) a un plano horizontal. Señalemos que en el plano horizontal la barra de apoyo B puede adoptar cualquier posición, con excepción de una: no deberá pasar por el punto D, ya que en el último caso, tres barras pertenecientes a un mismo plano se cortarán en este punto y, de tal modo, el vertical que pasa por el punto D será un eje de rotación instantáneo.

Ejemplo 9.4. Determinemos el grado de variabilidad del sistema representado en la fig. 9.3. Aquí, el cuerpo en forma de

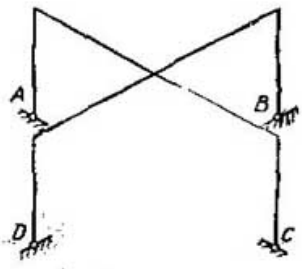


Fig. 9.3

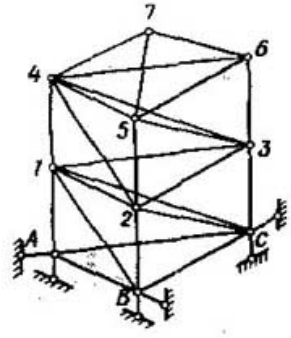


Fig. 9.4

pórtico espacial, con el contorno no cerrado, está fijado a la tierra por medio de cuatro articulaciones esféricas. Según (9.1), $V = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -6$, esto es, el sistema posee seis vínculos superfluos que pueden ser eliminados para "transformar" al sistema dado en isostático. Sin embargo, no cualesquiera seis vínculos elementales están en condiciones de ser eliminadas. Por ejemplo, para eliminar dos articulaciones esféricas de apoyo C y D, todos los seis vínculos de apoyo que quedan, serían atravesados por una sola recta AB y, por consiguiente, el sistema quedaría variante.

Ejemplo 9.5. Según (9.1), la variabilidad del sistema representado en la fig. 9.4 es igual a cero:

$$N = 10; \quad B = 24; \quad V_{ap} = 6; \quad V = 3 \cdot 10 - 24 - 6 = 0.$$

Para el análisis cinemático apliquemos método de eliminaciones sucesivas de tríadas (análogo al de eliminaciones de diadas en

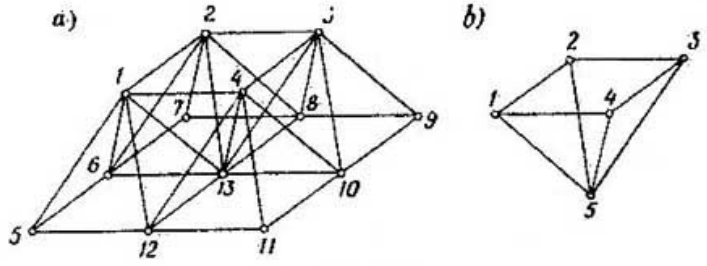


Fig. 9.5

los sistemas planos). Al principio eliminamos el nudo *7* con las tres barras *4-7*, *5-7* y *6-7*. Luego, eliminamos el *6* con las tres barras *4-6*, *5-6* y *3-6*; el *5* con las tres barras *3-5*, *4-5* y *2-5* y, el nudo *4* con las tres barras *1-4*, *2-4* y *3-4*. Queda una armadura de un piso. Análogamente a lo anterior, eliminamos los nudos *3*, *2* y *1*. Como resultado, obtenemos el disco *ABC* (un cuerpo), sujeto a la tierra con seis barras de apoyo, tres de las cuales se hallan en el plano del disco y no se cortan entre sí y, las otras tres son perpendiculares al disco, no están en un mismo plano. Por consiguiente, el sistema es geométricamente invariante.

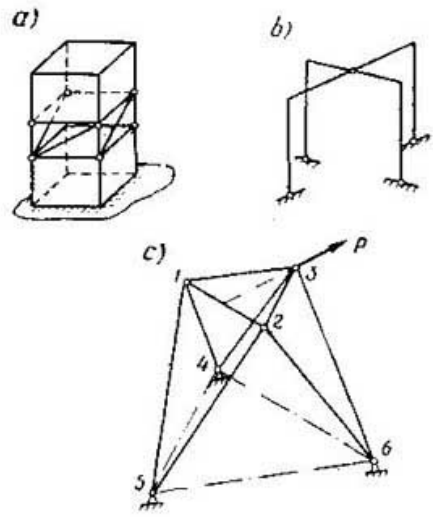


Fig. 9.6

Para un análisis cinemático de los sistemas lineales articulados, espaciales, es útil conocer la siguiente regla (teorema de Cauchy): si un sistema lineal articulado representa en sí un poliedro convexo, en el cual cada cara es invariante en su plano, entonces, todo el sistema es geométricamente invariante. Tal sistema se llama reticular. El ejemplo más simple de él es la armadura elemental (tetraedro) examinada arriba (véase la fig. 9.1*a*).

Ejemplo 9.6. El sistema representado en la fig. 9.5*a* tiene $N = 13$, $B = 32$. Por consiguiente, según (9.2), $V = 1$, es decir, el sistema es univariante. Demostremos esto partiendo del análisis directo de la estructura geométrica, basándonos en el método de eliminaciones sucesivas de triadas. Al eliminar al principio el nudo *5* con tres barras *1-5*, *6-5* y *12-5* (y en forma análoga, los nudos *7*, *9* y *11*) y luego, el *12*, con las tres barras *1-12*, *4-12* y *13-12* (y en forma análoga, los nudos *6*, *8* y *10*), obtenemos una armadura lineal articulada pentaédrica (fig. 9.5*b*), en la cual cuatro caras representan triángulos invariantes y la quinta, un mecanismo de cuatro eslabones. Por consiguiente, toda la armadura espacial será monovariante.

Para que el sistema dado "se haga" invariante, es suficiente introducir en la armadura plana *1-2-3-4* la diagonal *1-3* (o la *2-4*).

Problemas 9.7 — 9.9. Se exige analizar los sistemas espaciales representados en la fig. 9.6*a—c*.

Respuestas:

a) el sistema es geométricamente invariante y no posee vínculos superfluos;

b) según (9.1), $V = 3$, no obstante, el sistema posee cuatro grados de variabilidad, dado que aquí una barra de apoyo es superflua;

c) el sistema es geométricamente invariante y no posee vínculos superfluos.

§ 9.2. CALCULO DE SISTEMAS ESPACIALES ISOSTATICOS.

Los métodos para determinar la reacción de los vínculos en los sistemas espaciales, en principio, son los mismos que para los sistemas planos (véase el capítulo 2). Con más frecuencia se emplean los métodos estáticos (para el cálculo de sistemas simples) y el de sustitución de vínculos (para el cálculo de sistemas complejos)

Para una determinación analítica de las reacciones de los vínculos se emplean las seis condiciones de la estática que, en el caso general, poseen la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum X = 0; & \sum M_X = 0; \\ \sum Y = 0; & \sum M_Y = 0; \\ \sum Z = 0; & \sum M_Z = 0. \end{array}\right\} \qquad (9.3)$$

Las reacciones de los vínculos se pueden hallar también por el procedimiento de "la recta de momento" (análogo al del "punto de momento" en los sistemas planos), de acuerdo al cual se resuelven las seis ecuaciones de tipo

$$\sum M_{m-m} = 0, \qquad (9.4)$$

donde cada una contiene solamente una de las reacciones incógnitas.

Ejemplo 9.10. Determinemos las reacciones de apoyo del sistema representado en la fig. 9.7. Elegidos los ejes de coordenadas

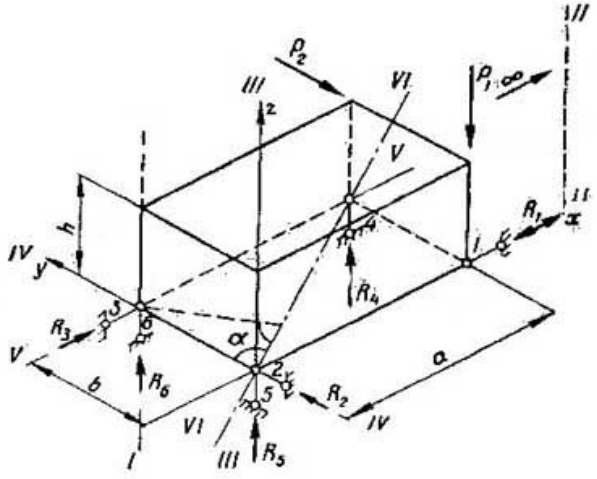


Fig. 9.7

y dirigidas las reacciones de apoyo "desde la tierra hasta el cuerpo", según (9.4), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X = R_3 - R_1 = 0; \quad \sum Y = R_2 - P_2 = 0;\\ &\sum Z = R_4 + R_5 + R_6 - P_1 = 0;\\ &\sum M_x = R_4 b + R_6 b + P_2 h = 0;\\ &\sum M_y = -R_4 a + P_1 a = 0;\\ &\sum M_z = -R_3 b - P_2 a = 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo estas ecuaciones conjuntamente, obtenemos que

$$R_1 = R_3 = -P_2 \frac{a}{b}; \quad R_2 = P_2; \quad R_4 = P_1;$$

$$R_6 = -R_5 = -\left(P_1 + P_2 \frac{h}{b}\right).$$

Hallemos ahora estas reacciones partiendo de una determinación previa de la posición de las rectas de momento $m - m$ (veáse la fig. 9.7). La recta de momento $I - I$ pasa por el punto de intersección de las dos rectas restantes *2* y *3* pertenecientes también al mismo plano que la barra *1*, y es paralela a las barras *4*, *5* y *6*, esto es, corta a todas las cinco barras restantes. De este

modo, $\sum M_{I\text{-}I} = R_1 b + P_2 a = 0$ y, por consiguiente, $R_1 = P_2 \frac{a}{b}$. De manera análoga encontramos la posición de la recta de momento *III — III* que corta las barras *1*, *2*, *4*, *5* y *6*. En el caso dado, el eje *III — III* coincide con el *z*. Partiendo de la ecuación $\Sigma M_{III-III} = R_3 b + P_2 a = 0$, obtenemos que: $R_3 = -P_2 \frac{a}{b}$.

Dado que la recta de momento *II — II* deberá cortar a las cinco barras restantes, es decir, ser paralela a las *4*, *5* y *6* y, durante esto, pasar por el punto de intersección de las paralelas *1* y *3*, estará alejada, por consiguiente, al infinito, en el plano *xOz*. En este caso, la condición de igualdad a cero de los momentos de todas las fuerzas, con respecto al eje que se encuentra en el infinito, pasa a ser la de igualdad a cero de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje perpendicular al plano, donde el eje *II — II* está alejado al infinito. De este modo, de la condición $\Sigma Y = R_2 - P_2 = 0$, obtenemos que $R_2 = P_2$.

Todas las rectas de momento de las barras verticales pasarán por el plano horizontal. En correspondencia con la fig. 9.7, obtenemos:

$$\sum M_{IV\text{-}IV} = R_4 a - P_1 a = 0, \quad \text{de donde} \quad R_4 = P_1;$$

$$\sum M_{V\text{-}V} = R_5 b - P_1 b + P_2 h = 0, \quad \text{de donde} \quad R_5 = P_1 + P_2 \frac{h}{b};$$

$$\sum M_{VI\text{-}VI} = R_6 b \operatorname{sen} \alpha + P_2 h \operatorname{sen} \alpha + P_1 b \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

de donde

$$R_6 = -P_1 - P_2 \frac{h}{b}.$$

Como era de esperar, los valores de las reacciones de apoyo coincidieron con los hallados anteriormente.

Para el cálculo de sistemas lineales articulados, espaciales, además del método general de secciones, se emplea ampliamente su variante, el de recorte de nudos cuya esencia consiste en lo siguiente. Si a un nudo cargado concurren no más de tres barras, las reacciones de las cuales son desconocidas, éstas pueden ser halladas partiendo de las condiciones de equilibrio de las proyecciones de todas las fuerzas que concurren al nudo dado:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0. \tag{9.5}$$

Si el nudo al cual concurren las tres barras no está cargado, los esfuerzos en éstas son notoriamente iguales a cero y se dice que las mismas no trabajan que están "en cero" (son "nulas"). Al igual que en el caso de las armaduras planas, antes del cálculo de un sistema es necesario establecer siempre, cuáles de las barras están "en cero".

Ejemplo 9.11. Determinemos los esfuerzos en las barras del sistema representado en la fig. 9.8*a*. A este sistema lo podemos

considerar como reticular, dado que el papel de las barras de cierre *4-5*, *5-6* y *4-6* lo juega la propia "tierra". Por lo tanto, no hay necesidad de demostrar que el sistema es geométricamente invariante e isostático.

Establecemos ante todo que tres barras, *1-2*, *2-3* y *2-5*, estan "en cero", dado que solamente éstas concurren al nudo sin carga *2*. Al nudo *3* no cargado, concurren cuatro barras, pero por cuanto una de ellas (la *2-3*) está "en cero", entonces, las tres restantes (las *1-3*, *5-3* y *6-3*) están también en cero. Al proseguir el cálculo podemos, mentalmente, eliminar estas barras (fig. 9.8*b*).

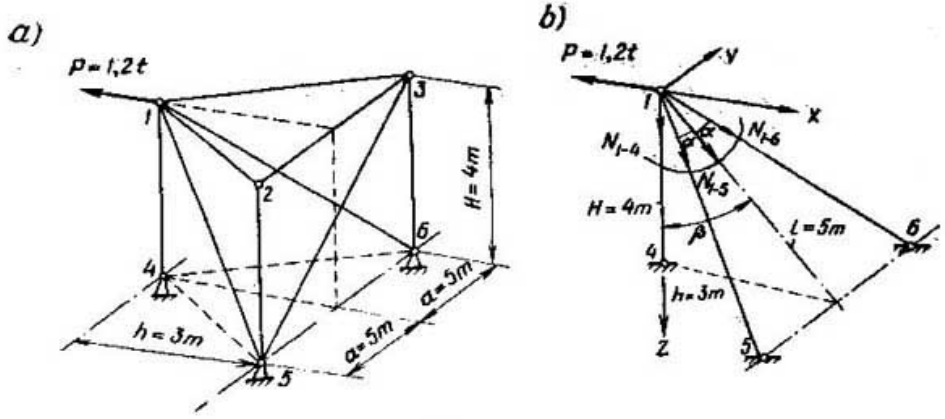


Fig. 9.8

Componemos las ecuaciones de equilibrio (9.5) de las fuerzas que concurren al nudo *1* recortado, en concordancia con el sistema de coordenadas elegido:

$$\left.\begin{aligned} \sum X &= -P + N_{1\text{-}5}\cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta + N_{1\text{-}6}\cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta = 0;\\ \sum Y &= -N_{1\text{-}5}\operatorname{sen}\alpha + N_{1\text{-}6}\operatorname{sen}\alpha = 0;\\ \sum Z &= N_{1\text{-}4} + N_{1\text{-}5}\cos\alpha\cos\beta + N_{1\text{-}6}\cos\alpha\cos\beta = 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones en forma conjunta y considerando que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$ y $\cos\beta = \frac{4}{5}$, obtenemos que

$$N_{1\text{-}5} = N_{1\text{-}6} = \frac{P}{2\cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta} = \frac{1{,}2}{2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5}} = \sqrt{2}\ \text{tf},$$

$$N_{1\text{-}4} = -2N_{1\text{-}5}\cos\alpha\cos\beta = -2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5} = -1{,}6\ \text{tf}.$$

Determinamos el esfuerzo $N_{1\text{-}4}$ por otra vía, empleando el procedimiento de la recta de momento. Para la barra dada esta recta pasa por los nudos *5* y *6*. De la ecuación $\sum M_{5\text{-}6} = -P \cdot 4 - N_{1\text{-}4} \cdot 3 = 0$ obtenemos que $N_{1\text{-}4} = -P\frac{4}{3} = -1{,}6$ tf.

Si el sistema lineal articulado espacial está compuesto de armaduras planas, cada una de las cuales es invariante en su plano, entonces, lo más cómodo es calcular tal sistema por un método de descomposición en armaduras planas. Según este método conviene previamente descomponer la carga dada en componentes, por las direcciones de las aristas respectivas, luego, hallar los esfuerzos en las barras de cada armadura plana debidos a estas componentes y sumar los resultados obtenidos.

Ejemplo 9.12. Determinar los esfuerzos en las barras de la armadura espacial representada en la fig. 9.9*a*.

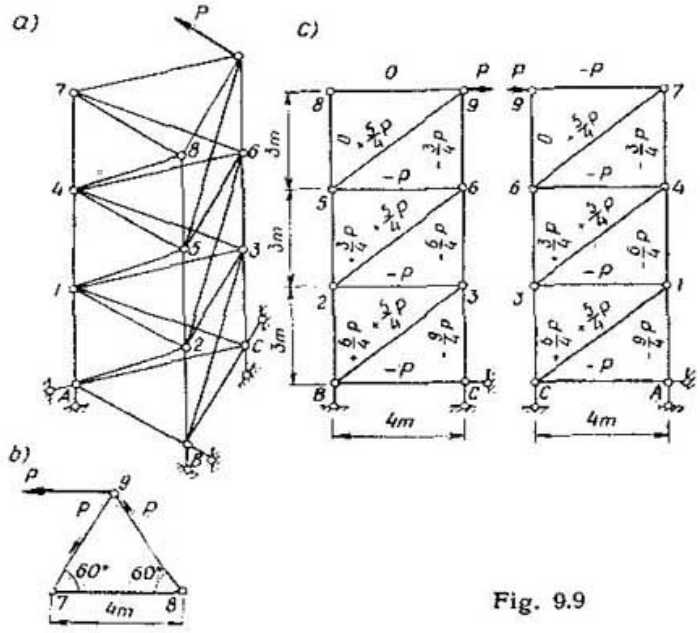


Fig. 9.9

Descomponemos la fuerza P en componentes por las direcciones de las aristas AC y BC, como se muestra en la fig. 9.9*b*. Debido a la acción de estas componentes (iguales a P), en las barras de las armaduras planas BC y AC surgen los esfuerzos respectivos (sus valores se muestran en la fig. 9.9*c*). Adicionando los valores de los esfuerzos para los elementos pertenecientes a dos armaduras planas (el cordón *C-9*), obtenemos esfuerzos sumantes, cuyos valores se presentan en la tabl. 9.1.

Tabla 9.1

N° del elemento	Esfuerzo	N° del elemento	Esfuerzo	N° del elemento	Esfuerzo
A-1	$-{}^{9}/_{4}P$	*A-2*	0	*4-6*	$-P$
1-4	$-{}^{6}/_{4}P$	*2-1*	0	*6-7*	$+{}^{5}/_{4}P$
4-7	$-{}^{3}/_{4}P$	*1-5*	0	*7-9*	$-P$
B-2	$+{}^{6}/_{4}P$	*5-4*	0	*C-B*	$-P$
2-5	$+{}^{3}/_{4}P$	*4-8*	0	*B-3*	$+{}^{5}/_{4}P$
5-8	0	*8-7*	0	*3-2*	$-P$
C-3	$-{}^{3}/_{4}P$	*A-C*	$-P$	*2-6*	$+{}^{5}/_{4}P$
3-6	$-{}^{3}/_{4}P$	*C-1*	$+{}^{5}/_{4}P$	*6-5*	$-P$
6-9	$-{}^{3}/_{4}P$	*1-3*	$-P$	*5-9*	$+{}^{5}/_{4}P$
AB	0	*3-4*	$+{}^{5}/_{4}P$	*9-8*	0

Ejemplo 9.13. Se exige determinar los esfuerzos en las barras de la armadura espacial representada en la fig.9.6*c*. En cada uno de los nudos de la armadura dada concurren más de tres barras y, por eso, es imposible determinar directamente, por medio del recorte de nudos, los esfuerzos en ellas.

Para resolver este problema empleamos el método de sustitución de vínculos.

El orden con que se calculan los sistemas espaciales por el método de sustitución de vínculos es el mismo que para el cálculo de sistemas planos. Eliminamos del sistema dado el vínculo *1-2* y, en su lugar, introducimos el vínculo sustituyente *3-5*. El sistema reestructurado se representa en tres proyecciones sobre la fig. 9.10*a—c*.

Hallemos los esfuerzos en las barras, debidos a la carga dada P y a la fuerza $X_1 = 1$. Es evidente que, por la acción de la fuerza P, las barras adyacentes a los nudos *1* y *2* están en cero, ya que los nudos dados, unidos, ahora, solamente por tres barras, no están cargados. De este modo, $N^P_{1\text{-}5} = N^P_{1\text{-}4} = N^P_{1\text{-}3} = N^P_{2\text{-}5} = N^P_{2\text{-}3} = N^P_{2\text{-}6} = 0$.

Recortamos el nudo *3*, al cual está aplicada la fuerza P, y componemos las ecuaciones de la estática:

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\sum X &= -N^P_{3\text{-}4}\operatorname{sen}\beta + N^P_{3\text{-}6}\operatorname{sen}\beta = 0;\\ \textstyle\sum Y &= N^P_{3\text{-}5}\operatorname{sen}\alpha - P = 0;\\ \textstyle\sum Z &= -N^P_{2\text{-}4}\cos\beta - N^P_{3\text{-}6}\cos\beta - N^P_{3\text{-}5}\cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.6)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en forma conjunta, hallamos:

$$N^P_{3\text{-}5} = R_{1P}\frac{P}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}P;$$

$$N^P_{3\text{-}4} = N^P_{3\text{-}6} = -N^P_{3\text{-}5}\frac{\cos\alpha}{2\cos\beta} = -\frac{\sqrt{6}}{6}P.$$

Siguiendo, determinamos los esfuerzos en las barras, debidos a la fuerza $\bar{X}_1 = 1$. Recortamos, al principio, el nudo *1* con el que se tocan tres barras (fig. 9.10*d*). Dado que dos de ellas (las *1-4* y 1-5) están en un plano vertical y la tercera (*1-3*), así como la fuerza $\bar{X}_1$, en uno horizontal, entonces, proyectando todas las fuerzas sobre el eje $1 - a$ (perpendicular al trazo del plano vertical

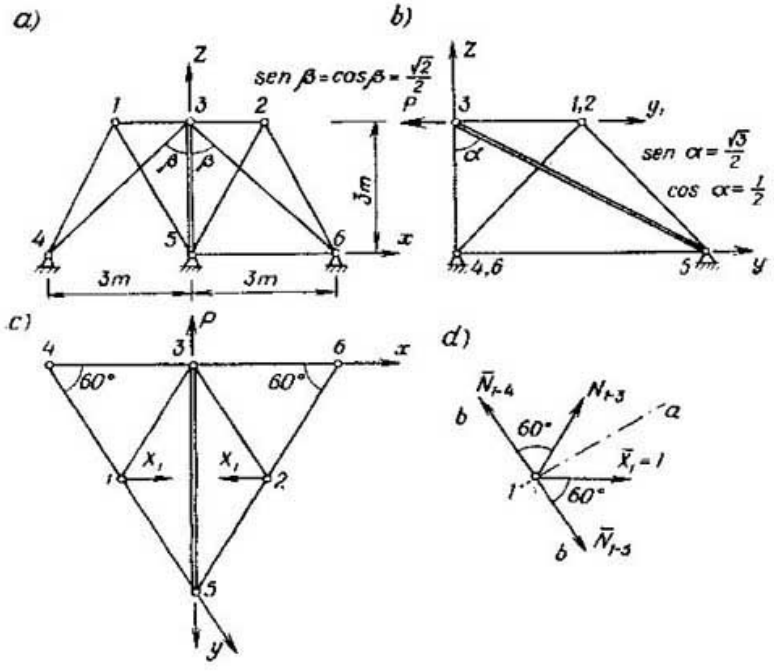


Fig. 9.10

$b - b$), hallamos que $\bar{N}_{1\text{-}3} = -\bar{X}_1 = -1$. En el plano vertical al nudo *1* son contiguas sólo dos barras. Por eso, $\bar{N}_{1\text{-}4} = -\bar{N}_{1\text{-}5}$. Considerando esto y empleando la condición de la estática $\sum Y_1 = 0$, obtenemos que

$$\sum Y_1 = \bar{X}_1 \cos 60° - N_{1\text{-}3} \cos 60° - \bar{N}_{1\text{-}5} \operatorname{sen} 45° - \bar{N}_{1\text{-}4} \operatorname{sen} 45° = 0$$

de donde

$$\bar{N}_{1\text{-}4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \bar{N}_{1\text{-}5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Análogamente encontramos que

$$\bar{N}_{2\text{-}3} = -1; \quad \bar{N}_{2\text{-}6} = +\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \bar{N}_{2\text{-}5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Luego, recortando el nudo *3*, hallamos los esfuerzos en las barras restantes, debidos a la acción de las fuerzas X_1. A este nudo son contiguas tres barras (las *3-4*, *3-6* y *3-5*), en las que es necesario determinar los esfuerzos, y dos barras (las *1-3* y *2-3*), en las que los esfuerzos son conocidos. La resultante $\bar{S}$ de las fuerzas $\bar{N}_{1\text{-}3}$ y $\bar{N}_{2\text{-}3}$ igual a $\bar{S} = 2\bar{N}_{2\text{-}3}\cos 30° = -\sqrt{3}$ posee la misma dirección que la fuerza P. Por eso, en las barras encontramos los esfuerzos desconcidos, empleando los esfuerzos debidos a la fuerza P, hallados anteriormente. De este modo,

$$\bar{N}_{3\text{-}4} = \bar{N}_{3\text{-}6} = -\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \bar{N}_{3\text{-}5} = r_{k1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{3} = 2.$$

En correspondencia con (2.4), hallamos el valor de X_1:

$$X_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{2\sqrt{3}\cdot P}{3\cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}P.$$

Por consiguiente, por (2.5)

$$N_{1\text{-}2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}P; \quad N_{1\text{-}5} = N_{2\text{-}5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}P\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}P;$$

$$N_{1\text{-}4} = N_{2\text{-}6} = -\frac{\sqrt{6}}{6}P; \quad N_{1\,3} = N_{2\text{-}3} = +\frac{\sqrt{3}}{3}P;$$

$$N_{3\text{-}4} = N_{3\text{-}6} = -\frac{\sqrt{6}}{6}P + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}P\right) = 0.$$

En el caso dado, en la barra sustituida, el esfuerzo X tiene un determinado valor, lo cual asevera sobre la invariabilidad geométrica del sistema. Pero, cuando la reacción en la barra sustituyente es igual a cero, la fuerza X toma un valor indeterminado o igual a infinito, lo que atestigua sobre la variabilidad instantánea del sistema.

La determinación de los desplazamientos en los sistemas espaciales se basa en los mismos principios que para los sistemas planos. Pero, en vista de que en los sistemas espaciales las fuerzas internas poseen seis componentes, la fórmula de los desplazamientos, para los sistemas compuestos de elementos rectilíneos sometidos a la acción de una carga, contiene seis miembros (y no tres, como para los sistemas planos).

En las armaduras articuladas, para los desplazamientos la fórmula de Moor posee la siguiente forma (de los seis miembros queda sólo uno, que considera la deformación longitudinal de los elementos de la armadura):

$$\Delta_{kP} = \sum \frac{\bar{N}_k N_P l_i}{E_i F_i}. \tag{9.7}$$

Ejemplo 9.14. Se pide determinar el desplazamiento horizontal, pleno, del punto *2* de la armadura espacial, representada en la fig. 9.9*a*.

A fin de determinar el desplazamiento total Δ_{2P} hallemos los desplazamientos horizontales de este punto en cualesquiera dos direcciones, por ejemplo, por las direcciones de las aristas AB y BC. Para esto, en el nudo *2* aplicamos dos fuerzas unitarias $\bar{P}_1$ y $\bar{P}_2$, por las direcciones de las aristas respectivas (fig. 9.11*a*, *b*) y encontramos los esfuerzos en las barras de la armadura, debidos a la acción de estas fuerzas. Señalamos que, en este caso, todos los elementos de la armadura, ubicados más arriba del primer piso, están "en cero". Considerando que cada fuerza origina esfuerzos solamente en aquellos elementos de la armadura que están

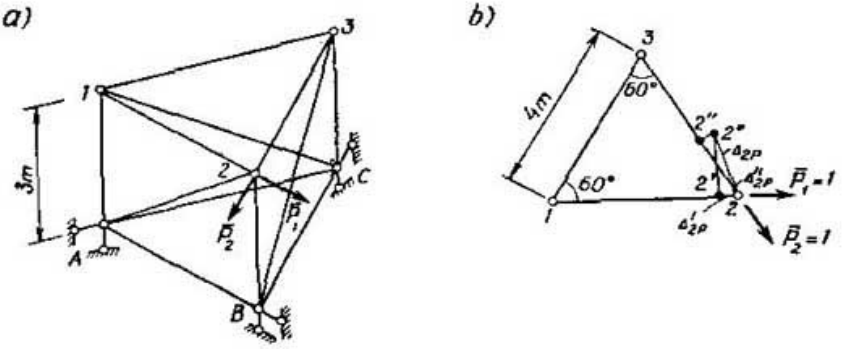


Fig. 9.11

ubicados en el plano de su acción, obtenemos los siguientes valores distintos de cero de los esfuerzos:

$$\bar{N}^{I}_{A\text{-}2}=+\frac{5}{4};\quad \bar{N}^{I}_{2\text{-}B}=-\frac{3}{4};\quad \bar{N}^{II}_{2\text{-}3}=+1;$$

$$\bar{N}^{II}_{C\text{-}3}=+\frac{3}{4};\quad N^{II}_{B\text{-}3}=-\frac{5}{4};\quad N^{II}_{C\text{-}B}=1.$$

En concordancia con (9.7) hallemos los desplazamientos del punto *2* por las aristas AB y BC. Multiplicando los esfuerzos hallados, por los debidos a la fuerza P, encontrados anteriormente en las barras de la armadura, sumando los productos obtenidos y hallando con esto que $EF=\text{const}$, tendremos:

$$\Delta^{I}_{2P}=\frac{1}{EF}\left[0+\left(+\frac{6}{4}P\right)\left(-\frac{3}{4}\right)3\right]=-\frac{27}{8}\cdot\frac{P}{EF};$$

$$\Delta^{II}_{2P}=\frac{1}{EF}\left[(-P)(+1)\,4+\left(\frac{5}{4}P\right)\left(-\frac{5}{4}\right)5+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{3}{4}P\right)\left(+\frac{3}{4}\right)3+(-P)\,1\cdot 4\right]=-\frac{35}{2}\cdot\frac{P}{EF}.$$

El desplazamiento horizontal total del punto *2* lo hallamos basándonos en una construcción gráfica (fig. 9.11*b*). En determinada escala trazamos los valores Δ^{I}_{2P} y Δ^{II}_{2P} por las direcciones de

las aristas AB y BC. Desde los extremos de los segmentos $2\text{-}2'$ y $2\text{-}2''$ levantamos perpendiculares. El punto 2^0 de su intersección unido con el punto 2 determina el vector del desplazamiento total.

CAPÍTULO 10 * CALCULO DE LOS PORTICOS PLANOS HIPERESTATICOS POR EL METODO DE FUERZAS

El cálculo de los pórticos hiperestáticos por el método de fuerzas se efectúa sobre el sistema básico obtenido del dado con la eliminación *total* o *parcial* de los vínculos superfluos. Eliminando a todos los vínculos, el sistema se hace isostático y, sólo a varios, hiperestático. El sistema básico hiperestático deberá ser bien estudiado previamente, para que en adelante se pueda efectuar, sobre su base, el cálculo del sistema dado, sin experimentar dificultades.

El sistema básico más conveniente será aquel, en el cual los diagramas debidos a las incógnitas y a la carga, resulten simples y donde haya la menor cantidad posible de coeficientes suplementarios, distintos de cero.

El grado de hiperestaticidad (el número de vínculos superfluos) del sistema dado se determina por las fórmulas

$$n = B + 2A + 3S + V_{ap} - 3D, \tag{10.1}$$

donde B es el número de vínculos de primer tipo (el de barras con articulaciones en los extremos);
A, el número de articulaciones cilíndricas;
S, el número de soldaduras;
V_{ap}, el número de vínculos de apoyo (que no son apoyos);
D, el número de discos isostáticos cualesquiera con los que puede estar compuesto el sistema;

$$n = 3C - A, \tag{10.2}$$

donde C es el número de contornos cerrados en el sistema, sin tener en cuenta las articulaciones;
A, el número de articulaciones en los contornos cerrados.

El grado externo de hiperestaticidad (el número de vínculos superfluos con la tierra) es

$$n_1 = V_{ap} - 3 - V_{sust}, \tag{10.3}$$

donde V_{sust} es el número de vínculos sustituyentes, esto es, el número de vínculos insuficientes para que el sistema, quitado de sus apoyos sea invariante.

La hiperestaticidad interna (el número de vínculos superfluos en el sistema sin apoyos) es

$$n_2 = n - n_1. \tag{10.4}$$

Las ecuaciones canónicas del método de fuerzas se componen según la expresión

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kP} + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Delta} = 0 \quad (10.5)$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$,
donde

$$\delta_{km} = \sum \int \bar{M}_k \frac{\bar{M}_m}{EJ} ds + \sum \int \bar{N}_k \frac{\bar{N}_m}{EF} ds + \sum \int \mu \bar{Q}_k \frac{\bar{Q}_m}{GF} ds; \quad (10.6)$$

$$\Delta_{kP} = \sum \int \bar{M}_k \frac{M_P^0}{EJ} ds + \sum \int \bar{N}_k \frac{N_P^0}{EF} ds + \sum \int \mu \bar{Q}_k \frac{Q_P^0}{GF} ds; \quad (10.7)$$

$\bar{M}_k$, $\bar{N}_k$, $\bar{Q}_k$; $\bar{M}_m$, $\bar{N}_m$, $\bar{Q}_m$; M_P^0, N_P^0 y Q_P^0, son los momentos flectores y las fuerzas axiles y transversales en el sistema básico, debidos a $X_k = 1$, $X_m = 1$ y la carga, respectivamente.

Los desplazamientos debido a la temperatura Δ_{kt} se determinan por la fórmula (8.2); los debidos a la dislocación de los apoyos $\Delta_{k\Delta}$, por la (8.3).

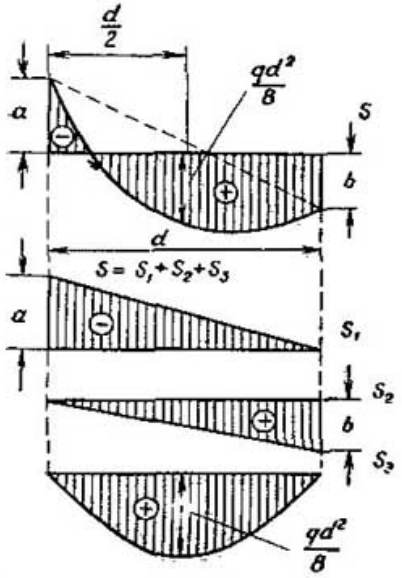


Fig. 10.1

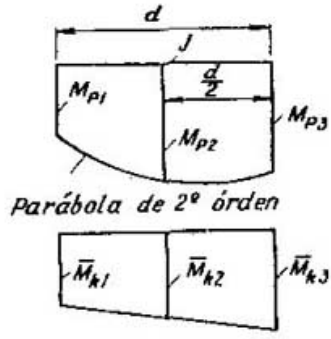


Fig. 10.2

Vamos a representar las integrales de las fórmulas de desplazamientos en forma de producto convencional, a fin de abreviar el escrito:

$$\sum \int \frac{\bar{S}_k S_P}{A} ds = (S_P)(\bar{S}_k). \quad (10.8)$$

El cálculo de la integral (10.8) por la barra recta del sistema, si la rigidez de ésta es constante en toda su longitud, se lo puede efectuar por medio de una "multiplicación" de diagramas. Para esto es necesario descomponer en simples la compleja figura del diagrama en la barra (fig. 10.1).

En los casos cuando uno de los diagramas es lineal y el otro no mayor de segundo orden, se puede emplear la fórmula (fig. 10.2)

$$\Delta_{kP} = \frac{d}{6EJ}(\bar{M}_{k1}M_{P1} + 4\bar{M}_{k2}M_{P2} + \bar{M}_{k3}M_{P3}). \qquad (10.9)$$

La verificación de los coeficientes de las ecuaciones canónicas y de los términos independientes de la carga, se efectúa por las fórmulas:

$$\sum_{\substack{k=1\\m=1}}^{n} \delta_{km} = (\bar{M}_S)\cdot(\bar{M}_S) + (\bar{N}_S)\cdot(\bar{N}_S) + (\bar{Q}_S)\cdot(\bar{Q}_S); \qquad (10.10)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kP} = (\bar{M}_P^0)\cdot(\bar{M}_S) + (N_P^0)\cdot(\bar{N}_S) + (Q_P^0)\cdot(\bar{Q}_S), \qquad (10.11)$$

donde $\bar{M}_S$, $\bar{N}_S$ y $\bar{Q}_S$ son los momentos flectores, sumantes unitarios, las fuerzas axiles y transversales en el sistema básico.

La resolución de las ecuaciones canónicas se puede escribir así:

$$X_k = \beta_{k1}\Delta_1 + \beta_{k2}\Delta_2 + \ldots + \beta_{kn}\Delta_n, \qquad (10.12)$$

donde $\Delta_i = \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{i\Delta}$

Los coeficientes de influencia $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ se calculan por las fórmulas:

a) por medio de determinantes

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} = (-1)^{(i+k+1)}\frac{D_{ik}}{D}, \qquad (10.13)$$

donde D es el determinante básico (general) de las ecuaciones canónicas y,

D_{ik}, el determinante obtenido del básico con la exclusión del i^{mo} (k^{mo}) renglón y la k^{ma} (i^{ma}) columna;

b) por el procedimiento de Gauss

$$\beta_{kk} = -\frac{1}{\delta_{kk}^{k-1}} + \alpha_{k(k+1)}\beta_{(k+1)k} + \underbrace{\ldots + \alpha_{kn}\beta_{kn}}_{\text{(último miembro)}}, \qquad (10.14)$$

en este caso $\alpha_{nn} = 0$;

$$\beta_{ik} = \alpha_{i(i+1)}\beta_{(i+1)k} + \underbrace{\ldots + \alpha_{in}\beta_{nk}}_{\text{(último miembro)}}. \qquad (10.15)$$

Los coeficientes α se cogen de la tabla de ciclo directo (véase el ejemplo 10.10). En estas fórmulas, los índices k e i toman los siguientes valores:

primera operación: para la fórmula (10.14) $k = n$, suponiendo en este caso que $\alpha_{nn} = 0$, para la (10.15) $k = n$; $i = (n-1)$, $i = (n-2)$, ..., $i = 1$;

segunda operación: para la fórmula (10.14) $k = n-1$, para la (10.15) $k = (n-1)$; $i = (n-2)$, $i = (n-3)$, ..., $i =$

$= 1$. Las siguientes operaciones son explícitas (véase el ejemplo 10.10).

La verificación de los coeficientes de influencia $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ se efectúa partiendo de que el producto, término a término, del reglón de la matriz $\|\delta_{ik}\|$ por la columna del mismo signo (o renglón del mismo signo) de la matriz $\|\beta_{ik}\|$ es igual a menos uno y, por la columna de signo contrario (o renglón de signo contrario), a cero.

Las incógnitas X_k pueden, igualmente, ser calculadas directamente por medio del determinante:

$$X_k = \frac{D_k}{D}, \tag{10.16}$$

donde D_k es el determinante obtenido del D básico, sustituyendo la k^{ma} columna por los términos independientes con el signo contrario.

La verificación de los diagramas definitivos de los momentos se efectúa sobre la base de las siguientes expresiones:

$$(M_P) \cdot (\bar{M}_S) + (N_P) \cdot (\bar{N}_S) + (Q_P) \cdot (\bar{Q}_S) = 0; \tag{10.17}$$

$$(M_t) \cdot (\bar{M}_S) + (N_t) \cdot (\bar{N}_S) + (Q_t) \cdot (\bar{Q}_S) = -\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kt}; \tag{10.18}$$

$$(M_\Delta) \cdot (\bar{M}_S) + (N_\Delta) \cdot (\bar{N}_S) + (Q_\Delta) \cdot (\bar{Q}_S) = -\sum_{k=1}^{n} \Delta_{k\Delta}. \tag{10.19}$$

En las expresiones (10.17)—(10.19) es necesario emplear sólo aquellas fuerzas internas que tomaron en consideración al calcular los coeficientes de las ecuaciones canónicas.

Ejemplo 10.1. Determinar el grado de hiperestaticidad de un pórtico (fig. 10.3). Efectuamos la resolución por dos variantes.

P r i m e r a v a r i a n t e. Hallamos el grado de hiperestaticidad por la fórmula (10.2).

Es necesario considerar a la tierra un disco sin cerrar (fig. 10.3*a*) y, mentalmente, excluir todas las articulaciones. Entonces, el número de contornos es $C = 4$ y, el de articulaciones, $A = 6$:

$$n = 3 \cdot 4 - 6 = 6.$$

S e g u n d a v a r i a n t e. El grado de hiperestaticidad se halla por la fórmula (10.1). Representamos el sistema compuesto por partes isostáticas de cualquier tipo, dado, por ejemplo, en la fig. 10.3*b*. En este caso tenemos: los discos $D = 2$, las barras $B = 1$ con articulaciones por los extremos (tensores), las articulaciones $A = 1$, las soldaduras $S = 1$ y los vínculos de apoyo $V_{ap} = 1 + 3 + 2 = 6$;

$$n = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 - 3 \cdot 2 = 6.$$

El grado de hiperestaticidad externa del pórtico lo encontramos por la fórmula (10.3).

Para determinar V_{sust} es necesario quitar de los apoyos el sistema dado (fig. 10.3*c*) y determinar el grado de su variabilidad, o sea, el número de vínculos complementarios indispensables para que el sistema, quitado de sus apoyos, sea invariante. En nuestro caso (fig. 10.3*c*), dos discos están unidos solamente con una articulación, la *C*. El sistema es monovariante, ya que es suficiente introducir una barra (en punteado) para que el sistema, sin los apoyos, quede invariante. Esto significa que $V_{sust} = 1$:

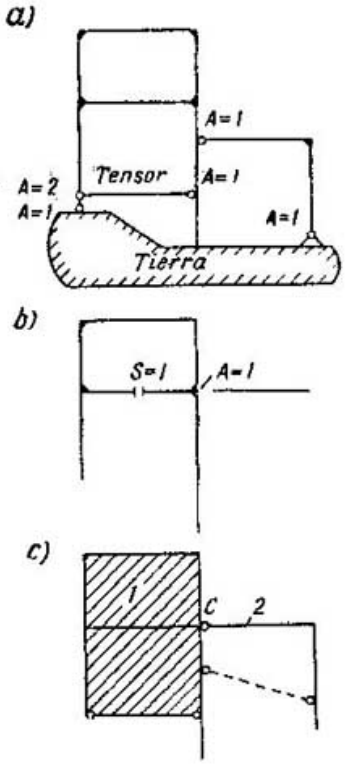


Fig. 10.3

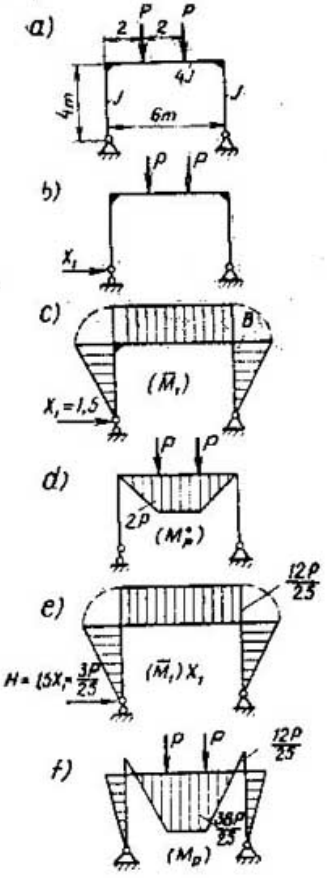


Fig. 10.4

$$n_1 = 6 - 3 - 1 = 2.$$

La hiperestaticidad interna del pórtico es

$$n_2 = n - n_1 = 6 - 2 = 4.$$

Al elegir un sistema isostático básico, es necesario tener en cuenta que n_1 determina el número máximo de vínculos con la tierra y n_2, el mínimo de los vínculos internos que pueden ser eliminados. No obstante, en lugar de una eliminación total o parcial de los vínculos externos de n_1, se pueden eliminar complementariamente, los vínculos internos que sobrepasen los de n_2.

Ejemplo 10.2. Construir el diagrama de M en el pórtico biarticulado (fig. 10.4*a*), considerando solamente las deformaciones de flección.

El pórtico es monohiperestático. El sistema básico se muestra en la fig. 10.4*b*. La ecuación canónica es

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Para comodidad del cálculo adoptamos convecionalmente el diagrama unitario debido a $X_1 = 1{,}5$ (fig. 10.4*c*). El diagrama de carga se da en la fig. 10.4*d*. Multiplicando los diagramas, obtenemos:

$$\delta_{11} = (\bar{M}) \cdot (\bar{M}_1) = \left(\frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3}\, 6\, \frac{1}{EJ}\right) 2 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \frac{1}{4EJ} = \frac{150}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = (M_P^0) \cdot (\bar{M}_1) = -\frac{2P \cdot 4 \cdot 6}{4EJ} = -\frac{12P}{EJ};$$

$$X_1 = -\Delta_{1P} : \delta_{11} = 2P : 25.$$

El empuje horizontal del pórtico es $H = 1{,}5\ X_1 = 3\ P : 25$.

En la fig. 10.4*e* se da el diagrama corregido (el debido a $H = 1{,}5\ X_1 = 3P : 25$) y en la 10.4*f*, el debido a la carga en el sistema dado.

Verificamos el diagrama obtenido, "multiplicándolo" por el debido a $X_1 = 1{,}5$:

$$(M_P)(\bar{M}_1) = \left(\frac{12P}{25} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2}{3}\, 6\, \frac{1}{EJ}\right) 2 + \left(\frac{12P}{25} \cdot 6 \cdot 6 - 2P \cdot 4 \cdot 6\right) \frac{1}{4EJ} =$$

$$= \frac{192}{25EJ} - \frac{192}{25EJ} = 0.$$

El diagrama de M_P es correcto.

Ejemplo 10.3. En el pórtico del ejemplo 10.2 construir el diagrama de M, debido a la misma carga, si la rigidez de la viga de estructura es dos veces menor que antes, esto es, $2J$, con el mismo sistema básico.

Respuestas: $\delta_{11} = 204 : EJ$; $\Delta_{1P} = -24P : EJ$; $X_1 = 6P : 51$. El diagrama de M es mostrado en la fig. 10.5*a*.

Problema 10.4. Construir el diagrama de M debido a una carga uniforme horizontal, en el pórtico del ejemplo 10.2 (fig. 10.5*b*).

Respuestas para el caso del sistema básico dado en la fig. 10.4*b*: $\Delta_{1P} = -116q : EJ$, $X_1 = 58q : 75$. El diagrama de M_q está construido en la fig. 10.5*b*.

Ejemplo 10.5. Obtener la forma general de la fórmula del esfuerzo en el tensor (del empuje horizontal) de un pórtico biarticulado, debido a cualquier carga vertical sobre la viga de estructura (fig. 10.6*a*). El sistema básico y los diagramas indispensables para el cálculo se dan en la fig. 10.6*b* y *c*.

Por cuanto en este caso se utiliza el diagrama unitario debido a $X_1 = 1$, entonces, el esfuerzo en el tensor (el empuje horizontal) del arco en $H = X_1$.

Multiplicando los diagramas (fig. 10.6*b* y *c*) y considerando el alargamiento del tensor, obtenemos que

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1) \cdot (\bar{M}_1) + \frac{l}{E_t F_t} = \left(\frac{hh}{2} \cdot \frac{2}{3} h \frac{1}{EJ}\right) 2 + \frac{hlh}{kEJ} + \frac{l}{E_t F_t} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} h^3 + \frac{h^2 l}{k}\right) \frac{1}{EJ} + \frac{l}{E_t F_t};$$

$$\Delta_{1P} = (M_P^0) \cdot (\bar{M}_1) = -\omega_P h : kEJ.$$

De la ecuación canónica se deduce que

$$X_1 = \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \omega_P h : \left(\frac{2}{3} kh^3 + h^2 l + \frac{klEJ}{E_t F_t}\right). \qquad (10.20)$$

Para el pórtico biarticulado sobre apoyos rígidos, sin tensor, es necesario tomar que, en (10.20), la rigidez del tensor $E_t F_t$ es igual a infinito. Empleamos la fórmula (10.20) para el ejemplo 10.2:

$$X_1 = 8P4 : \left(\frac{2}{3} 4 \cdot 4^3 + 4^2 \cdot 6\right) = \frac{3P}{25}.$$

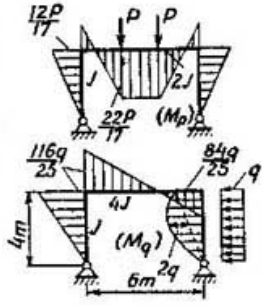


Fig. 10.5

Ejemplo 10.6. Construir en un pórtico los diagramas de M, Q y N (fig. 10.7*a*). La ecuación canónica es

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Efectuamos el cálculo considerando únicamente la deformación de flección. El sistema básico se muestra en la fig. 10.7*b*; el diagrama convencional unitario, en la fig. 10.7*c* y el de carga, en la fig. 10.7*d*. Durante la multiplicación, las figuras complejas fueron descompuestas en simples, según lo indica el punteado de la figura.

Calculamos los desplazamientos:

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1) \cdot (\bar{M}_1) = \frac{9 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} 9 \frac{1}{EJ} +$$

$$+ \left[\frac{9 \cdot 6}{2} \left(\frac{2}{3} 9 + \frac{1}{3} 6\right) + \frac{6 \cdot 6}{2} \left(\frac{2}{3} 6 + \frac{1}{3} 9\right)\right] \frac{1}{3EJ} +$$

$$+ \frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} 6 \frac{1}{EJ} = (162 + 114 + 48) : EJ = 324 : EJ.$$

Para calcular el medio sumando, par la viga de estructura, empleamos la fórmula (10.9):

$$\frac{6}{6\cdot 3EJ}(9\cdot 9+4\cdot 7{,}5\cdot 7{,}5+6\cdot 6)=114:EJ;$$

$$\Delta_{1P}=-\left(\frac{18q6}{3}\cdot\frac{2}{3}9+\frac{2}{3}6\cdot 4{,}5q\cdot 4{,}5\right)\frac{1}{EJ}-$$

$$-\frac{18q6}{2}\left(\frac{2}{3}9+\frac{1}{3}6\right)\frac{1}{3EJ}=-\frac{405q+144q}{EJ}=-\frac{549q}{EJ}.$$

Aquí también calculamos el primer sumando por la fórmula (10.9):

$$-\frac{6}{6EJ}(0\cdot 0+4\cdot 13{,}5\cdot 13{,}5q+18q9)=-\frac{405q}{EJ}.$$

El valor de la incógnita es

$$X_1=-\Delta_{1P}:\delta_{11}=61_q:36.$$

El diagrama corregido de $(\bar{M}_1)X_1$ se muestra en la fig. 10.7*e*, y el de los momentos flectores debidos a la carga, en la 10.7*f*.

Efectuamos la verificación multiplicando el diagrama de (M_P) por el de $(\bar{M}_1)$, aplicando la fórmula (10.9):

$$(M_P)\cdot(\bar{M}_1)=\frac{6}{6EJ}\left[0\cdot 0+4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{33}{12}q+\frac{9}{2}q\right)\left(-\frac{9}{2}\right)+\frac{33q}{12}(-9)\right]+$$

$$+\frac{6}{6\cdot 3EJ}\left[\frac{33q}{12}(-9)+4\left(-\frac{61q}{6}+\frac{33q}{12}\right)\frac{1}{2}\left(-\frac{9+6}{2}\right)+\frac{(-61q)}{6}(-6)\right]+$$

$$+\frac{4}{6EJ}\left[\frac{61q}{6}6+4\frac{61q}{6\cdot 2}\cdot\frac{6}{2}+0\cdot 0\right]=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(-130{,}5q+\frac{147{,}5q}{3}+\frac{244q}{3}\right)\equiv 0.$$

Si al sistema básico (fig. 10.7*b*) le aplicamos la incógnita X_1 encontrada, los diagramas de Q_P y N_P pueden ser construidos por las normas corrientes. Sin embargo, en casos más complejos, tal procedimiento de construcción es incómodo. En tales circunstancias, la construcción del diagrama de Q_P ha de efectuarse empleando el diagrama ya construido de M_P y la construcción del de N_P, usando el diagrama de Q_P. Examinemos aquí el último procedimiento.

Para la construcción del diagrama de Q_P es necesario considerar cada barra del pórtico como una viga sobre dos apoyos articulados, en la que actúan una carga y los momentos de apoyo hallados, tomados del diagrama de M_P (fig. 10.7*f*), empleando a continuación la fórmula

$$Q_P(z)=Q_P^{\text{v1g}}(z)+\frac{M_{\text{der}}-M_{\text{izq}}}{l}, \qquad (10.21)$$

donde $Q_P^{\text{viga}}(z)$ es la fuerza transversal debida únicamente a la carga que actúa sobre la barra y M_{der} y M_{izq}, los momentos derecho e izquierdo, respectivamente, con la regla de los signos empleados, comúnmente, para las vigas.

Para nuestro caso, tales vigas están representadas en la fig. 10.8.

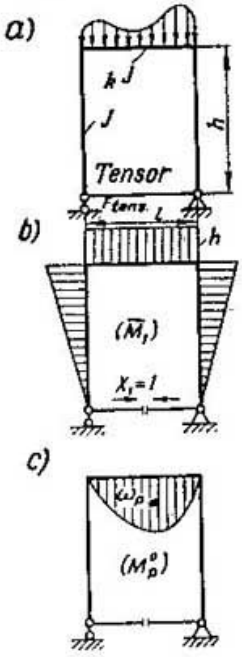


Fig. 10.6

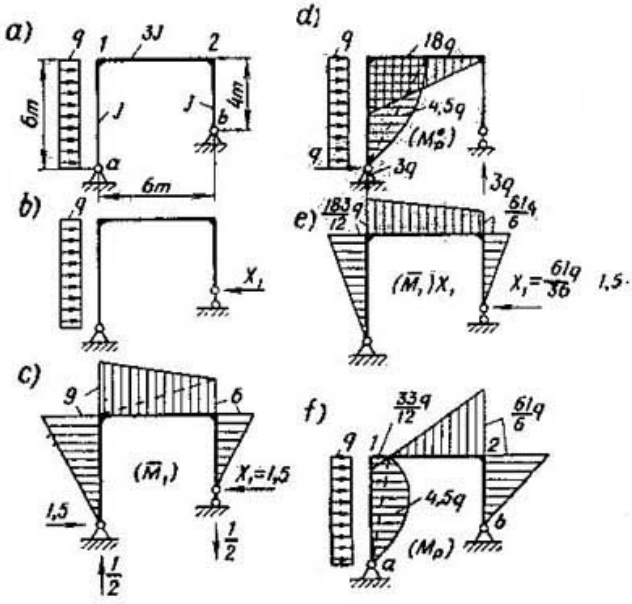


Fig. 10.7

1) **La barra** a—1 (fig. 10.8a):

$$Q_P(z) = (3q - qz) + \left(\frac{33q}{12} - 0\right) : 6;$$

$$Q_P(0) = 3q + \frac{33q}{72} = \frac{249q}{72}; \quad Q_P(6) = -3q\,\frac{33q}{72} = \frac{183q}{72}.$$

2) **la barra** *1-2* (fig. 10.8b):

$$Q_P(z) = 0 + \left(-\frac{61q}{6} - \frac{33q}{12}\right) : 6 = -\frac{155}{72}\,q.$$

3) **La barra** 2—b (fig. 10.8c):

$$Q_P(z) = 0 + \left[0 - \left(-\frac{61q}{6}\right)\right] : 4 = \frac{61q}{24}.$$

En la fig. 10.8d fue construido el diagrama de Q_P en el pórtico.

Para la construcción del diagrama de N_P es necesario recortar los nudos del pórtico, junto con las fuerzas concentradas (si éstas existen) que actúan sobre ellos, aplicando a los nudos, en los cortes de las barras, la fuerzas axiles incógnitas N y las transversales Q halladas anteriormente. Es necesario designar a cada fuerza con dos índices: el primero indica el número del nudo y,

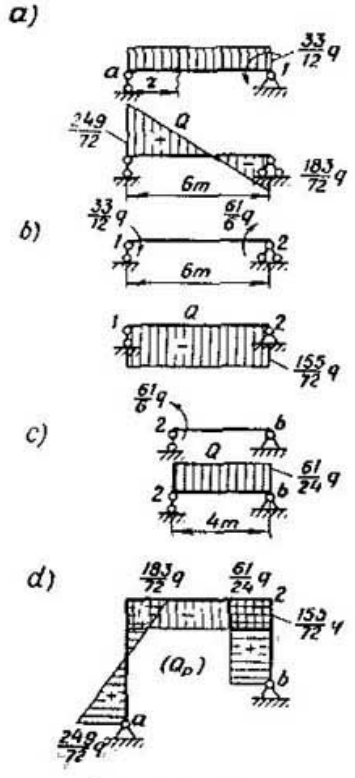


Fig. 10.8

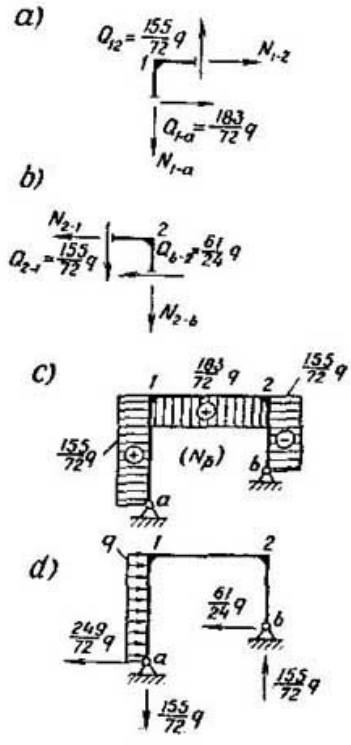


Fig. 10.9

ambos, la barra que se toca con el nudo. En este caso, es necesario recordar que la fuerza transversal positiva deberá hacer girar al nudo en el sentido de las agujas del reloj. Luego, de la condición de equilibrio en forma de suma de proyecciones de las fuerzas sobre un eje, por medio de las fuerzas transversales conocidas, Q, se determinan las fuerzas axiles N. Es indispensable comenzar, el recorte de nudos por aquél, en donde se juntan sólo dos barras. Luego, es preciso pasar a los nudos en los cuales no haya más de dos fuerzas axiles incógnitas.

En nuestro caso, comenzaremos el recorte, por ejemplo, por el nudo *1* (fig. 10.9*a*). Las condiciones de equilibrio son:

$$\sum X = N_{1\text{-}2} + \frac{183}{72} q = 0; \quad \sum Y = \frac{155q}{72} - N_{1\text{-}a} = 0.$$

De ellas resulta:

$$N_{1\text{-}2} = -\frac{183q}{72}; \quad N_{1\text{-}a} = \frac{155q}{72}.$$

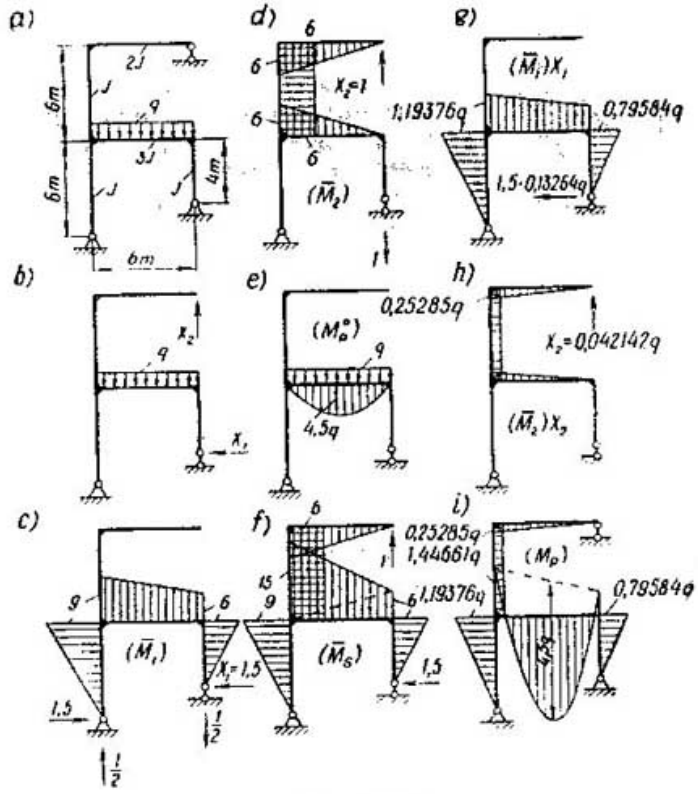


Fig. 10.10

Prosiguiendo, recortamos el nudo *2* (fig. 10.9*b*). Las condiciones de equilibrio son:

$$\sum X = -N_{2\text{-}1} - \frac{61}{24} q = 0; \quad \sum Y = -N_{2\text{-}b} - \frac{155}{72} = 0.$$

De ellas resulta:

$$N_{2\text{-}1} = -61q : 24; \quad N_{2\text{-}b} = -155q : 72.$$

En la fig. 10.9*c* fue construido el diagrama de N_P.

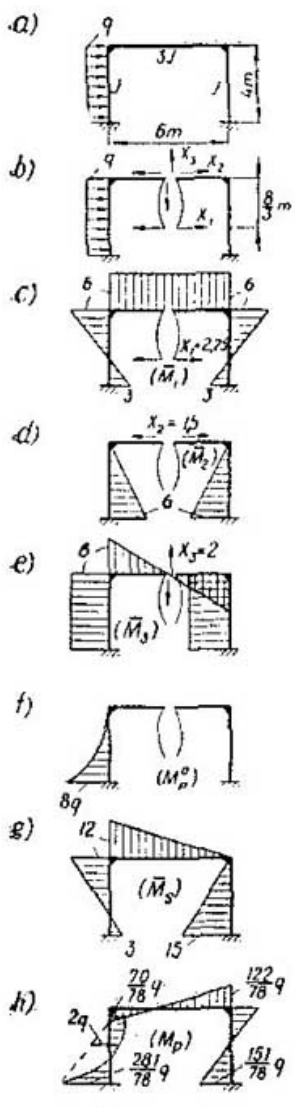


Fig. 10.11

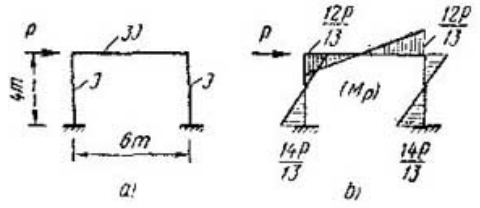


Fig. 10.12

Los diagramas de Q_P y N_P construidos se verifican por las condiciones de equilibrio, las que deberán cumplirse para cualquier parte recortada. Así, por ejemplo, en nuestro caso (fig. 10.9*d*), para el pórtico estas condiciones en conjunto serán:

$$\sum X = 6q - \frac{249q}{72} - \frac{61q}{24} = 0;$$

$$\sum Y = -\frac{155q}{72} + \frac{155q}{72} = 0;$$

$$\sum M_a = 6q \cdot 3 - \frac{61q}{24} 2 - \frac{155q}{72} 6 = 0.$$

Ejemplo 10.7. Construir en un pórtico (fig. 10.10*a*) el diagrama de los momentos flectores. El pórtico posee dos contornos y cuatro articulaciones. Por la fórmula (10.2)

$$n = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

No es difícil convencerse de que el portico es exteriormente hiperestático. En la fig. 10.10*b* se da el sistema básico.

Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

En la fig. 10.10*c*—*e* se dan los diagramas unitarios y el debido a la carga. El diagrama de $\bar{M}_1$, para comodidad del cálculo, se

toma convencionalmente unitario. Calculamos los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1) \cdot (\bar{M}_1) = \frac{9 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{EJ} + \left[\frac{9 \cdot 6}{2}\left(\frac{2}{3}9 + \frac{1}{3}6\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{6 \cdot 6}{2}\left(\frac{2}{3}6 + \frac{1}{3}9\right)\right] \frac{1}{3EJ} + \frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{EJ} = 324 : EJ;$$

$$\delta_{12} = (\bar{M}_1) \cdot (\bar{M}_2) = \frac{6 \cdot 6}{2}\left(\frac{2}{3}9 + \frac{1}{3}6\right) \frac{1}{3EJ} = 48 : EJ;$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2) \cdot (\bar{M}_2) = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{2EJ} + \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{EJ} + \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{3EJ} = 276 : EJ;$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{2}{3}6 \cdot 4{,}5q \frac{9+6}{2} \cdot \frac{1}{3EJ} = -45q : EJ;$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{2}{3}6 \cdot 4{,}5q \cdot 3 \frac{1}{3EJ} = -18q : EJ.$$

Verificamos los valores obtenidos por las fórmulas (10.10) y (10.11), las cuales para el ejemplo dado se escriben de la siguiente forma:

$$\sum \delta_{km} = (\bar{M}_S)(\bar{M}_S); \quad \sum \Delta_{kP} = (M_P^0) \cdot (M_S). \qquad (10.22)$$

En la fig. 10.10*f* se representa el diagrama sumante unitario.

$$\sum \delta_{km} = (324 + 2 \cdot 48 + 276) : EJ = 696 : EJ;$$

$$(\bar{M}_S) \cdot (\bar{M}_S) = \frac{9 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{EJ} + \left[\frac{15 \cdot 6}{9}\left(\frac{2}{3}15 + \frac{1}{3}6\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{6 \cdot 6}{2}\left(\frac{2}{3}6 + \frac{1}{3}15\right)\right] \frac{1}{3EJ} + \frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{EJ} +$$

$$+ \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{EJ} + \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2EJ} = 696 : EJ;$$

$$\sum \Delta_{kP} = \left(-\frac{45}{EJ}q - \frac{18q}{EJ}\right) = -\frac{63q}{EJ};$$

$$(M_P^0) \cdot (\bar{M}_S) = -\frac{2}{3}6 \cdot 4{,}5q \frac{15+6}{2} \cdot \frac{1}{3EJ} = -\frac{63q}{EJ}$$

Numéricamente, las ecuaciones canónicas son:

$$324X_1 + 48X_2 - 45q = 0;$$

$$48X_1 + 276X_2 - 18q = 0.$$

La resolución de ellas da: $X_1 = 0{,}13264q$ y $X_2 = 0{,}042142q$.

En la fig. 10.10*g*, *h*, se dan los diagramas corregidos y, en la 10.10*i*, el sumante. Efectuamos la verificación del diagrama

obtenido "multiplicándolo" por el sumante unitario:

$$(M_p)(\bar{M}_S) = \frac{1,19376q \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{EJ} + \left[\frac{1,44661q \cdot 6}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}15 + \frac{1}{3}6\right) + \right.$$

$$+ \frac{0,79584q \cdot 6}{2}\left(\frac{1}{3}15 + \frac{2}{3}6\right) - \frac{2}{3}6 \cdot 4,5q \cdot 10,5\left.\right] \frac{1}{3EJ} +$$

$$+ \frac{0,79584q \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3}6\,\frac{1}{EJ} + 0,25285q\mathbf{6} \cdot \frac{6}{EJ} +$$

$$+ \frac{0,25285q \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{2EJ} = (38,4741q : EJ) - (38,47812q : EJ) \approx 0.$$

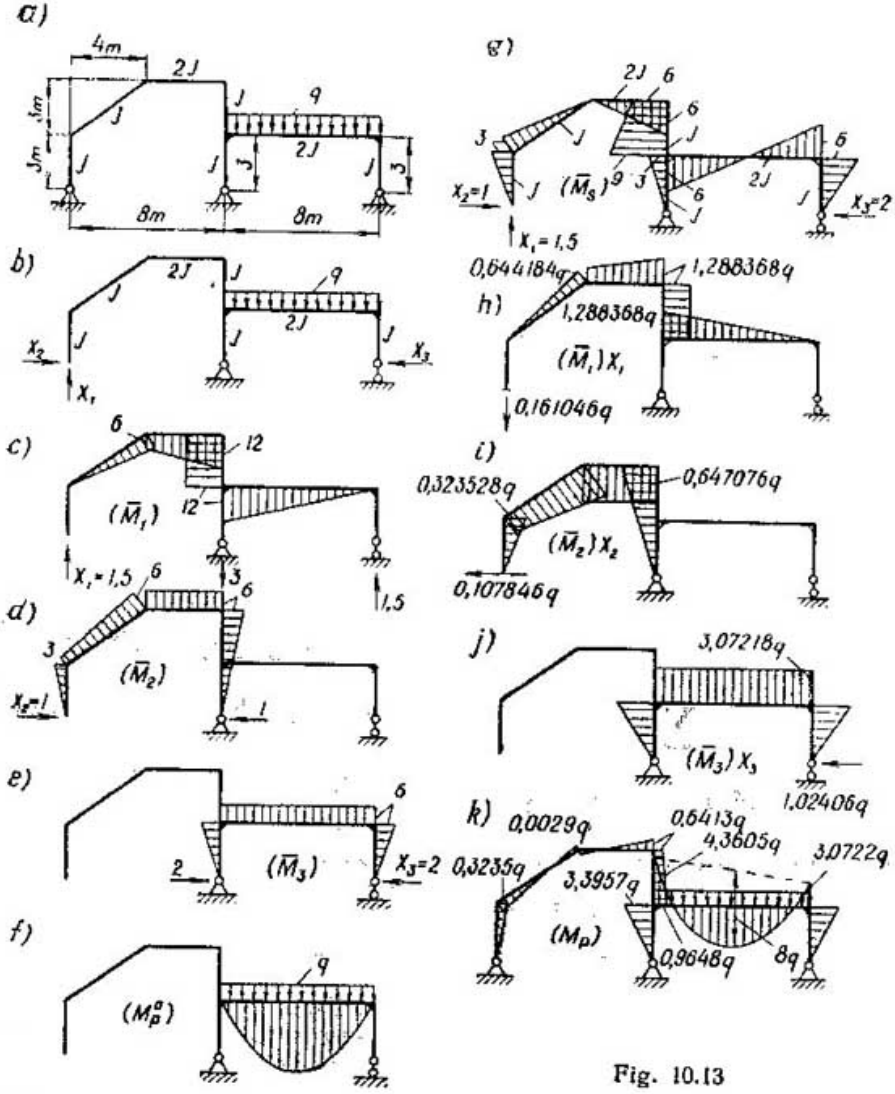


Fig. 10.13

La exactitud de la resolución es elevada y, para el caso dado, un poco superflua. Los diagramas de Q_P y N_P se construyen como en el ejemplo 10.6.

Ejemplo 10.8. Construir el diagrama de los momentos flectores en un pórtico (fig. 10.11*a*).

El pórtico es de triple hiperestaticidad. El sistema más conveniente es el básico indicado en la fig. 10.11*b*.

Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Los diagramas convencionalmente unitarios y el de carga se dan en la fig. 10.11*c*—*f*. Determinamos los coeficientes y terminos independientes de las ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11} = \left[\frac{6\cdot 4}{2}\left(\frac{2}{3}6 - \frac{1}{3}3\right) + \frac{3\cdot 4}{2}\left(\frac{2}{3}3 - \frac{1}{3}6\right)\right]\frac{2}{EJ} + \frac{6\cdot 6\cdot 6}{3EJ} = \frac{144}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \left(\frac{6\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}6\right)\frac{2}{EJ} = \frac{96}{EJ};$$

$$\delta_{33} = \left(\frac{6\cdot 4\cdot 6}{EJ}\right)2 + \left(\frac{6\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}6\right)\frac{2}{3EJ} = \frac{312}{EJ}$$

Por la fórmula (10,9):

$$\Delta_{1P} = \frac{4}{6EJ}(0\cdot 6 + 4\cdot 2q\cdot 1{,}5 - 8q\cdot 3) = -\frac{8q}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{4}{6EJ}(0\cdot 0 - 4\cdot 2q\cdot 3 - 8q\cdot 6) = -\frac{48q}{EJ};$$

$$\Delta_{3P} = \frac{4}{6EJ}(0\cdot 6 + 4\cdot 2q\cdot 6 + 8q\cdot 6) = \frac{64q}{EJ}.$$

En la fig. 10.11*g* se da el diagrama sumante unitario.

Verificamos los coeficientes y términos independientes por las fórmulas (10.22). Con la multiplicación ordinaria de diagramas hallamos que

$$(\bar{M}_S)\cdot(\bar{M}_S) = \left[\frac{12\cdot 4}{2}\left(\frac{2}{3}12 - \frac{1}{3}3\right) + \frac{3\cdot 4}{2}\left(\frac{2}{3}3 - \frac{1}{3}12\right)\right]\frac{1}{EJ} +$$

$$+ \frac{12\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{3EJ} + \frac{15\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}15\,\frac{1}{EJ} = \frac{552}{EJ};$$

$$\sum \delta_{km} = (144 + 96 + 312) : EJ = \frac{552}{EJ};$$

$$(M_P^0)\cdot(\bar{M}_S) = \frac{4}{6EJ}(0\cdot 12 + 4\cdot 2q\cdot 4{,}5 - 8q\cdot 3) = \frac{8q}{EJ};$$

$$\sum \Delta_{kP} = (-8q - 48q - 64q) : EJ = \frac{8q}{EJ}.$$

De las ecuaciones canónicas hallamos que $X_1 = q : 18$; $X_2 = q : 2$; $X_3 = -\frac{8q}{39}$. El diagrama de los momentos flectores está representado en la fig. 10.11*h*. Lo verificamos multiplicándolo por el sumante unitario, empleando la fórmula (10.9):

$$78(M_P)\cdot(\bar{M}_S) = \frac{4}{6EJ}[281q(-3) - 4\cdot 50{,}5q\cdot 4{,}5 - 70q\cdot 12]\frac{1}{EJ} +$$

$$+\frac{6}{6\cdot 3EJ}[-70q\cdot 12 + 4\cdot 26q\cdot 6 + 122q\cdot 0] +$$

$$+\frac{4}{6EJ}[122q\cdot 0 + 4\cdot 14{,}5q\cdot 7{,}5 + 151q\cdot 15] = \frac{1800q - 1800q}{EJ} = 0.$$

Problema 10.9. Construir en el pórtico (fig. 10.12) el diagrama de los momentos flectores.

Respuestas para los diagramas convencionalmente unitarios, por la fig. 10.11*c*—*e*, tenemos:

$$\delta_{11} = 144 : EJ; \quad \delta_{22} = 96 : EJ; \quad \delta_{33} = 312 : EJ; \quad \Delta_{1P} = 0;$$
$$\Delta_{2P} = -32P : EJ; \quad \Delta_{3P} = 48P : EJ; \quad X_1 = 0; \quad X_2 = P : 3;$$
$$X_3 = -2P : 13.$$

En la fig. 10.12*b* se muestra el diagrama de los momentos flectores.

Ejemplo 10.10. Construir el diagrama de los momentos flectores en el pórtico (fig. 10.13*a*).

Aquí, $C = 2$, $A = 3$. Según (10.2), el grado de hiperestaticidad es $n = 3\cdot 2 - 3 = 3$. La hiperestaticidad es externa. El sistema básico se toma por la fig. 10.13*b*. Los diagramas de cálculo (fig. 10.13*c*—*f*) para el sistema básico elegido son simples.

Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0;$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0;$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Hallamos los desplazamientos y los términos independientes (de carga):

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)\cdot(\bar{M}_1) = \frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{EJ} + \left[\frac{6\cdot 4}{2}\left(\frac{2}{3}6 + \frac{1}{3}12\right) +\right.$$

$$\left. +\frac{12\cdot 4}{2}\left(\frac{2}{3}12 + \frac{1}{3}6\right)\right]\frac{1}{2EJ} + \frac{12\cdot 3\cdot 12}{EJ} + \frac{12\cdot 8}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{2EJ} = 852 : EJ;$$

$$\delta_{12} = (\bar{M}_1)\cdot(\bar{M}_2) = -\frac{6\cdot 5}{2}\left(\frac{1}{3}3 + \frac{2}{3}6\right)\frac{1}{EJ} -$$

$$-\frac{6+12}{2}4\cdot 6\,\frac{1}{2EJ} - \frac{6+3}{2}3\cdot\frac{12}{EJ} = -345 : EJ;$$

$$\delta_{13} = (\bar{M}_1)\cdot(\bar{M}_3) = -\frac{12\cdot 8}{2}\cdot 6\,\frac{1}{2EJ} = -144 : EJ;$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2) \cdot (\bar{M}_2) = \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} 3 \frac{1}{EJ} + \left[\frac{3 \cdot 5}{3}\left(\frac{2}{3} 3 + \frac{1}{3} 6\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{6 \cdot 5}{2}\left(\frac{1}{3} 3 + \frac{2}{3} 6\right)\right] \frac{1}{EJ} + \frac{6 \cdot 4 \cdot 6}{2EJ} + \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{EJ} = 258 : EJ;$$

$$\delta_{23} = (\bar{M}_2) \cdot (\bar{M}_3) = -\frac{6 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{EJ} = -18 : EJ;$$

$$\delta_{33} = (\bar{M}_3) \cdot (\bar{M}_3) = \left(\frac{6 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} 6\right) \frac{2}{EJ} + \frac{6 \cdot 8 \cdot 6}{2EJ} = 216 : EJ;$$

$$\Delta_{1P} = (M_P^0) \cdot (\bar{M}_1) = \frac{2}{3} 8 \cdot 8q \frac{6}{2EJ} = 128q : EJ;$$

$$\Delta_{2P} = (M_P^0) \cdot (\bar{M}_2) = 0;$$

$$\Delta_{3P} = -\frac{2}{3} 8 \cdot 8q \frac{6}{2EJ} = -128q : EJ;$$

$$\sum \delta_{km} = (852 - 2 \cdot 345 - 2 \cdot 144 + 258 - 2 \cdot 18 + 216) : EJ =$$

$$= 312 : EJ;$$

$$\sum \Delta_{kP} = (128q + 0 - 128q) : EJ = 0.$$

Verificamos por las fórmulas (10.22). En la fig. 10.13*g* se da el diagrama sumante unitario.

$$(\bar{M}_S) \cdot (\bar{M}_S) = \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{EJ} + \frac{3 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{EJ} + \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{EJ} +$$

$$+ \left[\frac{6 \cdot 3}{2}\left(\frac{2}{3} 6 + \frac{1}{3} 9\right) + \frac{9 \cdot 3}{2}\left(\frac{2}{3} 9 + \frac{1}{3} 6\right)\right] \frac{1}{EJ} + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{EJ} +$$

$$+ \left[\left(\frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} 6\right) 2\right] \frac{1}{2EJ} + \frac{6 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{EJ} = \frac{312}{EJ};$$

$$\sum \delta_{km} = (\bar{M}_S) \cdot (\bar{M}_S);$$

$$(M_P^0) \cdot (\bar{M}_S) = \frac{2}{3} 8 \cdot 8q \frac{0}{2EJ} = 0 = \sum \Delta_{kP}.$$

Las ecuaciones canónicas en números son:

$$852X_1 - 345X_2 - 144X_3 + 128q = 0; \quad (1)$$

$$-345X_1 + 258X_2 - 18X_3 + 0 = 0; \quad (2)$$

$$-144X_1 - 18X_2 + 216X_3 - 128q = 0. \quad (3)$$

Efectuamos sus resoluciones por diferentes métodos.

1. Por el método de Gauss

En la tabla 10.1 está escrito el ciclo directo. Por este ciclo tenemos las ecuaciones con matriz triangular:

$$852X_1 - 345X_2 - 144X_3 + 128q = 0; \quad (1)$$

$$118{,}29915X_3 - 76{,}30992X_3 + 51{,}83104q = 0; \quad (2')$$

$$142{,}43808X_3 - 72{,}93259q = 0. \quad (3^2)$$

Tabla 10.1

N° del renglón	N° de ecuación	Incógnitas			Términos independientes Δ_{kP}	Suma de los coeficientes y términos independientes ($q=1$)
		X_1	X_2	X_3		
1	(1)	852	−345	−144	$128q$	491
2			$\alpha_{12}=-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}=$ $=0,40493$	$\alpha_{13}=-\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}=$ $=0,16901$		
3	(2)	−345	258	−18	0	−105
4	α_{12} (1)	●	−139,70085	−58,30992	$51,83104q$	198,82063
5	(2^1)	●	118,29915	−76,30992	$51,83104q$	93,82063 / 93,82027
6		●		$\alpha_{23}=\frac{\delta'_{23}}{\delta'_{22}}=$ $=0,64506$		
7	(3)	−144	−18	216	$-128q$	−74
8	α_{13} (1)	●	●	−24,33744	$21,63328q$	82,98391
9	α_{23} (2^1)	●	●	−49,22448	$33,43413q$	60,51994
10	(3^2)			142,43808	$-72,93259q$	69,50385 / 69,50549

Resolviendo estas ecuaciones, desde abajo hacia arriba, comenzando por la última, obtenemos que

$$X_3=0,51203q;\quad X_2=-0,107846q;\quad X_1=-0,107364q.$$

Para una verificación, los valores X_1-X_3 encontrados los colocamos en las segunda y tercera ecuaciones canónicas:

$$345\cdot 0,107364q-258\cdot 0,107846q-18\cdot 0,51\,203q=$$
$$=37,04058q-37,040808q=0;$$
$$144\cdot 0,107364q+18\cdot 0,107846q+216\cdot 0,51203q-128q=$$
$$=128,00013q-128q=0.$$

2. *Por medio de los determinantes (10.16)*

$$D=\begin{vmatrix} 852 & -345 & -144 \\ -345 & 258 & -18 \\ -144 & -18 & 216 \end{vmatrix}=14\,356\,440;$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -128q & -345 & -144 \\ 0 & 258 & -18 \\ 128q & -18 & 216 \end{vmatrix}=-1\,541\,376q$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 852 & -128q & -144 \\ -345 & 0 & -18 \\ -144 & 128q & 216 \end{vmatrix}=-1548\,288q;$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 852 & -345 & -128q \\ -345 & 258 & 0 \\ -144 & -18 & 128q \end{vmatrix}=7\,350\,912q;$$

$$X_1=\frac{D_1}{D}=-0,10736477q; \quad X_2=\frac{D_2}{D}=-0,10784623q;$$

$$X_3=\frac{D_3}{D}=0,51202888q.$$

3. *Por medio de los coeficientes de influencia (10.12)*

Los coeficientes de influencia por el procedimiento de Gauss (10.14) son:

$$\beta_{33}=-1:\delta_{33}^{(2)}=-1:142,43808=-0,007020594;$$

$$\beta_{23}=\beta_{32}=\alpha_{23}\beta_{33}=0,64506\,(-0,007020594)=-0,004528704.$$

$$\beta_{13}=\beta_{31}=\alpha_{12}\beta_{23}+\alpha_{13}\beta_{33}=0,40493\,(-0,004528704)+$$
$$+0,16901\,(-0,007020594)=-0,003020359;$$

$$\beta_{22}=-1:\delta_{22}^{(1)}+\alpha_{23}\beta_{32}=-1:118,29915+$$
$$+0,64506\,(-0,004528704)=-0,011374432;$$

$$\beta_{12}=\beta_{21}=\alpha_{12}\beta_{22}+\alpha_{13}\beta_{32}=0,40493\,(-0,011374432)+$$
$$+0,16901\,(-0,004528704)=-0,0053712453;$$

$$\beta_{11}=-1:\delta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\alpha_{13}\beta_{31}=-1:852+$$
$$+0,40493\,(-0,0053712453)+0,16901\,(-0,003020359)=$$
$$=-0,0038591582.$$

Componemos la matriz de los coeficientes de influencia:

$$\| \beta_{ik} \| = \begin{Vmatrix} -0{,}0038591582 & -0{,}0053712453 & -0{,}003020359 \\ -0{,}0053712453 & -0{,}011374432 & -0{,}004528704 \\ -0{,}0030203590 & -0{,}004528704 & -0{,}007020594 \end{Vmatrix}.$$

La verificamos multiplicándola por la matriz de coeficientes de las ecuaciones canónicas:

$$\| \delta_{ik} \| = \begin{Vmatrix} 852 & -345 & -144 \\ -345 & 258 & -18 \\ -144 & -18 & 216 \end{Vmatrix}.$$

Es conocido que de la multiplicación de cualquier línea de la matriz β_{ik} por columnas (líneas) de signos contrarios de la matriz δ_{ik} deberán obtenerse ceros, pero por una columna (línea) del mismo signo, unidades negativas.

Multiplicamos la primera línea de la matriz β_{ik} por la primera columna de la δ_{ik}:

$$-0{,}0038591582 \cdot 852 + 0{,}0053712453 \cdot 345 + 0{,}003020359 \cdot 144 = \\ = -0{,}9999914619 \approx -1.$$

Multiplicamos la primera línea de la matriz β_{ik} por la segunda y tercera columnas de la matriz δ_{ik}:

$$0{,}0038591582 \cdot 345 - 0{,}0053712453 \cdot 258 + 0{,}003020359 \cdot 18 = \\ = 1{,}38577604 - 1{,}3857812874 = -0{,}0000052 \approx 0;$$

$$0{,}0038591582 \cdot 144 + 0{,}0053712453 \cdot 18 - 0{,}003020359 \cdot 216 = \\ = 0{,}6524011962 - 0{,}652397544 = 0{,}00000365 \approx 0.$$

Calculamos las incógnitas por los coeficientes de influencia:

$$X_1 = \beta_{11}\Delta_{1P} + \beta_{12}\Delta_{2P} + \beta_{13}\Delta_{3P} = -0{,}0038591582 \cdot 128q - \\ - 0{,}0053712453 \cdot 0 + 0{,}003020359 \cdot 128q = -0{,}1073663q;$$

$$X_2 = \beta_{21}\Delta_{1P} + \beta_{22}\Delta_{2P} + \beta_{23}\Delta_{3P} = -0{,}0053712453 \cdot 128q - \\ - 0{,}011374432 \cdot 0 + 0{,}004528704 \cdot 128q = -0{,}1078453q;$$

$$X_3 = \beta_{31}\Delta_{1P} + \beta_{32}\Delta_{2P} + \beta_{32}\Delta_{3P} = -0{,}003020359 \cdot 128q - \\ - 0{,}004528704 \cdot 0 + 0{,}007020594 \cdot 128q = 0{,}51203008q.$$

Los valores de las incógnitas son próximos a los determinados antes.

Calculamos los coeficientes de influencia por medio de determinantes (10.13):

$$D = 14\,356\,440;$$

$$\beta_{11} = (-1)^{(1+1+1)} \begin{vmatrix} 258 & -18 \\ -18 & 216 \end{vmatrix} : 14\,356\,440 = -0{,}003859174;$$

$$\beta_{12} = (-1)^{(1+2+1)} \begin{vmatrix} -345 & -144 \\ -18 & 216 \end{vmatrix} : 14\,356\,440 = -0{,}005371248;$$

$$\beta_{13} = (-1)^{(1+3+1)} \begin{vmatrix} -345 & -144 \\ 258 & -18 \end{vmatrix} : 14\,356\,440 = -0{,}0030203866;$$

$$\beta_{22} = (-1)^{(2+2+1)} \begin{vmatrix} 852 & -144 \\ -144 & 217 \end{vmatrix} : 14\,356\,440 = -0{,}011374407;$$

$$\beta_{23} = (-1)^{(2+3+1)} \begin{vmatrix} 852 & -144 \\ -345 & -18 \end{vmatrix} : 14\,356\,440 = -0{,}0045286993;$$

$$\beta_{33} = (-1)^{(3+3+1)} \begin{vmatrix} 852 & -345 \\ -345 & 258 \end{vmatrix} : 14\,356\,440 = -0{,}0070206123.$$

Adoptando luego los valores de las incógnitas hallados, por ejemplo, por el procedimiento de Gauss, construimos los diagramas corregidos (fig. 10.13*h-j*). El diagrama sumante se da en la fig. 10.13*k*.

Lo verificamos "multiplicándolo" por el diagrama sumante unitario representado en la fig. 10.13*g*:

$$(M_P)\cdot(\bar{M}_S) = -\frac{0{,}3235q\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}3\,\frac{1}{EJ} - \frac{0{,}3235q\cdot 5}{2}\cdot\frac{2}{3}3\,\frac{1}{EJ} -$$
$$-\frac{0{,}0029q\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{3}3\,\frac{1}{EJ} + \frac{0{,}0029q\cdot 4}{2}\cdot\frac{1}{3}6\,\frac{1}{EJ} -$$
$$-\frac{0{,}6413q\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}6\,\frac{1}{2EJ} - \frac{0{,}6413q\cdot 3}{2}\left(\frac{2}{3}6+\frac{1}{3}9\right)\frac{1}{EJ} -$$
$$-\frac{0{,}9648q\cdot 3}{2}\left(\frac{1}{3}6+\frac{2}{3}9\right)\frac{1}{EJ} + \frac{3{,}3957q\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}3\,\frac{1}{EJ} +$$
$$+\frac{4{,}3605q\cdot 8}{2}\left(-\frac{2}{3}6+\frac{1}{3}6\right)\frac{1}{2EJ} +$$
$$+\frac{3{,}0722q\cdot 8}{2}\left(-\frac{1}{3}6+\frac{2}{3}6\right)\frac{1}{2EJ} + \frac{2}{3}8\cdot 8q\cdot 0\cdot\frac{1}{2EJ} +$$
$$+\frac{3{,}0722\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}6\,\frac{1}{EJ} = (-40{,}913925q) + 40{,}9149q)\,\frac{1}{EJ} \approx 0.$$

(la precisión de la resolución es muy buena, hasta excesiva). Los diagramas de Q_P y N_P se construyen como en el ejemplo 10.6.

Si se exige determinar un desplazamiento cualquiera en un pórtico hiperestático, entonces, recordemos que la fuerza unitaria no se debe aplicar al pórtico dado sino a *cualquier* sistema básico obtenido de él.

Ejemplo 10.11. Construir el diagrama de los momentos flectores en un pórtico simétrico (fig. 10.14*a*). Para utilizar la simetría el sistema básico deberá ser simétrico. Lo tomamos de la fig. 10.14*b*.

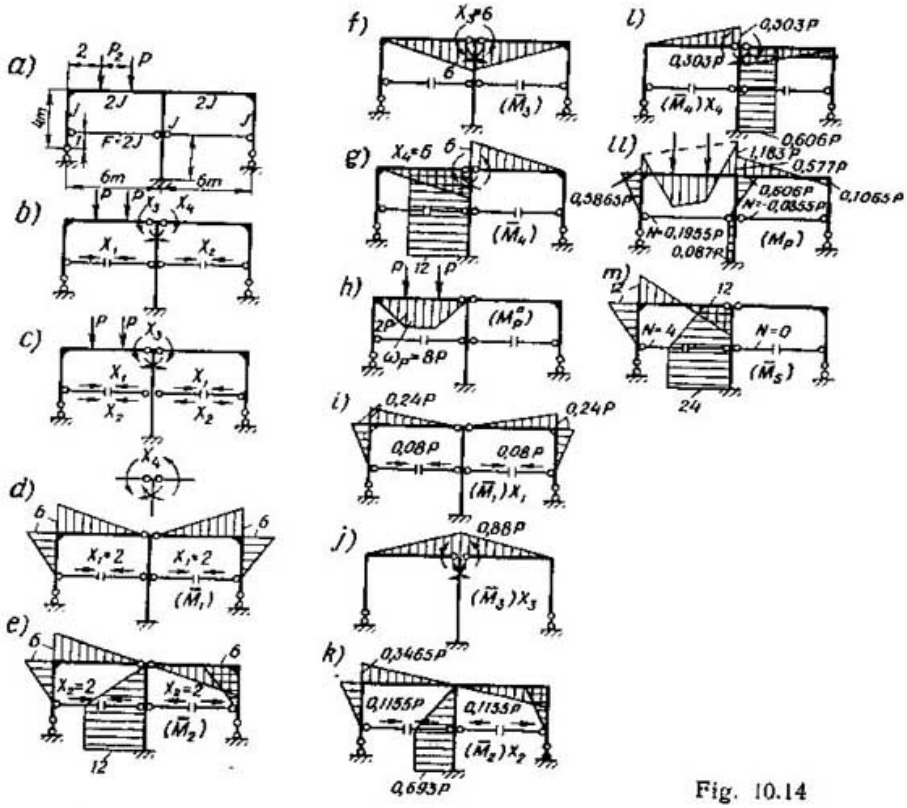


Fig. 10.14

Efectuamos la agrupación de las incógnitas por parejas: X_1 y X_3 serán simétricas y X_2 y X_4, antisimétricas (fig. 10.14*c*).

Para las incógnitas simétricas el sistema de ecuaciones canónicas toma la forma:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0;$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0$$

y, para las incógnitas antisimétricas:

$$\delta_{22}X_2 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0;$$
$$\delta_{42}X_2 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0.$$

Los diagramas unitarios se dan en la fig. 10.14*d*—*g* y, el de carga, en la 10.14*h*.

Calculamos los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11}=\left(\frac{6\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,6\,\frac{1}{EJ}+\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}\,6\,\frac{1}{2EJ}+\frac{2\cdot 6\cdot 2}{EJ}\right)2=\frac{168}{EJ}.$$

Aquí, el último sumando tiene en cuenta la deformación del tensor:

$$\delta_{13}=\left(-\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{1}{3}\,6\,\frac{1}{2EJ}\right)2=-36:EJ;$$

$$\delta_{33}=\left(\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}\,6\,\frac{1}{2EJ}\right)2=72:EJ;$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{8P\cdot 3}{2EJ};\quad \Delta_{3P}=\frac{8P\cdot 2}{2EJ};$$

$$\delta_{22}=\delta_{11}+\left(\frac{12\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,12+12\cdot 3\cdot 12\right)\frac{1}{EJ}=744:EJ;$$

$$\delta_{24}=\delta_{13}+\left(\frac{12\cdot 3}{2}+12\cdot 3\right)\frac{12}{EJ}=612:EJ;$$

$$\delta_{44}=\delta_{33}+\frac{12\cdot 6\cdot 12}{EJ}=936:EJ;$$

$$\Delta_{2P}=-\frac{8P\cdot 3}{2EJ};\quad \Delta_{4P}=\frac{8P\cdot 3}{2EJ}.$$

Escribimos el sistema de ecuaciones canónicas:

$$\begin{aligned}
168X_1-36X_3-12P&=0;\\
-36X_1+72X_3+12P&=0;\\
744X_2+612X_4-12P&=0;\\
612X_2+936X_4+12P&=0.
\end{aligned}$$

Se obtienen los siguientes valores de las incógnitas: $X_1=0{,}04P$; $X_3=-0{,}1467P$; $X_2=-0{,}0505P$; $X_4=0{,}05773P$. Los diagramas corregidos se dan en la fig. 10.14*i*—*l* y, el sumante, en la 10.14*m*.

Verificamos el diagrama sumante "multiplicándolo" por el sumante unitario presentado en la fig. 10.14*n*:

$$\begin{aligned}
(M_P)\cdot(\bar{M}_S)&=\frac{0{,}5865P\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,12\,\frac{1}{EJ}+\\
&+\frac{0{,}5865P\cdot 6}{2}\left(\frac{2}{3}\,12-\frac{1}{3}\,12\right)\frac{1}{2EJ}+\\
&+\frac{1{,}183P\cdot 6}{2}\left(\frac{1}{3}\,12-\frac{2}{3}\,12\right)\frac{1}{2EJ}+\frac{8P\cdot 0}{2EJ}+\\
&+\frac{0{,}606P\cdot 3}{2}\left(-\frac{2}{3}\,12-\frac{1}{3}\,24\right)\frac{1}{EJ}+\frac{0{,}087P\cdot 3}{2}\left(\frac{1}{3}\,12+\frac{2}{3}\,24\right)\frac{1}{EJ}+\\
&+\frac{0{,}087P\cdot 3\cdot 24}{EJ}+0{,}1955P\cdot 6\cdot 4\,\frac{1}{EJ}=(21{,}7776-21{,}642)\,\frac{1}{EJ}\approx 0.
\end{aligned}$$

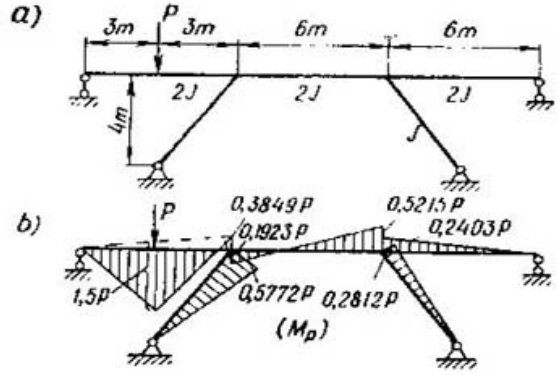


Fig. 10.15

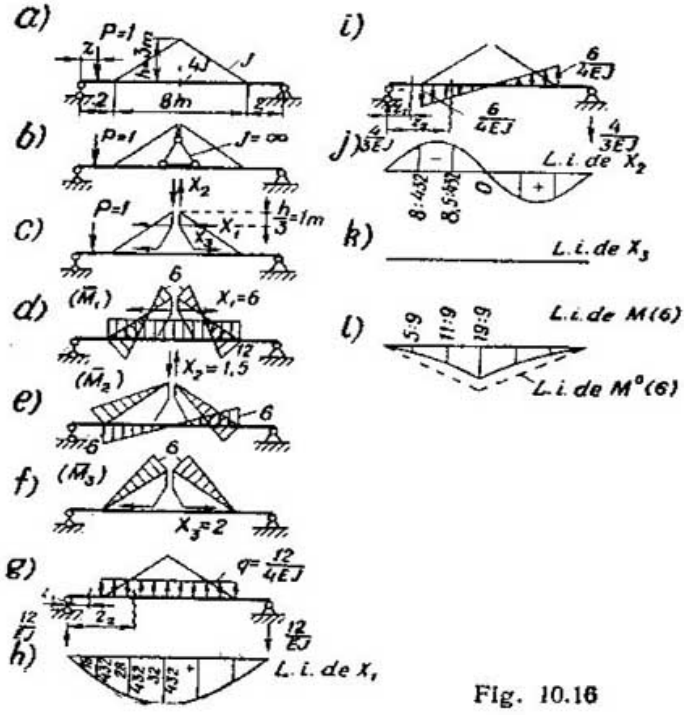


Fig. 10.16

Problema 10.12. Construir el diagrama de los momentos flectores en el pórtico (fig. 10.15*a*). Observación: emplear un sistema simétrico.

Respuesta: La fig. 10.15*b*.

Ejemplo 10.13. Construir las líneas de influencia de las incógnitas básicas y del momento flector en la sección media del tramo del sistema representado en la fig. 10.16*a*.

Transformamos el sistema introduciéndole voladizos infinitamente rígidos (fig. 10.16*b*). El sistema básico se da en la fig. 10.16*c* y, los diagramas convencionales unitarios, en la 10.16*d*—*f*. Para tal sistema básico todos los desplazamientos suplementarios son iguales a cero. Las ecuaciones de las líneas de influencia básicas serán: l. i. de $X_1 = -\delta_{P1} : \delta_{11}$; l. i. de $X_2 = -\delta_{P2} : \delta_{22}$; y l. i. de $X_3 = \delta_{P3} : \delta_{33}$.

Calculamos los coeficientes de las ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11} = \left[\frac{6 \cdot 5}{2}\left(\frac{2}{3}6 - \frac{1}{3}12\right) + \frac{12 \cdot 5}{2}\left(\frac{2}{3}12 - \frac{1}{3}6\right)\right]\frac{2}{EJ} + \frac{12 \cdot 8 \cdot 12}{4EJ} = \frac{648}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \left(\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3}6\,\frac{11}{EJ}\right)2 + \left(\frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3}6\,\frac{1}{4EJ}\right)2 = \frac{144}{EJ};$$

$$\delta_{33} = \left(\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3}6\,\frac{1}{EJ}\right)2 = \frac{120}{EJ}.$$

Determinamos los desplazamientos δ_{P1}, δ_{P2} y δ_{P3} por medio de la carga convencional (ficticia). La viga convencional, para nuestro caso, será una viga de dos apoyos.

La línea de influencia de $X_1 = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{P1}EJ}{648}$ (fig. 10.16 *g*, *h*).

1er sector $(0 \leqslant z \leqslant 2)$:

$$\text{l. i. de } X_1 = 8z : 432;$$

2° sector $(2 \leqslant z \leqslant 10)$:

$$\text{l. i. de } X_1 = \left[12z - \frac{3(z-2)^2}{2}\right] : 648 = [8z - (z-2)^2] : 432.$$

Por estas ecuaciones se construyó la línea de influencia de X_1, la cual ha de ser simétrica.

La línea de influencia de $X_2 = -\frac{\delta_{P2}}{\delta_{22}} = -\delta_{P2}EJ : 144$ (fig. 10.16 *i*, *j*).

1er sector $(0 \leqslant z \leqslant 2)$:

$$\text{l. i. de } X_2 = -4z : 432;$$

2° sector $(2 \leqslant z \leqslant 10)$:

$$\text{l. i. de } X_2 = -\left[\frac{4}{3}z - \frac{6}{4}\cdot\frac{(z-2)^2}{2} + \frac{6}{16}\cdot\frac{(z-2)^3}{6}\right] : 144.$$

Por estas ecuaciones se construyó la línea de influencia de X_2, la cual ha de ser antisimétrica.

La línea de influencia de $X_3 = -\frac{\delta_{P3}}{\delta_{33}} = -\frac{\delta_{P3}EI}{120}$.

Por cuanto los momentos flectores $\bar{M}_3$ en la viga son iguales a cero, también lo son los desplazamientos δ_{P3} y la línea de influencia de X_3 a lo largo de toda la viga.

La línea de influencia del momento flector en el medio del tramo de la viga es

$$\text{l. i. de } M(6) = (\text{l. i. de } X_1)(-12) + (\text{l. i. de } X_2)\,0 + \text{l. i. de } M^{\circ}(6).$$

1er sector $(0 \leqslant z \leqslant 2)$:

$$\text{l. i. de } M(6) = \frac{8z}{432}(-12) + \frac{1}{2}z;$$

2° sector $(2 \leqslant z \leqslant 10)$:

$$\text{l. i. de } M(6) = \frac{8z-(z-2)^2}{432}(-12) + \frac{1}{2}z.$$

Por estas ecuaciones se construyó la l. i. de $M(6)$ (fig. 10.16*l*).

Ejemplo 10.14. Obtener la ecuación general de la línea de influencia de la incógnita básica X_1 para un sistema de viga de estructura enrriostrada (fig. 10.17*a*) y construirla para el caso particular, cuando $a = 4$ m, $b = 6$ m y $k = 4{,}5$, despreciando las fuerzas longitudinales.

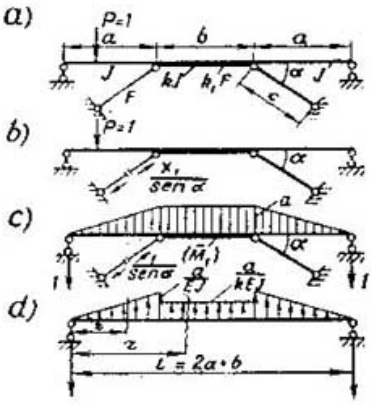


Fig. 10.17

El sistema de viga de estructura enrriostrada es monohiperestático. Posee tal propiedad que para cualquier posición de la carga los esfuerzos en las riostras son iguales entre sí.

El cálculo lo efectuamos tomando en cuenta las fuerzas axiles y determinando las fuerzas internas por el estado indeformado del sistema. Tomamos como básico el sistema con la riostra seccionada (fig. 10.17*b*) y, por incógnita X_1, la proyección vertical del esfuerzo en la riostra (fig. 10.17*b*). El diagrama de los momentos debidos a $X_1 = 1$ se da en la fig. 10.17*c*.

El desplazamiento δ_{11} debido a la flección es

$$\delta_{11}^{M} = \frac{a^3}{3EJ}\left(2 + \frac{3c}{ak}\right).$$

El desplazamiento δ_{11} debido a la compresión es

$$\delta_{11}^{N} = \frac{2c}{\operatorname{sen}^2 \alpha EF} \frac{b}{\operatorname{tg}^2 \alpha EFk_1}.$$

El desplazamiento completo δ_{11} lo escribimos así:

$$\delta_{11} = \delta_{11}^{M} + \delta_{11}^{N} = (1 + \mu^*) \frac{a^3}{3EJ} \left(2 + \frac{3b}{ak}\right). \qquad (10.23)$$

$$\text{donde } \mu^* = \delta_{11}^{N} : \delta_{11}^{M}.$$

La línea de influencia es

$$X_1 = -\delta_{P1} : \delta_{P11}. \qquad (10.24)$$

Determinamos los desplazamientos δ_{P1} por medio de la carga convencional (fig. 10.17*d*):

1er sector $(0 \leqslant z \leqslant a)$:

$$\delta_{P1} = -\frac{a}{2EJ}\left(a + \frac{b}{k}\right) z - \frac{z^3}{6EJ};$$

$$\text{l. i. de } X_1 = \frac{\frac{a}{2}\left(a + \frac{b}{k}\right) z - \frac{z^3}{6}}{(1 + \mu^*)\frac{a^3}{3}\left(2 + \frac{3b}{ak}\right)}; \qquad (10.25)$$

luego de algunas transformaciones

$$\text{l. i. de } X_1 = \frac{1}{2(1 + \mu^*)}\left[u_1 + \frac{u_1(1 - u_1^2)}{2 + \frac{3b}{ak}}\right], \qquad (10.26)$$

donde $u_1 = \frac{z}{a}$;

2° sector $(a \leqslant z \leqslant a + b)$:

$$\delta_{P1} = -\frac{a}{2EJ}\left(a + \frac{b}{k}\right) z + \frac{a^2}{2EJ}\left(z - \frac{2}{3}a\right) + \frac{a}{kEJ}\frac{(z-a)^2}{2};$$

$$\text{l. i. de } X_1 = \frac{\frac{a}{2}\left(a + \frac{b}{k}\right) z - \frac{a^2}{2}\left(z - \frac{2}{3}a\right) - \frac{a}{k} \cdot \frac{(z-a)^2}{2}}{(1 + \mu^*)\frac{a^3}{3}\left(2 + \frac{3b}{ak}\right)}. \qquad (10.27)$$

Luego de las transformaciones

$$\text{l. i. de } X_1 = \frac{1}{2(1 + \mu^*)}\left(1 + \frac{3b^2 u_2 (1 - u_2)}{ka^2\left(2 + \frac{3b}{ak}\right)}\right); \qquad (10.28)$$

donde $u_2 = \frac{z - a}{b}$.

Para $a = 4$ m; $b = 6$ m y $k = 4{,}5$ tenemos:

1er sector $(0 \leqslant z \leqslant 4)$. Por (10.26) para $\mu^* = 0$.

$$\text{l. i. de } X_1 = \frac{1}{2}\left[u_1 + \frac{u_1(1 - u_1^2)}{3}\right];$$

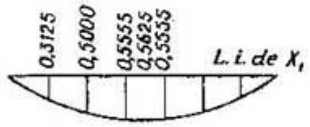


Fig. 10.18

2° sector $(4 \leqslant z \leqslant 10)$. Por (10.28)

$$\text{l. i. de } X_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{u_2(1-u_2)}{2}\right].$$

La línea de influencia ha sido construida en la fig. 10.18.

Ejemplo 10.15. Construir en un pórtico (fig. 10.19*a*) el diagrama de los momentos flectores debidos a la temperatura dada. La sección es simétrica y su altura 0,5 m.

El pórtico es monohiperestático. El básico se da en la

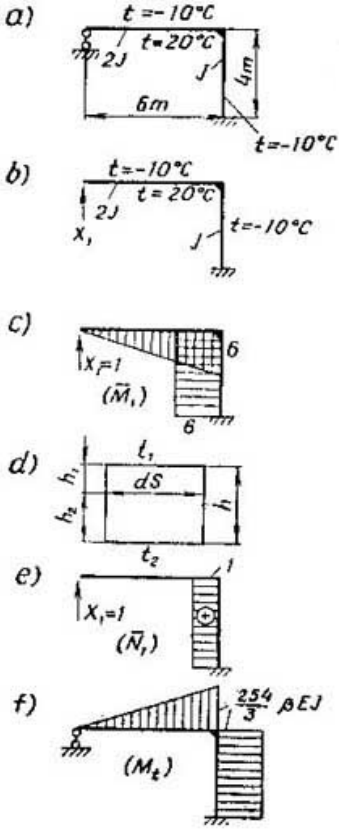


Fig. 10.19

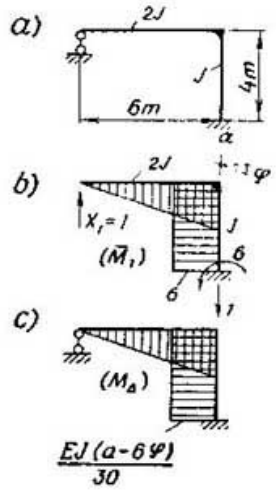


Fig. 10.20

fig. 10.19*b*. La ecuación canónica es:

$$\delta_{11}X_1 = \Delta_{1t} = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}6\,\frac{1}{2EJ} + \frac{6\cdot 4\cdot 6}{EJ} = 180 : EJ.$$

El desplazamiento debido a la temperatura se determina por la fórmula (8.2) (fig. 10.19*d*).

Para computar los alargamientos de las barras, debidos a la temperatura, es necesario disponer del diagrama unitario de las

fuerzas axiles (fig. 10.19*e*):

$$\Delta_{1t} = \frac{\beta}{0{,}5}\left(-10\,\frac{0{,}5}{2} + 20\,\frac{0{,}5}{2}\right)(1 \cdot 4) + \beta\,\frac{20+10}{0{,}5}\left(\frac{6 \cdot 6}{2} + 6 \cdot 4\right) = 2540\,\beta.$$

$$\text{Ahora, } X_1 = -\Delta_{1t} : \delta_{11} = -\frac{127}{9}\,\beta EJ.$$

El diagrama de los momentos flectores debidos a la temperatura se da en la fig. 10.19*f*. Verificamos el diagrama obtenido de M_t por la fórmula (10.18), la cual, por cuanto para el cálculo de δ_{11} se consideró solamente la deformación de flexión, o sea, el diagrama de $\bar{M}_1$, en este caso será:

$$(M_t) \cdot (\bar{M}_1) = -\Delta_{1t};$$

$$(M_t) \cdot (\bar{M}_1) = -\frac{254}{3}\,\beta EJ\,\frac{6}{2} \cdot \frac{2}{3}\,6\,\frac{1}{2EJ} - \frac{254\beta EJ}{3}\,4 \cdot 6\,\frac{1}{EJ} =$$

$$= -2540\beta = -\Delta_{1t}. \qquad (10.29)$$

Ejemplo 10.16. Construir el diagrama de los momentos flectores en el pórtico, debidos al desplazamiento del empotramiento (fig. 10.20*a*). La ecuación canónica es:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0;$$

$\delta_{11} = 180 : EJ$ (véase el ejemplo 10.15).

El término independiente de la ecuación canónica lo determinamos por la fórmula (8.3):

$$\Delta_{1\Delta} = -(1 \cdot a - 6\varphi).$$

La incógnita es: $X_1 = -\Delta_{1\Delta} : \delta_{11} = (a - 6\varphi) EJ : 180$ Supongamos que $X_1 > 0$. Entonces, tendremos el diagrama buscado por la fig. 10.20*c*. Lo verificamos por la fórmula (10.19), la cual, por cuanto para el cálculo de δ_{11} sólo se prestó atención a la deformación de flexión, en este caso será:

$$(M_\Delta) \cdot (\bar{M}_1) = -\Delta_{1\Delta}; \qquad (10.30)$$

$$(M_\Delta) \cdot (\bar{M}_1) = \frac{EJ\,(a - 6\varphi)\,6}{30 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3}\,6\,\frac{1}{2EJ} +$$

$$+ \frac{EJ\,(a - 6\varphi)}{30}\,4 \cdot 6\,\frac{1}{EJ} = a - 6\varphi = -\Delta_{1\Delta}.$$

CAPITULO 11 * CALCULO DE VIGAS CONTINUAS

§ 11.1. CALCULO BAJO CARGA CONSTANTE. Durante la resolución de los problemas, convenimos en numerar los apoyos de izquierda a derecha, comenzando por cero, y dando a cada tramo el número de su apoyo derecho.

El sistema básico standard lo obtenemos con introducción de articulaciones sobre cada uno de los apoyos y la sustitución de los vínculos que, en este caso, son eliminados, por los momentos de apoyo "incógnitos". En el sistema básico elegido de tal modo, cada tramo se considera como viga isostática, de doble apoyo, bajo la carga dada y los momentos incógnitos (fig. 11.1*a*).

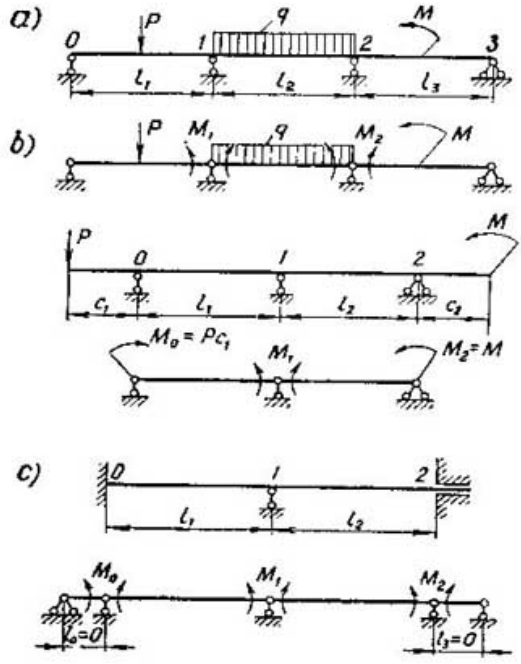


Fig. 11.1

Observaciones: 1. Para la formación del sistema básico, las partes voladizas se quitan. La acción de los voladizos quitados sobre la viga se sustituye por los momentos conocidos (fig. 11.1*b*).

2. Los empotramientos se sustituyen convencionalmente por tramos equivalentes o complementarios de longitud infinitesimal (fig. 11.1*c*).

El vínculo analítico entre las incógnitas y la carga dada se expresa en forma de ecuaciones de tres momentos:

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} =$$

$$= -6\left(\frac{\omega_i a_i}{l_i} \cdot \frac{J_0}{J_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \cdot \frac{J_0}{J_{i+1}}\right),$$

donde

M_{i-1}, M_i y M_{i+1} son tres momentos de apoyo sucesivos; son positivos si originan tracción en las fibras inferiores;

l_i, la longitud del tramo;

J_i, el momento de inercia de la sección transversal de la viga; dentro de los límites del tramo la magnitud J_i es constante;

J_0, la magnitud arbitraria poseedora de la dimensión del momento de inercia;

$\lambda_i = l_i \frac{J_0}{J_i}$, la longitud de cálculo del tramo;

ω_i, el área del diagrama de los momentos flectores debidos a la carga dada en el tramo del sistema básico; tiene el signo del diagrama, de los momentos;

a_i, la distancia desde el apoyo izquierdo hasta el centro de gravedad del diagrama de los momentos flectores;

b_i, la distancia desde el apoyo derecho hasta el centro de gravedad del diagrama de los momentos flectores.

El número de ecuaciones de tal tipo concuerda con el grado de hipersestaticidad de la viga continua y es igual a la cantidad de apoyos intermedios en el sistema básico.

Ejemplo 11.1. Escribir ecuaciones que permitan determinar los momentos de apoyo incógnitos en la viga continua de la fig. 11.2*a*.

Construimos el sistema básico. Incorporamos articulaciones a los apoyos intermedios y les aplicamos los momentos de apoyo incógnitos M_1 y M_2 (fig. 11.2*b*). El sistema de ecuaciones de tres momentos tiene el aspecto:

$$2(\lambda_1 + \lambda_2) M_1 + \lambda_2 M_2 = -6\left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} \cdot \frac{J_0}{J_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \cdot \frac{J_0}{J_2}\right);$$

$$\lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3) M_2 = -6\left(\frac{\omega_2 a_2}{l_2} \cdot \frac{J_0}{J_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3} \cdot \frac{J_0}{J_3}\right). \quad (11.1)$$

Calculamos los coeficientes de las incógnitas. Suponiendo que $J_0 = J$, encontramos que

$$\frac{J_0}{J_1} = 3, \quad \frac{J_0}{J_2} = \frac{J_0}{J_3} = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_1 = 15 \cdot 3 = 45 \text{ m}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 20 \text{ m}.$$

Para la determinación de las expresiones que entran en el segundo miembro, construimos en los tramos del sistema básico el diagrama de los momentos de M_P^0 debidos a la carga dada (fig. 11.2*c*). Señalamos que las expresiones $\frac{\omega_i a_i}{l_i}$ y $\frac{\omega_i b_i}{l_i}$, que se hallan en el segundo miembro son, desde el punto de vista cinemático, magnitudes proporcionales a los ángulos de giro de las secciones

extremas del tramo, debidos a la acción de la carga dada. La interpretación estática de estas magnitudes se muestra en la fig. 11.2*d*. En este caso, se consideran como reacciones de apoyo

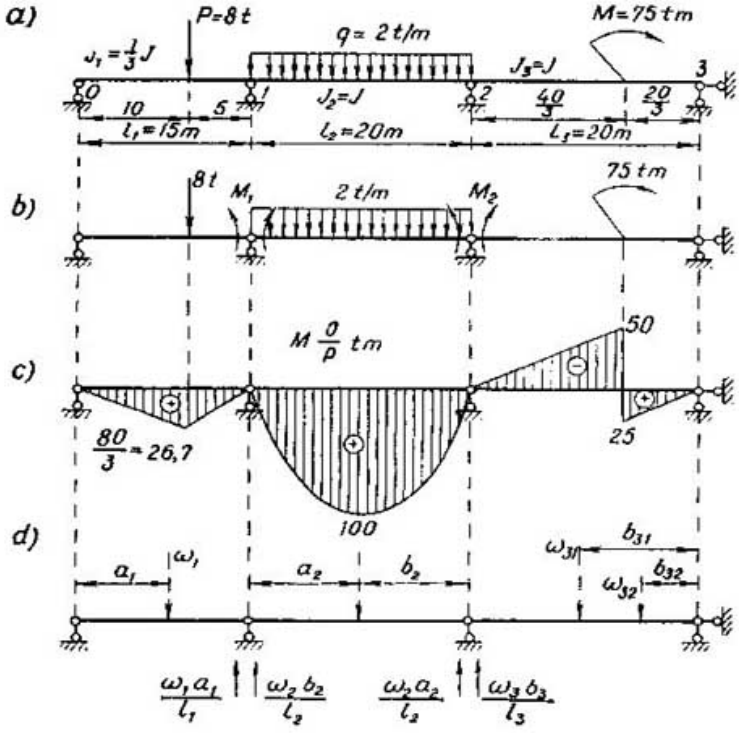


Fig. 11.2

debidas al diagrama de los momentos de M_P^0, tomado por carga. Teniendo en cuenta esto, hallamos, que
para el 1er tramo

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{80}{3} 15 = 200 \text{ tfm}^2; \quad a_1 = \frac{10 + 15}{3} = \frac{25}{3} \text{ m};$$

$$\frac{\omega_1 a_1}{l_1} = \frac{1000}{9} \text{ tfm}^2;$$

para el 2° tramo

$$\omega_2 = \frac{2}{3} 100 \cdot 20 = \frac{4000}{3} \text{ tfm}^2; \quad a_2 = b_2 = 10 \text{ m};$$

$$\frac{\omega_2 a_2}{l_2} = \frac{\omega_2 b_2}{l_2} = \frac{2000}{3} \text{ tfm}^2;$$

en el 3er tramo:
para la parte negativa del diagrama de momentos

$$\omega_{31} = -\frac{1}{2}\,50\,\frac{40}{3} = -\frac{1000}{3}\ \text{tfm}^2; \quad b_{31} = \frac{20}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{40}{3} = \frac{100}{9}\ \text{m};$$

$$\frac{\omega_{31} b_{31}}{b_3} = -\frac{5000}{27}\ \text{tfm}^2;$$

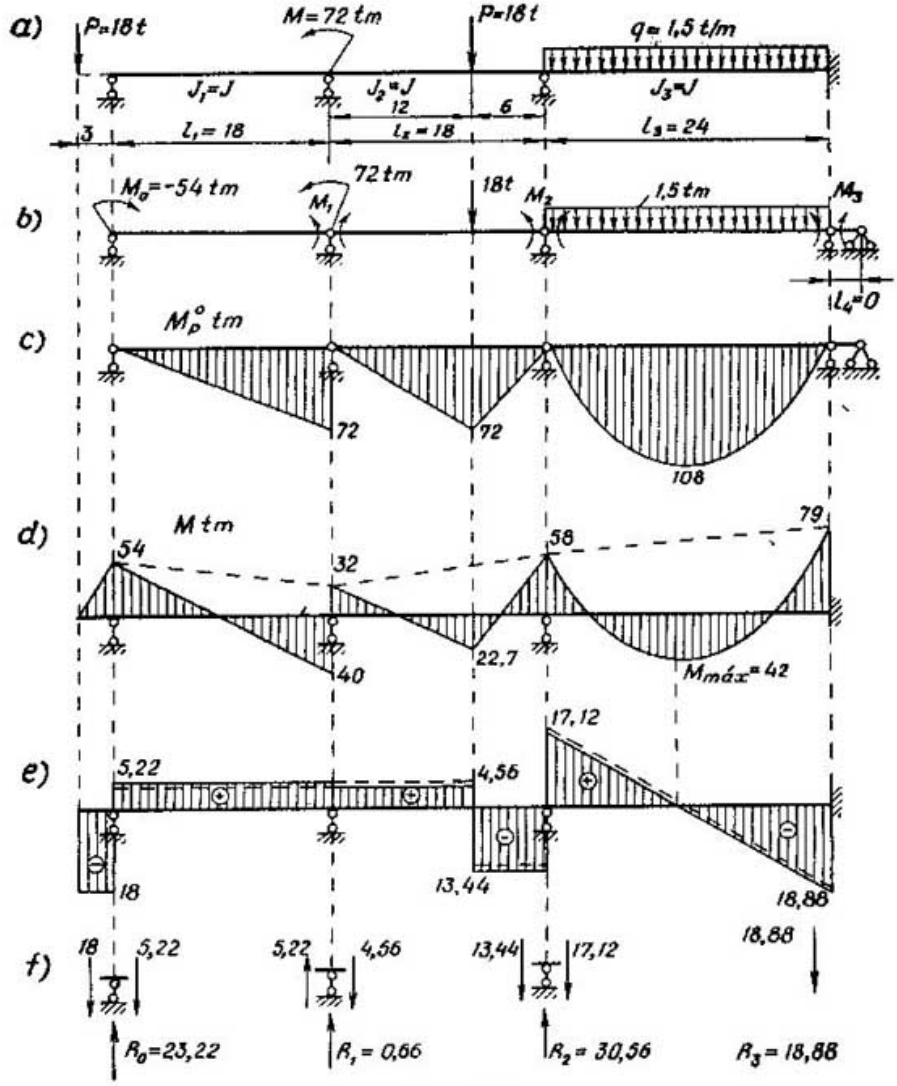


Fig. 11.3

para la parte positiva del diagrama de momentos

$$\omega_{32} = \frac{1}{2} 25 \frac{20}{3} = \frac{250}{3} \text{ tfm}^2; \quad b_{32} = \frac{2}{3} \cdot \frac{20}{3} = \frac{40}{9} \text{ m};$$

$$\frac{\omega_{32} b_{32}}{l_3} = \frac{500}{27} \text{ tfm}^2;$$

$$\frac{\omega_3 b_3}{l_3} = \frac{\omega_{31} b_{31}}{l_3} + \frac{\omega_{32} b_{32}}{l_3} = -\frac{5000}{27} + \frac{500}{27} = -\frac{500}{3} \text{ tfm}^2.$$

Es útil descomponer el diagrama de momentos complejo en partes simples, cuyas superficies y centros de gravedad sean bien conocidos.

Colocando los valores de los coeficientes en el sistema (11.1), obtenemos que

$$2(45 + 20) M_1 + 20 M_2 = -6\left(\frac{1000}{9} 3 + \frac{2000}{3} 1\right);$$

$$20 M_1 + 2(20 + 20) M_2 = -6\left(\frac{2000}{3} 1 - \frac{500}{3} 1\right).$$

Después de las transformaciones, las ecuaciones toman la siguiente forma:

$$13 M_1 + 2 M_2 = -600; \quad 2 M_1 + 8 M_2 = -300. \qquad (11.2)$$

Ejemplo 11.2. Construir los diagramas de M y Q y hallar las reacciones de apoyo R para la viga que se muestra en la fig. 11.3*a*.

Construimos el sistema básico (fig. 11.3*b*). Quitamos el voladizo y sustituimos su acción por el momento $M_0 = -54$ tfm. Cambiamos el empotramiento por el tramo complementario $l_4 = 0$. Insertamos articulaciones en los apoyos intermedios y aplicamos los momentos incógnitas M_1, M_2 y M_3. Consideramos M_0 como momento de apoyo conocido. Referimos el momento dado sobre el primer apoyo, $M = 72$ tfm a la carga de cualquiera de los tramos contiguos al apoyo, por ejemplo, del primero. Para una viga de sección constante $\frac{J_0}{J_i} = 1$, $\lambda_i = l_i$. El sistema de ecuaciones de tres momentos toma la forma:

$$\left.\begin{aligned} l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 &= -6\left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2}\right); \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) M_2 + l_3 M_3 &= -6\left(\frac{\omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3}\right); \\ l_3 M_2 + 2(l_3 + 0) M_3 &= -6\left(\frac{\omega_3 a_3}{3} + 0\right). \end{aligned}\right\} \qquad (11.3)$$

A fin de determinar las expresiones que están en el segundo miembro construimos en el sistema básico el diagrama de los momentos debidos a la carga dada (fig. 11.3*c*) Del diagrama

de M_P^0 hallamos:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2} 72 \cdot 18 = 648 \text{ tfm}^2; \quad a_1 = \frac{2}{3} 18 = 12 \text{ m};$$

$$\frac{\omega_1 a_1}{l_1} = 432 \text{ tfm}^2;$$

$$a_2 = \frac{12 + 18}{3} = 10 \text{ m}; \quad b_2 = \frac{6 + 18}{3} = 8 \text{ m};$$

$$\frac{\omega_2 a_2}{l_2} = 360 \text{ tfm}^2; \quad \frac{\omega_2 b_2}{l_2} = 288 \text{ tfm}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{2}{3} 108 \cdot 24 = 1728 \text{ tfm}^2; \quad a_3 = b_3 = 12 \text{ m};$$

$$\frac{\omega_3 a_3}{l_3} = \frac{\omega_3 b_3}{l_3} = 864 \text{ tfm}^2.$$

Colocamos los valores obtenidos en el sistema (11.3):

$$-18 \cdot 54 + 2(18 + 18) M_1 + 18 M_2 = -6(432 + 288);$$
$$18 M_1 + 2(18 + 24) M_2 + 24 M_3 = -6(360 + 864);$$
$$24 M_2 + 2 \cdot 24 M_3 = -6 \cdot 864.$$

Después de las transformaciones el sistema de ecuaciones toma la forma:

$$\left.\begin{aligned} 4M_1 + M_2 &= -186; \\ 3M_1 + 14M_2 + 4M_3 &= -1224; \\ M_2 + 2M_3 &= -216. \end{aligned}\right\} \qquad (11.4)$$

Escribimos las soluciones del sistema (11.4) en la forma $M_i = \frac{D_i}{D}$, donde D es el determinante del sistema,

D_i, el determinante que obtenemos del determinante D, sustituyendo su i^{ma} columna por la de los términos independientes ubicados en el segundo miembro del sistema de ecuaciones.

Efectuando el cálculo, hallamos que

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 90;$$

$$M_1 = \frac{\begin{vmatrix} -186 & 1 & 0 \\ -1224 & 14 & 4 \\ -216 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{90} = -32 \text{ tfm}; \quad M_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -186 & 0 \\ 3 & -1224 & 4 \\ 0 & +216 & 2 \end{vmatrix}}{90} = -58 \text{ tfm};$$

$$M_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -186 \\ 3 & 14 & -1224 \\ 0 & 1 & -216 \end{vmatrix}}{90} = -79 \text{ tfm}.$$

Sabiendo los valores de los momentos de apoyo, construimos el diagrama de los momentos en la viga continua dada. El diagrama definitivo en cada tramo es la suma algebraica de los diagramas debidos a los valores de los momentos de apoyo M_{i-1} y M_i hallados del diagrama de M_P^0 construido con anterioridad (fig. 11.3*d*). Efectuamos la construcción en el siguiente orden:

1) trazamos sobre cada apoyo, teniendo en cuenta el signo, el valor del momento de apoyo;

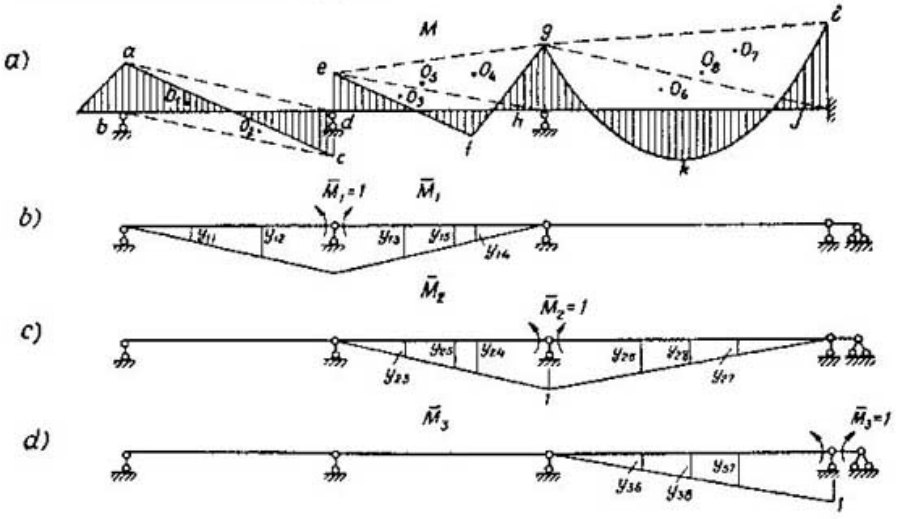


Fig. 11.4

2) unimos con una línea punteada, a la cual vamos a llamar línea de los momentos de apoyo, las cúspides de las ordenadas trazadas;

3) desde las líneas de los momentos de apoyo trazamos las ordenadas del diagrama de M_P^0, como si "colgaramos" los diagramas de M_P^0 de las líneas de los momentos de apoyo;

4) al sumar, sombreamos aquellas partes donde los diagramas no se superponen unos a otros;

5) al diagrama construido de tal modo le agregamos el de los momentos de los voladizos.

Determinamos los momentos flectores en una sección cualquiera del tramo por la fórmula

$$M(z) = M_P^0(z) + M_{i-1} + (M_i - M_{i-1})\frac{z}{l_i} \qquad (11.5)$$

donde $M_P^0(z)$ es la expresión analítica de los momentos flectores debidos a la carga dada en el tramo del sistema básico;

M_{i-1} y M_i, los momentos de apoyo en el tramo examinado.

Para nuestro problema estas expresiones toman la forma:
1er tramo: $0 \leqslant z \leqslant 18$;

$$M(z) = 4z - 54 + (-32 + 54)\frac{z}{18} = -54 + 5{,}22z;$$

2º tramo: $0 \leqslant z \leqslant 12$;

$$M(z) = +6z - 32 + [-58 - (-32)]\frac{z}{18} = -32 + 4{,}56z;$$

$12 \leqslant z \leqslant 18$;

$$M(z) = 6z - 18(z - 12) - 32 + [-58 - (-32)]\frac{z}{18} = 184 - 13{,}44z;$$

3er tramo: $0 \leqslant z \leqslant 24$;

$$M(z) = 18z - 0{,}75z^2 - 58 + [-79 - (-58)]\frac{z}{24} =$$

$$= -58 + 17{,}12z - 0{,}75z^2.$$

Diferenciando la función (11.5), obtenemos la expresión analítica de la fuerza transversal en una sección arbitraria del i^{mo} tramo:

$$Q = \frac{dM}{dz} = Q_P^0(z) + (M_i - M_{i-1})\frac{1}{l_i}. \qquad (11.6)$$

Aquí, $Q_P^0(z)$ es la fuerza transversal debida a la carga dada en el tramo del sistema básico;

$(M_i - M_{i-1})\frac{1}{l_i}$, la fuerza transversal debida a los momentos de apoyo del tramo examinado.

Para la construcción del diagrama de Q (fig. 11.3*e*), es necesario:

construir el diagrama de las fuerzas transversales en el sistema básico (la línea punteada);

agregar a cada diagrama la magnitud, constante para cada tramo, igual a la diferencia entre los momentos de apoyo derecho e izquierdo, dividida por la longitud del tramo;

agregar al diagrama construido, el de las fuerzas transversales sobre la parte volada.

Hallamos las fuerzas transversales por la fórmula (11.6):

1er tramo: $0 \leqslant z \leqslant 18$; $Q = 5{,}22$ tf;

2º tramo: $0 \leqslant z \leqslant 12$; $Q = 4{,}56$ tf;

$12 \leqslant z \leqslant 18$; $Q = -13{,}44$ tf;

3er tramo: $0 \leqslant z \leqslant 24$; $Q = 17{,}12 - 1{,}5z$.

De las condiciones de equilibrio de un trozo infinitesimal, sobre el i^{mo} apoyo (fig. 11.3*f*), determinamos las reacciones de apoyo R_i, como la diferencia entre las fuerzas transversales al principio del $(i \pm 1)^{mo}$ y al final del i^{mo} tramos, por la fórmula

$R_i = Q_{i+1}(0) - Q_i(l_i)$:

$$R_0 = 5{,}22 - (-18) = 23{,}22 \text{ tf};$$
$$R_1 = 4{,}56 - 5{,}22 = -0{,}66 \text{ tf};$$
$$R_2 = 17{,}12 - (-13{,}44) = 30{,}56 \text{ tf};$$
$$R_3 = 0 - (-18{,}88) = 18{,}88 \text{ tf}.$$

Control de la resolución

El ángulo de giro de las dos secciones contiguas sobre cada apoyo de la viga dada es igual a cero. Por consiguiente,

$$\Delta\varphi = \sum \int M\bar{M}_i \frac{J_0}{J_l}\, dz = 0,$$

donde M son los momentos flectores en la viga continua,

$\bar{M}_i$ los momentos flectores en el sistema básico, debidos a $M_i = 1$.

Corrientemente, la integración se efectúa por medio de la multiplicación de diagramas.

En la fig. 11.4*a* se representa una variante de descomposición del diagrama de M en las figuras más simples, para cada una de las cuales es fácil hallar el área ω_i y la posición del centro de gravedad O_n. En la fig. 11.4*b—d* se muestran las ordenadas y_{in} trazadas debajo de los centros de gravedad de las figuras elegidas en los diagramas unitarios de M_i. Efectuando las operaciones de multiplicación de los diagramas hallamos que

$$\sum_{n=1}^{2} \int M\bar{M}_1 \frac{J_0}{J_n}\, dz = [-(\text{área } abc)\, y_{11} + (\text{área } bcd)\, y_{12}] \frac{J_0}{J_1} +$$
$$+ [-(\text{área } deh)\, y_{13} - (\text{área } egh)\, y_{14} + (\text{área } efg)\, y_{15}] \frac{J_0}{J_2} =$$
$$= -\frac{1}{2} 54 \cdot 18 \frac{1}{3} + \frac{1}{2} 40 \cdot 18 \frac{2}{3} - \frac{1}{2} 32 \cdot 18 \frac{2}{3} -$$
$$- \frac{1}{2} 58 \cdot 18 \frac{1}{3} + \frac{1}{2} 72 \cdot 18 \frac{4}{9} = \frac{1}{6} 18 \cdot 2 (-88 + 88) = 0;$$

$$\sum_{n=2}^{3} \int M\bar{M}_2 \frac{J_0}{J_n}\, dz = [-(\text{área } deh)\, y_{23} - (\text{área } egh)\, y_{24} +$$
$$+ (\text{área } efg)\, y_{25}] \frac{J_0}{J_1} + [-(\text{área } hgj)\, y_{26} - (\text{área } gij)\, y_{27} +$$
$$+ (\text{área } gki)\, y_{28}] \frac{J_0}{J_3} = -\frac{1}{2} 32 \cdot 18 \frac{1}{3} - \frac{1}{2} 58 \cdot 18 \frac{2}{3} +$$
$$+ \frac{1}{2} 72 \cdot 18 \frac{5}{9} - \frac{1}{2} 58 \cdot 24 \frac{2}{3} - \frac{1}{2} 79 \cdot 24 \frac{1}{3} +$$
$$+ \frac{2}{3} 108 \cdot 24 \frac{1}{2} = \frac{1}{6} 4 \cdot 18 (-102 + 102) = 0;$$

$$\sum_{n=3}^{3} \int M \bar{M}_3 \frac{J_0}{J_n} dz = [-(\text{área } hgj)\, y_{36} - (\text{área } gij)\, y_{37} +$$

$$+ (\text{área } gkl)\, y_{38}] \frac{J_0}{J_3} = -\frac{1}{2} 58 \cdot 24 \frac{1}{3} - \frac{1}{2} 79 \cdot 24 \frac{2}{3} +$$

$$+ \frac{2}{3} 108 \cdot 24 \frac{1}{2} = \frac{1}{6} 24 \cdot 2 (-108 + 108) = 0.$$

Problema 11.3. Determinar el momento de apoyo M_1 y construir el diagrama de M para la viga que se muestra en la fig. 11.5:

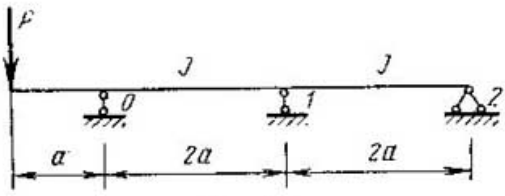


Fig. 11.5

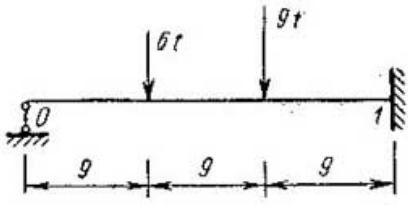


Fig. 11.6

a) para el caso cuando $M_0 = -Pa$ es tomado como momento de apoyo conocido;

b) para el caso cuando $M_0 = -Pa$ es referido a la carga en el primer tramo.

Respuesta: $M_1 = \frac{Pa}{4}$.

Problema 11.4. Construir el diagrama de momentos para la viga que se muestra en la fig. 11.6.

Respuesta: $M_1 = -69$ tfm.

Problema 11.5. Construir los diagramas de M y Q y hallar las reacciones de apoyo para la viga continua del ejemplo 11.1 (véase la fig. 11.2).

Respuesta: $M_1 = -42$ tfm; $M_2 = -27$ tfm; $R_0 = -\frac{8}{60}$ tf;

$$R_1 = \frac{1733}{60} \text{ tf}; \quad R_2 = \frac{1011}{60} \text{ tf}; \quad R_3 = \frac{144}{60} \text{ tf}.$$

Método de los focos de momento o puntos fijos (de Ritter)

En cada tramo de viga continua se distinguen:

la relación focal de la izquierda es $k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}$, si el tramo está ubicado a la izquierda de la carga;

la relación focal de la derecha es $k_i' = -\frac{M_{i-1}}{M_i}$, si el tramo está ubicado a la derecha.

De la ecuación de tres momentos, para los tramos no cargados, se establecen las dependencias recurrentes para las relaciones focales de los tramos contiguos:

$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right)$ para las relaciones focales de la izquierda y

$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}}\right)$ para las relaciones focales de la derecha. De estas fórmulas se desprende que:

las relaciones focales sólo dependen de las medidas y rigidez de la viga y nunca de la carga;

es necesario calcular las relaciones focales izquierdas, moviéndose de izquierda a derecha y comenzando por el primer tramo, donde $k_1 = \infty$ cuando en el extremo izquierdo hay un apoyo articulado y $k_1 = 2$ cuando el extremo izquierdo está empotrado;

es necesario calcular las relaciones focales derechas, moviéndose de derecha a izquierda, y comenzando por el último tramo, donde $k'_n = \infty$ cuando en el extremo derecho hay un apoyo articulado y $k'_n = 2$ para un empotramiento.

Para la viga con carga en uno de los tramos las expresiones de los momentos de apoyo del tramo cargado tienen la forma:

$$M_{i+1} = -\frac{6\omega_i\left(b_i k'_i - a_i\right)}{l_i^2\left(k_i k'_i - 1\right)}; \quad M_i = -\frac{6\omega_i\left(a_i k_i - b_i\right)}{l_i^2\left(k_i k'_i - 1\right)}; \qquad (11.7)$$

donde ω_i es el área del diagrama de momentos en el sistema básico debido a la carga dada en el tramo; se le da el signo del diagrama de momentos y

a_i y b_i, las distancias desde los apoyos hasta el centro de gravedad del diagrama.

Señalamos que para los tramos cargados, primero y último, que tienen apoyos articulados en los extremos, las fórmulas (11.7) toman la forma:

para el primer tramo

$$M_0 = 0, \quad M_1 = -\frac{6\omega_1 a_1}{l_1^2 k'_1}; \qquad (11.8)$$

para el último tramo

$$M_{n-1} = -\frac{6\omega_n b_n}{l_n^2 k_n}, \quad M_n = 0. \qquad (11.9)$$

Si los tramos cargados de la viga son varios, los momentos de apoyo se determinan por separado de la carga en cada tramo y luego se suman.

Ejemplo 11.6. Calcular los momentos de apoyo para la viga que se muestra en la fig. 11.3*a*.

Resolución

Suponiendo que $J_0 = J_t$, hallamos que $\lambda_1 = 18$ m, $\lambda_2 = 18$ m, $\lambda_3 = 24$ m.

Las relaciones focales izquierdas se calculan comenzando por el primer tramo:

$$k_1 = \infty; \quad k_2 = 2 + \frac{18}{18}\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4;$$

$$k_3 = 2 + \frac{18}{24}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{53}{16}.$$

Las relaciones focales derechas se calculan comenzando por el último tramo:

$$k_3' = 2; \quad k_2' = 2 + \frac{24}{18}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 4;$$

$$k_2' = 2 + \frac{18}{18}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$

Construimos en el sistema básico el diagrama de los momentos debidos a la carga dada en los tramos (fig. 11.3*c*). Del diagrama encontramos que $\omega_1 = 648$ tfm²; $a_1 = 12$ m; $\omega_2 = 648$ tfm²; $a_2 = 10$ m; $b_2 = 8$ m; $\omega_3 = 1728$ tfm²; $a_3 = b_3 = 12$ m (véase el ejemplo 11.2).

Determinamos los momentos de apoyo por separado.

a) Por (11.8), los debidos a la carga en el primer tramo:

$$M_0^a = 0; \quad M_1^a = -\frac{6 \cdot 648 \cdot 12}{18^2 \cdot {}^{15}/_4} = -38{,}4 \text{ tfm}.$$

Empleando las relaciones focales derechas, para los tramos no cargados, hallamos:

$$M_2^a = -\frac{M_1}{k_2'} = \frac{38{,}4}{4} = 9{,}6 \text{ tfm};$$

$$M_3^a = -\frac{M_2}{k_3'} = -\frac{9{,}6}{2} = -4{,}8 \text{ tfm}.$$

b) Por (11.7), los debidos a la carga en el segundo tramo:

$$M_1^b = -\frac{6 \cdot 648\,(8 \cdot 4 - 10)}{18^2\,(4 \cdot 4 - 1)} = -17{,}6 \text{ tfm};$$

$$M_2^b = -\frac{6 \cdot 648\,(10 \cdot 4 - 8)}{18^2\,(4 \cdot 4 - 1)} = -25{,}6 \text{ tfm}.$$

En el primer tramo $M_0^b = -\frac{M_1}{k_1} = 0$, dado que $k_1 = \infty$.

En el tercer tramo $M_3^b = -\frac{M_2}{k_3'} = \frac{25{,}6}{2} = 12{,}8$ tfm.

c) Por (11.7), los debidos a la carga en el tercer tramo:

$$M_2^c = -\frac{6 \cdot 1728\,(12 \cdot 2 - 12)}{24^2\,(^{53}/_{16} \cdot 2 - 1)} = -38{,}4 \text{ tfm};$$

$$M_3^c = -\frac{6 \cdot 1728\,(12 \cdot {}^{53}/_{16} - 12)}{24^2\,(^{53}/_{16} \cdot 2 - 1)} = -88{,}8 \text{ tfm}.$$

Los tramos no cargados son examinados desde la izquierda. Empleamos las relaciones focales:

$$M_1^c = -\frac{M_2}{k_2} = \frac{38{,}4}{4} = 9{,}6 \text{ tfm}; \quad M_0^c = -\frac{M_1}{k_1} = 0.$$

d) Los debidos a la carga en la cónsola

$$M_0^d = -54 \text{ tfm};$$

$$M_1^d = -\frac{M_0}{k_1'} = \frac{54}{^{15}/_4} = 14{,}4 \text{ tfm};$$

$$M_2^d = -\frac{M_1}{k_2'} = -\frac{14{,}4}{4} = -3{,}6 \text{ tfm};$$

$$M_3^d = -\frac{M_2}{k_3'} = \frac{3{,}6}{2} = 1{,}8 \text{ tfm}.$$

Por el principio de independencia de acción de las fuerzas, encontramos los momentos debidos a la acción conjunta de la carga, como suma de los valores hallados anteriormente:

$$M_0 = M_0^a + M_0^b + M_0^c + M_0^d = -54 \text{ tfm};$$

$$M_1 = M_1^a + M_1^b + M_1^c + M_1^d =$$

$$= -38{,}4 - 17{,}6 + 9{,}6 + 14{,}4 = -32 \text{ tfm};$$

$$M_2 = M_2^a + M_2^b + M_2^c + M_2^d =$$

$$= 9{,}6 - 25{,}6 - 38{,}4 - 3{,}6 = -58 \text{ tfm};$$

$$M_3 = M_3^a + M_3^b + M_3^c + M_3^d =$$

$$= -4{,}8 + 12{,}8 - 88{,}8 + 1{,}8 = -79 \text{ tfm}.$$

Construimos el diagrama de los momentos en la viga continua, del mismo modo como se hizo en el ejemplo 11.2, por los momentos de apoyo conocidos y el diagrama de M_P^0 debido a la carga dada en el sistema básico.

§ 11.2. CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE UNA VIGA CONTINUA DE SECCION CONSTANTE (fig. 11.7*a*). Es necesario comenzar la resolución construyendo las líneas de influencia de los momentos de apoyo. Tomamos como sistema básico una viga hiperestática con un vínculo eliminado (fig. 11.7*b*). Obtenemos la ecuación para la determinación del

momento de apoyo buscado M_i por la condición de que el ángulo de giro recíproco de las secciones de la viga, a ambos lados del apoyo i, debido a todas las fuerzas que actúan sobre el sistema básico, es igual a cero:

$$\delta_i M_i + \delta_{iP} = 0.$$

De donde hallamos que

$$M_i = -\frac{\delta_{iP}}{\delta_{ii}}, \qquad (11.10)$$

donde δ_{iP} es función de las posición de la carga $P = 1$.

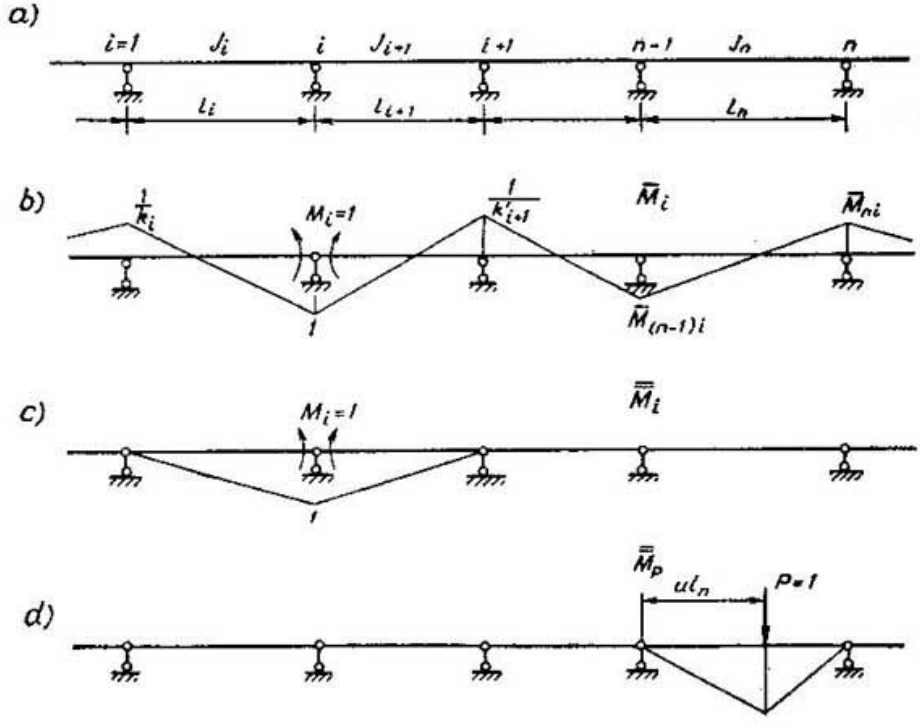


Fig. 11.7

Considerando que $\delta_{iP} = \delta_{Pi}$, determinamos esta función como una línea elástica en el sistema básico elegido, debida al valor unitario del momento incógnito $M_i = 1$. Para el n^{mo} tramo, δ_{Pi} se determina con la expresión

$$\delta_{Pi} = \sum \int \frac{\bar{\bar{M}}_P \bar{M}_i}{EJ}\, dz = \frac{l_n^2}{6EJ_n}\,[f_1(u)\,\bar{M}_{(n-1)\,i} + f_2(u)\,\bar{M}_{ni}]; \qquad (11.11)$$

δ_{ii} es una magnitud constante e igual al desplazamiento por la dirección de M_i, debido a su valor unitario $M_i = 1$. De la

fig. 11.7*b*, *c* determinamos que

$$\delta_{ii} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_i}{EJ_i}\, dz = \frac{1}{6EJ_i} A_{ii}. \qquad (11.12)$$

Considerando (11.11), (11.12) y (11.10), la ecuación de la línea de influencia del momento de apoyo M_i, en el n^{mo} tramo de la viga continua, se escribe de la siguiente manera:

$$\text{l. i. de } M_i = -\frac{\lambda_n l_n}{A_{ii}} [f_1(u)\, \bar{M}_{(n-1)\,i} = f_2(u)\, \bar{M}_{ni}], \qquad (11.13)$$

donde

$$A_{ii} = \lambda_i \left(k_i' - \frac{1}{k_i}\right) = \lambda_{i+1} \left(k_{i+1} - \frac{1}{k_{i+1}'}\right);$$

$\bar{M}_{(n-1)\,i}$ es el momento izquierdo de apoyo del n^{mo} tramo, debido a la acción de $M_i = 1$ en el sistema básico hiperestático;

$\bar{M}_{ni}$, el momento derecho de apoyo del n^{mo} tramo, debido a la acción de $M_i = 1$; $f_1(u) = u(1-u)(2-u)$ y $f_2(u) = u(1-u^2)$

(los valores de las funciones $f_1(u)$ y $f_2(u)$ para $u = \frac{z}{l_n}$ se dan en la tabla 11.1).

Determinamos la ordenada M_k de la línea de influencia en el extremo del voladizo por el diagrama de momentos M_P^*, construido para el caso, cuando el peso $P = 1$ está en el extremo de la consola. La línea de influencia en la parte volada es rectilínea. Cuando los momentos de apoyo son conocidos, las líneas de influencia del momento flector y la fuerza transversal, en la sección $z_k = u_k l_n$ del n^{mo} tramo, se determina con las expresiones

$$\text{l. i. de } M_k = \text{l. i. de } M_k^{v\,ig} + \text{l. i. de } M_{n-1}(1-u_k) + \text{l. i. de } M_n u_k,$$

donde l. i. de $M_k^{v\,ig}$ es la línea de influencia del momento flector, para la misma sección, en el sistema básico isostático.

Determinamos la ordenada en el extremo de la consola, en este caso, por medio del diagrama de M_P^*:

$$M_k = M_{n-1}^*(1-u_k) + M_n^* u_k;$$

$$\text{l. i. de } Q_k = \text{l. i. de } Q_k^{v\,ig} + (\text{l. i. de } M_n - \text{l. i. de } M_{n-1})\frac{1}{l_n},$$

donde l. i. de $Q_k^{v\,ig}$ es la línea de influencia de la fuerza transversal, para la misma sección, en el sistema básico isostático.

La ordenada en el extremo del voladizo es igual a:

$$Q_k = (M_{n-1}^* - M_n^*)\frac{1}{l_n}.$$

La línea de influencia de la reacción R_n del n^{mo} apoyo se determina por la fórmula:

$$\text{l. i. de } R_n = \text{l. i. de } B_n^{vig} + \text{l. i. de } A_n^{vig} +$$

$$+ (\text{l. i. de } M_{n+1} - \text{l. i. de } M_n)\frac{1}{l_{n+1}} - (\text{l. i. de } M_n - \text{l. i. de } M_{n-1})\frac{1}{l_n},$$

donde l. i. de B_n^{vig} es la línea de influencia del apoyo derecho del n^{mo} tramo, en el sistema básico isostático;

l. i. de A_{n+1}^{vig}, la línea de influencia del apoyo izquierdo del $(n+1)^{mo}$ tramo, en el sistema básico, estáticamente determinado.

Tabla 11.1

u	0	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	1
$f_1(u)$	0	0,1710	0,2880	0,3281	0,3570	0,3840	0,3750	0,3360	0,2730	0,2340	0,1920	0,0990	0
$f_2(u)$	0	0,0990	0,1920	0,2344	0,2730	0,3360	0,3750	0,3840	0,3570	0,3281	0,2880	0,1710	0

La ordenada en el extremo de la consola es igual a:

$$R_n = (M_{n+1}^* - M_n^*)\frac{1}{l_{n+1}} - (M_n^* - M_{n-1}^*)\frac{1}{l_n}.$$

Ejemplo 11.7. Construir las líneas de influencia para la viga que se muestra en la fig. 11.8*a*. Suponiendo $J_0 = J_i$ hallamos que $\lambda_1 = 18$ m, $\lambda_2 = 18$ m y $\lambda_3 = 24$ m.

Las relaciones focales izquierdas son $k_1 = \infty$, $k_2 = 4$, $k_3 = \frac{53}{16}$, y las derechas, $k_3' = 2$, $k_2' = 4$, $k_1' = \frac{15}{4}$ (v. el ejemplo 11.3). Por los datos obtenidos calculamos los coeficientes A_{ii} =:

$$A_{11} = 18\left(\frac{15}{4} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{135}{2}; \quad A_{22} = 18\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{135}{2};$$

$$A_{33} = 24\left(2 - \frac{16}{53}\right) = \frac{2160}{53}.$$

Elegimos tres sistemas básicos hiperestáticos ($i = 1, 2, 3$). En cada uno de ellos, por medio de las relaciones focales, construimos el diagrama de los momentos debidos al valor unitario de la incógnita $M_i = 1$ (fig. 11.8*b*, *d*). Empleando los diagramas obtenidos, hallamos los valores de los momentos de apoyo M_{ni}. Anotamos los resultados obtenidos en la tabla 11.2. Para determinar las ordenadas de las líneas de influencia en el voladizo construimos el diagrama de M_P^* (fig. 11.8*e*).

Tabla 11.2

N° del tramo	k_i	k'_i	A_{ii}	Momentos de apoyo debidos a $\overline{M}_i = 1$			
				$\overline{M}_0$	$\overline{M}_1$	$\overline{M}_2$	$\overline{M}_3$
1	∞	15/4	135/2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	4	4	135/2	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$
3	53/16	2	2160/53	0	4/53	−16/53	1

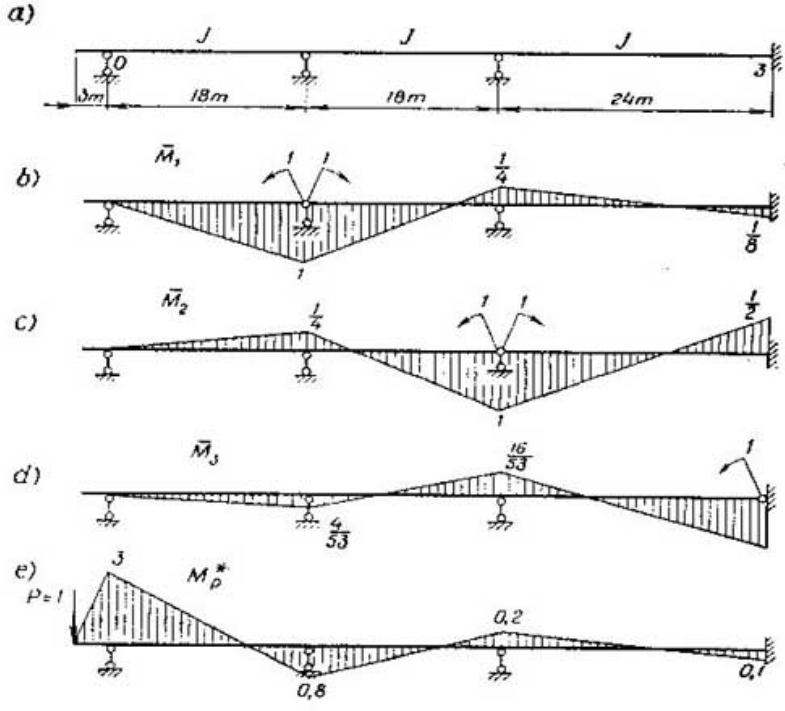


Fig. 11.8

Por cada tramo escribimos las ecuaciones de las líneas de influencia para cada incógnita, colocando los respectivos valores de i y n en la fórmula (11.13).

Para $i = 1$; l. i. de $M_1 = -\frac{\lambda_n l_n \cdot 2}{135}[f_1(u)\,\overline{M}_{(n-1)} + f_2(u)\,\overline{M}_{n1}]$;

1er tramo $(n = 1)$: l. i. de $M_1 = -\frac{18 \cdot 18 \cdot 2}{135}[0 + f_2(u)] = -4{,}8 f_2(u)$;

2° tramo ($n = 2$): l. i. de $M_1 = -\frac{18 \cdot 18 \cdot 2}{135}\left[f_1(u) - \frac{1}{4} f_2(u)\right] =$

$$= -4{,}8 f_1(u) + 1{,}2 f_2(u);$$

3er tramo ($n = 3$):

$$\text{l. i. de } M_1 = -\frac{24 \cdot 24 \cdot 2}{135}\left[-\frac{1}{4} f_1(u) + \frac{1}{8} f_2(u)\right] =$$

$$= 2{,}133 f_1(u) - 1{,}067 f_2(u).$$

La ordenada en el extremo de la consola es $M_1 = 0{,}8$ (fig. 11.8*e*) El gráfico de la línea de influencia de M_1 se muestra en la fig. 11.9*a*.

Para $i = 2$: l. i. de $M_2 = -\frac{\lambda_n l_n \cdot 2}{135}[f_1(u)\,\bar{M}_{(n-1)2} + f_2(u)\,\bar{M}_{n2}]$.

1er tramo ($n = 1$): l. i. de $M_2 = -\frac{18 \cdot 18 \cdot 2}{135}\left[0 - \frac{1}{4} f_2(u)\right] = 1{,}2 f_2(u)$;

2° tramo ($n = 2$): l. i. de $M_2 = -\frac{18 \cdot 18 \cdot 2}{135}\left[-\frac{1}{4} f_1(u) + f_2(u)\right] =$

$$= 1{,}2 f_1(u) - 4{,}8 f_2(u);$$

3er tramo ($n = 3$): l. i. de $M_2 = -\frac{24 \cdot 24 \cdot 2}{135}\left[f_1(u) - \frac{1}{2} f_2(u)\right] =$

$$= -8{,}533 f_1(u) + 4{,}267 f_2(u).$$

La ordenada en el extremo de la consola es $M_2 = 0{,}2$. El gráfico de la línea de influencia de M_2 se muestra en la fig. 11.9*b*.

Para $i = 3$: l. i. de $M_3 = -\frac{\lambda_n l_n \cdot 53}{2160}[f_1(u)\,\bar{M}_{(n-1)3} + f_2(u)\,\bar{M}_{n3}]$;

1er tramo ($n = 1$): l. i. de $M_3 = -\frac{18 \cdot 18 \cdot 53}{2160}\left[0 + \frac{4}{53} f_2(u)\right] = -0{,}6 f_2(u)$;

2° tramo ($n = 2$): l. i. de $M_3 = -\frac{18 \cdot 18 \cdot 53}{2160}\left[\frac{4}{53} f_1(u) - \frac{16}{53} f_2(u)\right] =$

$$= -0{,}6 f_1(u) + 2{,}4 f_2(u);$$

3er tramo ($n = 3$): l. i. de $M_3 = -\frac{24 \cdot 24 \cdot 53}{2160}\left[-\frac{16}{53} f_1(u) + f_2(u)\right] =$

$$= 4{,}267 f_1(u) - 14{,}33 f_2(u).$$

La ordenada en el extremo de la consola es $M_3 = 0{,}1$. El gráfico de la línea de influencia de M_3 se muestra en la fig. 11.9*c*. Construimos la línea de influencia del momento flector M_k, en la sección $z_k = 7{,}2$ m ($u_k = 0{,}4$) del segundo tramo, por la fórmula

$$\text{l. i. de } M_k = \text{l. i. de } M_k^{\text{vig}} + (\text{l. i. de } M_1)\,0{,}6 + \text{l. i. de } M_2(0{,}4).$$

La línea de influencia de M_k^{vig} se muestra en la fig. 11.9*d*. La ordenada en el extremo de la consola (fig. 11.8*e*) es $M_k = 0{,}8 \cdot 0{,}6 - 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$.

El gráfico de la línea de influencia de M_k se muestra en la fig. 11.9*e*.

Construimos la línea de influencia de la fuerza transversal Q_k en la misma sección, por la fórmula

$$\text{l. i. de } Q_k = \text{l. i. de } Q_k^{\text{vig}} + (\text{l. i. de } M_2 - \text{l. i. de } M_1)\frac{1}{18}.$$

La línea de influencia de Q_k^{vig} se muestra en la fig. 11.9*f*. La ordenada en el extremo de la consola es $Q_k = (-0{,}2 - 0{,}8)\frac{1}{18} =$

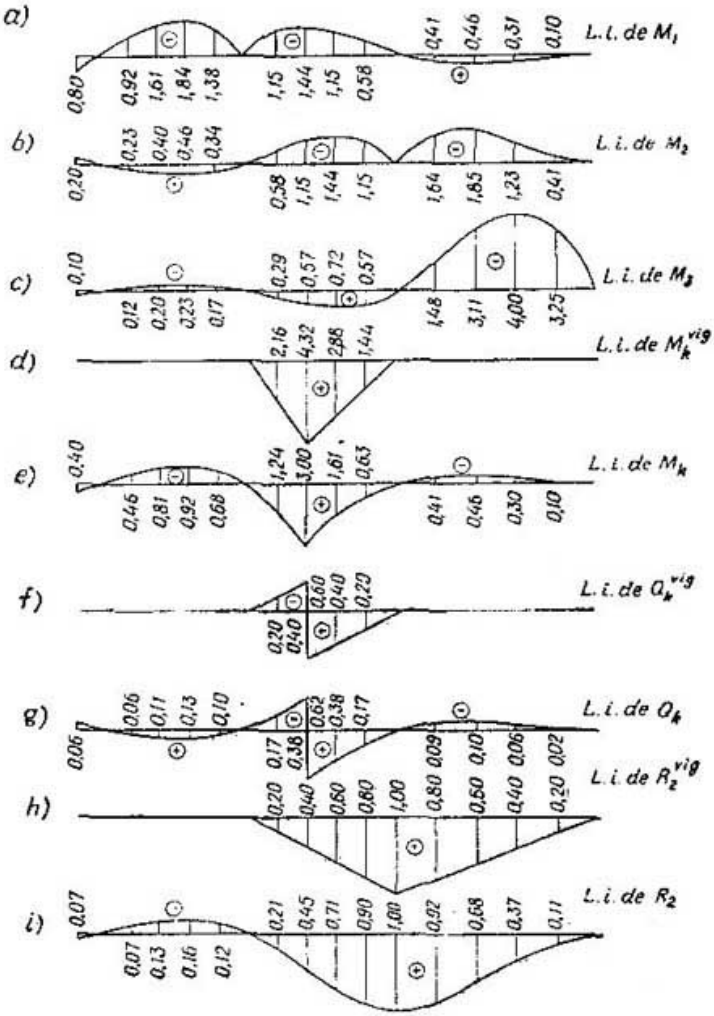


Fig. 11.9

—0,06. El gráfico de la línea de influencia de Q_h se muestra en la fig. 11.9*g*.

Construimos la línea de influencia de la reacción de apoyo R_2 por la fórmula

$$\text{l. i. de } R_2 = \text{l. i. de } B_2^{\text{v ig}} + \text{l. i. de } A_3^{\text{v ig}} + (\text{l. i. de } M_3 - \text{l. i. de } M_2) \cdot \frac{1}{24} - (\text{l. i. de } M_2 - \text{l. i. de } M_1)\frac{1}{18}.$$

Las líneas de influencia de $B_2^{\text{v ig}}$ y $A_3^{\text{v ig}}$ se muestran en la fig. 11.9*h*. La ordenada en el extremo de la consola es $R_2 = (0{,}1 + 0{,}2)\frac{1}{24} - (-0{,}2 - 0{,}8)\frac{1}{18} = 0{,}07$.

El gráfico de la línea de influencia de R_2 se muestra en la fig. 11.9*i*.

§ 11.3. LINEAS DE INFLUENCIA DE UNA VIGA CONTINUA DE SECCION VARIABLE

Ejemplo 11.8. Construir las líneas de influencia de los momentos de apoyo para la viga continua de sección variable, que se muestra en la fig. 11.10*a*.

Suponemos que $J_i(z) = J_0\left[2\left(\frac{z_i}{l_i}\right)^2 - 2\left(\frac{z_i}{l_i}\right) + 1\right]^3 = J_0\varphi(z)$,

donde J_0 es el momento de inercia de la sección de apoyo.

Para el sistema básico isostático (fig. 11.10*b*), escribimos el sistema de ecuaciones de los tres momentos en la forma canónica:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}M_1 + \delta_{12}M_2 + 0 + \delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}M_1 + \delta_{22}M_2 + \delta_{23}M_3 + \delta_{2P} = 0; \\ 0 + \delta_{32}M_2 + \delta_{33}M_3 + \delta_{3P} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.14)$$

Los coeficientes δ_{ij} de las incógnitas son magnitudes constantes que se determinan por las siguientes expresiones:

$$\delta_{i\,(i-1)} = \frac{1}{EJ_0}\int_0^{l_i} \bar{M}_i\bar{M}_{i-1}a_i\,d\tilde{z};$$

$$\delta_{ii} = \delta_{ii} + \delta_{ii}^{\text{der}} = \frac{1}{EJ_0}\int_0^{l_i} \bar{M}_i^2 a_i\,d\tilde{z} + \frac{1}{EJ_0}\int_0^{l_{i+1}} \bar{M}_i^2 a_{i+1}\,d\tilde{z};$$

$$\delta_{i\,(i+1)} = \frac{1}{EJ_0}\int_0^{l_{i+1}} \bar{M}_i\bar{M}_{i+1}a_{i+1}\,d\tilde{z}.$$

donde

$$a_i = \frac{EJ_0}{EJ_i} = \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Esto, por su sentido geométrico, son los ángulos de giro en el i^{mo} apoyo del sistema básico, debido a la acción de los valores unitarios de las incógnitas $\bar{M}_{i-1}$, $\bar{M}_i$ y $\bar{M}_{i+1}$ (fig. 11.11*a*, *b*).

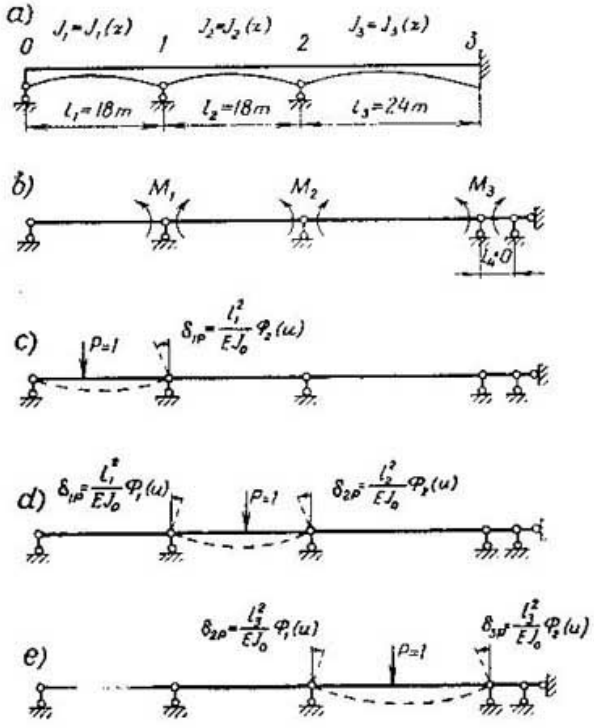


Fig. 11.10

Hallamos los términos independientes como funciones de la posición de la carga por las siguientes expresiones:

$$\delta_{pi}=\begin{cases}\dfrac{1}{EJ_0}\displaystyle\int_0^{l_i} M_p\bar{M}_i a_i\,d\tilde{z}=\dfrac{l_i^2}{EJ_0}\Phi_2(\bar{u}), & \text{si el peso } P=1 \text{ se halla en el } i^{mo} \text{ tramo;}\\[2ex] \dfrac{1}{EJ_0}\displaystyle\int_0^{l_{i+1}} \bar{M}_p\bar{M}_i a_{i+1}\,d\tilde{z}=\dfrac{l_{i+1}^2}{EJ_0}\Phi_1(u), & \text{si el peso } P=1 \text{ se halla en el } (i+1)^{mo} \text{ tramo;}\end{cases}$$

O, cuando el peso $P=1$ se halla fuera de los límites de los i^{mo} y $(i+1)^{mo}$ tramos, donde $u=\dfrac{z_p}{l_i}$ es una abscisa adimensional de la posición del peso.

El sentido geométrico de estas expresiones es doble. Por un lado, δ_{ip} es el ángulo de giro en el i^{mo} apoyo para el desplaza-

miento del peso unitario por el i^{mo} o el $(i+1)^{mo}$ tramo (fig. 11.11*c*). Por otro lado, $\delta_{pi} = \delta_{ip}$ puede considerarse como una línea elástica en los i^{mo} y $(i+1)^{mo}$ tramos del sistema básico, debida a la acción del momento unitario $M = 1$ (fig. 11.11*b*).

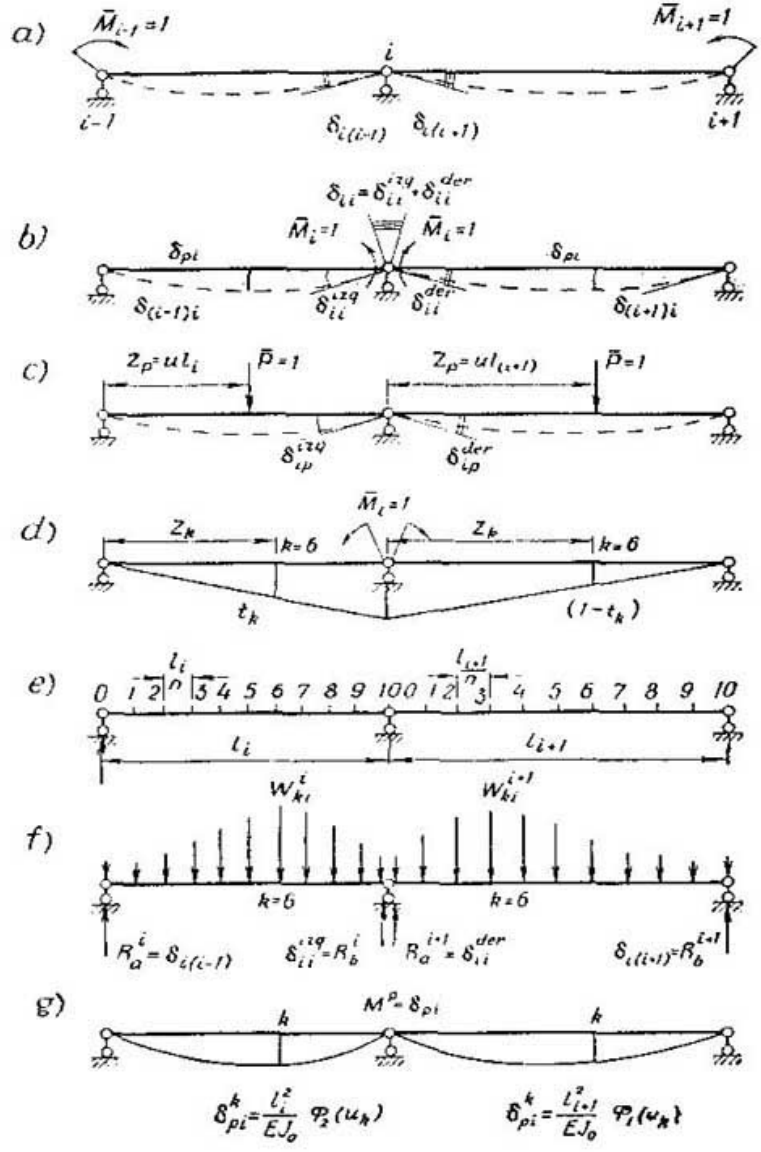


Fig. 11.11

Para calcular las magnitudes indicadas empleamos el procedimiento de los pesos elásticos. Según este método, los ángulos de giro en las secciones de apoyo de la viga se determinan como reacciones de apoyo debidas a la acción de una carga ficticia, en forma de pesos elásticos (fig. 11.11*e*, *f*):

$$\delta_{i\,(i-1)} = \delta_{(i-1)\,i} = R_a^i = \sum_0^n W_{ki}^i (1 - t_k);$$

$$\delta_{ii} = \delta_{ii}^{izq} + \delta_{ii}^{der} = R_b^i + R_a^{i+1} = \sum_0^n W_{ki}^i t_k + \sum_0^n W_{ki}^{i+1} (1 - t_k);$$

$$\delta_{i\,(i+1)} = \delta_{(i+1)\,i} = R_b^{i+1} = \sum_0^n W_{ki}^{i+1} t_k,$$

donde n es la cantidad de puntos nodales;

k, los números de los puntos nodales ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$);

W_{ki}^i, el peso elástico en el k^{mo} punto del i^{mo} tramo, debido a la acción del momento unitario $\bar{M}_i = 1$;

W_{ki}^{i+1}, ídem para el $(i+1)^{mo}$ tramo;

$t_k = \frac{z_k}{l}$.

Los términos independientes, como funciones de la posición de la carga, son:

$\delta_{pi}^k = \frac{l_i^2}{EJ_0} \Phi_2 (u_k)$, si la carga se halla a la izquierda del i^{mo} apoyo;

$\delta_{pi}^k = \frac{l_{i+1}^2}{EJ_0} \Phi_1 (u_k)$, si la carga se halla a la derecha del i^{mo} apoyo,

se calcula como momentos flectores en el k^{mo} punto de la viga convencional, debidos a la acción de la carga ficticia (fig. 11.11*g*). Los valores aproximados de los pesos elásticos se calculan por las siguientes fórmulas:

a) en el punto izquierdo extremo ($k = 0$)

$$W_{0i}^i = \frac{l_i}{\bar{n} 6 EJ_0} (2\bar{M}_{0i} a_0 + \bar{M}_{1i} a_1);$$

b) en los puntos intermedios ($\bar{k} \neq 0$, $\bar{k} \neq \bar{n}$),

$$W_{ki}^i = \frac{l_i}{\bar{n} 6 EJ_0} (\bar{M}_{(k-1)\,i} a_{k-1} + 4\bar{M}_{ki} a_k + \bar{M}_{(k+1)\,i} a_{k+1})$$

c) en el punto derecho extremo ($\bar{k} = \bar{n}$),

$$W_{ni}^i = \frac{l_i}{\bar{n} 6 EJ_0} (\bar{M}_{(n-1)\,i} a_{n-1} + 2\bar{M}_{ni} a_n),$$

donde M_{ki} es el momento flector en el $\bar{k}^{mo}$ punto, debido a la acción de $\bar{M}_i = 1$. Calculadas por estas fórmulas, las magnitudes de los pesos elásticos positivos están dirigidas hacia abajo

(fig. 11.11*f*). Los valores de los pesos elásticos, para $\bar{n} = 10$, así como todas las magnitudes indispensables para el cálculo, se dan en la tabla 11.3. Empleando los resultados obtenidos, hallamos que

$$\delta_{i\,(i-1)} = \frac{0{,}892}{EJ_0};$$

$$\delta_{ii} = \delta_{ii}^{izq} + \delta_{ii}^{der} = \frac{1{,}285}{EJ_0};$$

$$\delta_{i\,(i+1)} = \frac{0{,}892}{EJ_0}$$

De donde se desprende que

$$\delta_{11} = \frac{1{,}285}{EJ_0}(18 + 18) = \frac{46{,}3}{EJ_0};$$

$$\delta_{12} = \frac{0{,}892}{EJ_0}\,18 = \frac{16{,}1}{EJ_0};$$

$$\delta_{22} = \frac{1{,}285}{EJ_0}(18 + 24) = \frac{54}{EJ_0};$$

$$\delta_{23} = \frac{0{,}892}{EJ_0}\,24 = \frac{21{,}4}{EJ_0};$$

$$\delta_{33} = \frac{1{,}285}{EJ_0}\,24 = \frac{30{,}8}{EJ_0};$$

$$\delta_{p1}^{k} = \begin{cases} \dfrac{18^2}{EJ_0}\,\Phi_2(u_k) & \text{en el } 1^{er} \text{ tramo;} \\ \dfrac{18^2}{EJ_0}\,\Phi_1(u_k), & \text{si el peso } P = 1 \text{ está en el segundo tramo;} \\ 0 & \text{en el } 3^{er} \text{ tramo;} \end{cases}$$

$$\delta_{p2}^{k} = \begin{cases} 0 & \text{en el } 1^{er} \text{ tramo;} \\ \dfrac{18^2}{EJ_0}\,\Phi_2(u_k), & \text{si el peso } P = 1 \text{ está en el segundo tramo;} \\ \dfrac{24^2}{EJ_0}\,\Phi_1(u_k) & \text{en el } 3^{er} \text{ tramo.} \end{cases}$$

$$\delta_{p3}^{k} = \begin{cases} 0 & \text{en el } 1^{er} \text{ tramo;} \\ 0 & \text{si el peso } P = 1 \text{ está en el } 2^{o} \text{ tramo;} \\ \dfrac{24^2}{EJ_0}\,\Phi_2(u_k) & \text{en el } 3^{er} \text{ tramo.} \end{cases}$$

Los momentos de apoyo incógnitos M_i, como funciones de la posición de la carga unitaria, se expresan por medio del coeficiente de influencia del sistema, del siguiente modo:

$$\text{l. i. de } M_i = \beta_{i1}\delta_{1P} + \beta_{i2}\delta_{2P} + \beta_{i3}\delta_{3P}, \qquad (11.15)$$

donde $\beta_{if} = (-1)^{(i+f\pm 1)} \frac{D_{if}}{D}$ son los coeficientes de influencia;

$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ 0 & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}$, el determinante de la matriz del sistema;

D_{ij}, el determinante que se obtiene del determinante D, al excluirle la i^{ma} línea y la j^{ma} columna.

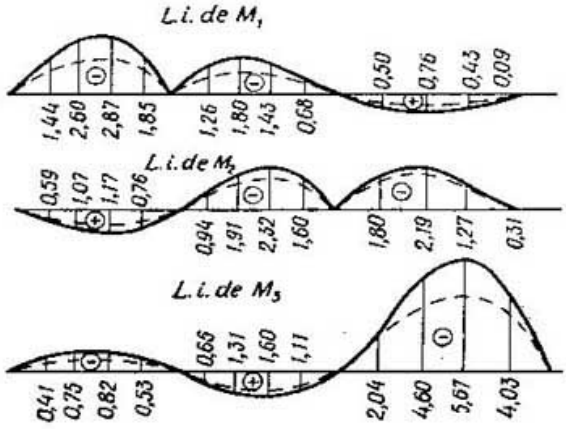


Fig. 11.12

Empleando los valores calculados de δ_{ij}, obtenemos que

$$D = \frac{1}{(EJ_0)^3} = \begin{vmatrix} 46{,}3 & 16{,}1 & 0 \\ 16{,}1 & 54{,}0 & 21{,}4 \\ 0 & 21{,}4 & 30{,}8 \end{vmatrix} = \frac{478 \cdot 10^2}{(EJ_0)^3};$$

$$\beta_{11} = (-1)^1 EJ_0 \frac{\begin{vmatrix} 54{,}0 & 21{,}4 \\ 21{,}4 & 30{,}8 \end{vmatrix}}{478 \cdot 10^2} = -0{,}232 \cdot 10^{-1} EJ_0;$$

$$\beta_{12} = (-1)^2 EJ_0 \frac{\begin{vmatrix} 16{,}1 & 21{,}4 \\ 0 & 30{,}8 \end{vmatrix}}{478 \cdot 10^2} = 0{,}103 \cdot 10^{-1} EJ_0;$$

$$\beta_{13} = (-1)^3 EJ_0 \frac{\begin{vmatrix} 16{,}1 & 54{,}0 \\ 0 & 21{,}4 \end{vmatrix}}{478 \cdot 10^2} = -0{,}072 \cdot 10^{-1} EJ_0;$$

$$\beta_{22} = (-1)^3 EJ_0 \frac{\begin{vmatrix} 46{,}3 & 0 \\ 0 & 30{,}8 \end{vmatrix}}{478 \cdot 10^2} = -0{,}298 \cdot 10^{-1} EJ_0;$$

$$\beta_{23} = (-1)^4 EJ_0 \frac{\begin{vmatrix} 46{,}3 & 16{,}1 \\ 0 & 21{,}4 \end{vmatrix}}{478 \cdot 10^2} = 0{,}207 \cdot 10^{-1} EJ_0;$$

$$\beta_{33} = (-1)^5 EJ_0 \frac{\begin{vmatrix} 46{,}3 & 16{,}1 \\ 16{,}1 & 54{,}0 \end{vmatrix}}{478 \cdot 10^2} = -0{,}469 \cdot 10^{-1} EJ_0.$$

Colocando los valores de los coeficientes de influencia en la expresión (11.15), hallamos que:

$$\text{l. i. de } M_1 = (-0{,}252\delta_{1p} + 0{,}103\delta_{2p} - 0{,}072\delta_{3p})\, 10^{-1} EJ_0;$$

$$\text{l. i. de } M_2 = (0{,}103\delta_{1p} - 0{,}298\delta_{2p} + 0{,}207\delta_{3p})\, 10^{-1} EJ_0;$$

$$\text{l. i. de } M_3 = (-0{,}072\delta_{1p} + 0{,}207\delta_{2p} - 0{,}469\delta_{3p})\, 10^{-1} EJ_0.$$

Colocando en estas expresiones los valores de δ_{pt}, hallados anteriormente durante el movimiento del peso por los tramos de la viga continua, obtenemos las siguientes ecuaciones de las líneas de influencia:

a) el peso se halla en el 1er tramo (fig. 11.10*c*):

$$\text{l. i. de } M_1 = -8{,}17\Phi_2(\tilde{u});$$
$$\text{l. i. de } M_2 = 3{,}34\Phi_2(\tilde{u});$$
$$\text{l. i. de } M_3 = -2{,}34\Phi_2(\tilde{u});$$

b) el peso se halla en el 2º tramo (fig. 11.10*d*):

$$\text{l. i. de } M_1 = -8{,}17\Phi_1(\tilde{u}) + 3{,}34\Phi_2(\tilde{u});$$
$$\text{l. i. de } M_2 = +3{,}34\Phi_1(\tilde{u}) - 9{,}65\Phi_2(\tilde{u});$$
$$\text{l. i. de } M_3 = -2{,}34\Phi_1(\tilde{u}) + 6{,}71\Phi_2(\tilde{u});$$

c) el peso se halla en el 3er tramo (fig. 11.10*e*):

$$\text{l. i. de } M_1 = 5{,}93\Phi_1(\tilde{u}) - 4{,}15\Phi_2(\tilde{u});$$
$$\text{l. i. de } M_2 = -17{,}15\Phi_1(\tilde{u}) + 11{,}96\Phi_2(\tilde{u});$$
$$\text{l. i. de } M_3 = 11{,}96\Phi_1(\tilde{u}) - 27{,}05\Phi_2(\tilde{u}).$$

Los gráficos de las líneas de influencia se muestran en la fig. 11.12; allí mismo, en líneas punteadas, se muestran las líneas de influencia para una viga de sección constante, donde $J = J_0 = \text{const}$.

Tabla 11.3

	$\tilde{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i^{mo} tramo	$\varphi(x_k) = \left[2t_k^2 - 2t_k + 1\right]^3$	1,000	0,551	0,314	0,195	0,141	0,125	0,141	0,195	0,314	0,551	1,000
	$a_k = \frac{1}{\varphi(x_k)}$	1,000	1,815	3,185	5,128	7,092	8,000	7,092	5,128	3,185	1,815	1,000
	$\overline{M}_{ki} = t_k$	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000
	$\overline{M}_{ki} a_k = \frac{t_k}{\varphi(x_k)}$	0,000	0,182	0,637	1,538	2,837	4,000	4,255	3,590	2,548	1,634	1,000
	$\frac{EJ_0}{l_i} W_{ki}^i$	0,003	0,023	0,071	0,161	0,283	0,386	0,412	0,353	0,257	0,168	0,061
	$\Phi_2(u_k)$	0,000	0,089	0,176	0,251	0,319	0,354	0,351	0,308	0,227	0,122	0,000
$(i+1)^{mo}$ tramo	$\varphi(x_k) = \left[2t_k^2 - 2t_k + 1\right]^3$	1,000	0,551	0,314	0,195	0,141	0,125	0,141	0,195	0,314	0,551	1,000
	$a_k = \frac{1}{\varphi(x_k)}$	1,000	1,815	3,185	5,128	7,092	8,000	7,092	5,128	3,185	1,815	1,000
	$\overline{M}_{ki} = (1 - t_k)$	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,100	0,000
	$\overline{M}_{ki} a_k = \frac{1 - t_k}{\varphi(x_k)}$	1,000	1,634	2,548	3,590	4,255	4,000	2,837	1,538	0,637	0,182	0,000
	$\frac{EJ_0}{l_{i+1}} W_{ki}^{i+1}$	0,061	0,168	0,257	0,353	0,412	0,386	0,283	0,161	0,071	0,023	0,003
	$\Phi_1(u_k)$	0,000	0,122	0,227	0,308	0,351	0,354	0,319	0,251	0,176	0,089	0,000

CAPITULO 12 * CALCULO DE ARMADURAS PLANAS ARTICULADAS HIPERESTATICAS Y DE SISTEMAS COMBINADOS

Ejemplo 12.1. Construir las líneas de influencia de las reacciones de apoyo y de las fuerzas axiales en las barras *2-3*, *3-11* y *11-12* de la armadura mostrada en la fig. 12.1*a*. Las áreas de las secciones de las barras de todos los cordones son iguales entre sí y cada una se toma igual a F. Las áreas de las secciones de cada una de las riostras se toman iguales a 0,5 F. Todas las barras son de un mismo material.

Resolución

La armadura, exteriormente, es de una sola hiperestaticidad, dado que tiene una sola barra de apoyo superflua.

El sistema básico se muestra en la fig. 12.1*b*. Se obtuvo con la eliminación de la barra de apoyo en el apoyo medio. De esta manera, en calidad de incógnita superflua se toma la reacción del apoyo del medio, a la que denominamos X_1.

La ecuación de la línea de influencia de la incógnita básica tiene la forma:

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}. \qquad (12.1)$$

donde δ_{p1} es el diagrama de los desplazamientos verticales de los nudos del cordón de carga (en el caso dado, del inferior) debidos a la fuerza $X_1 = 1$. El desplazamiento propio es

$$\delta_{11} = \sum_i \frac{\overline{N}_{i1}^2 l_i}{E_i F_i}. \qquad (12.2)$$

Aquí, $\overline{N}_{i1}$ es la fuerza longitudinal en cierta (i^{ma}) barra del sistema básico, debida a la acción de la fuerza $X_1 = 1$ sobre éste;

l_i y F_i, la longitud y el área de la sección transversal de la i^{ma} barra;

E_i, el módulo de elasticidad de su material.

La suma, en (12.2), se toma de todas las barras del sistema básico, en las que surgen fuerzas longitudinales debidas a la acción unitaria indicada.

Los esfuerzos $\overline{N}_{i1}$ en las barras del sistema básico, debidos a $X_1 = 1$, pueden ser determinados gráficamente por el diagrama de Cremona o, analíticamente, por el procedimiento de las secciones simples. Estos esfuerzos están representados en la fig. 12.1*c*, en los ejes de las barras. Los esfuerzos $\overline{N}_{i1}$ se han dado sólo para media armadura, en vista de su simetría.

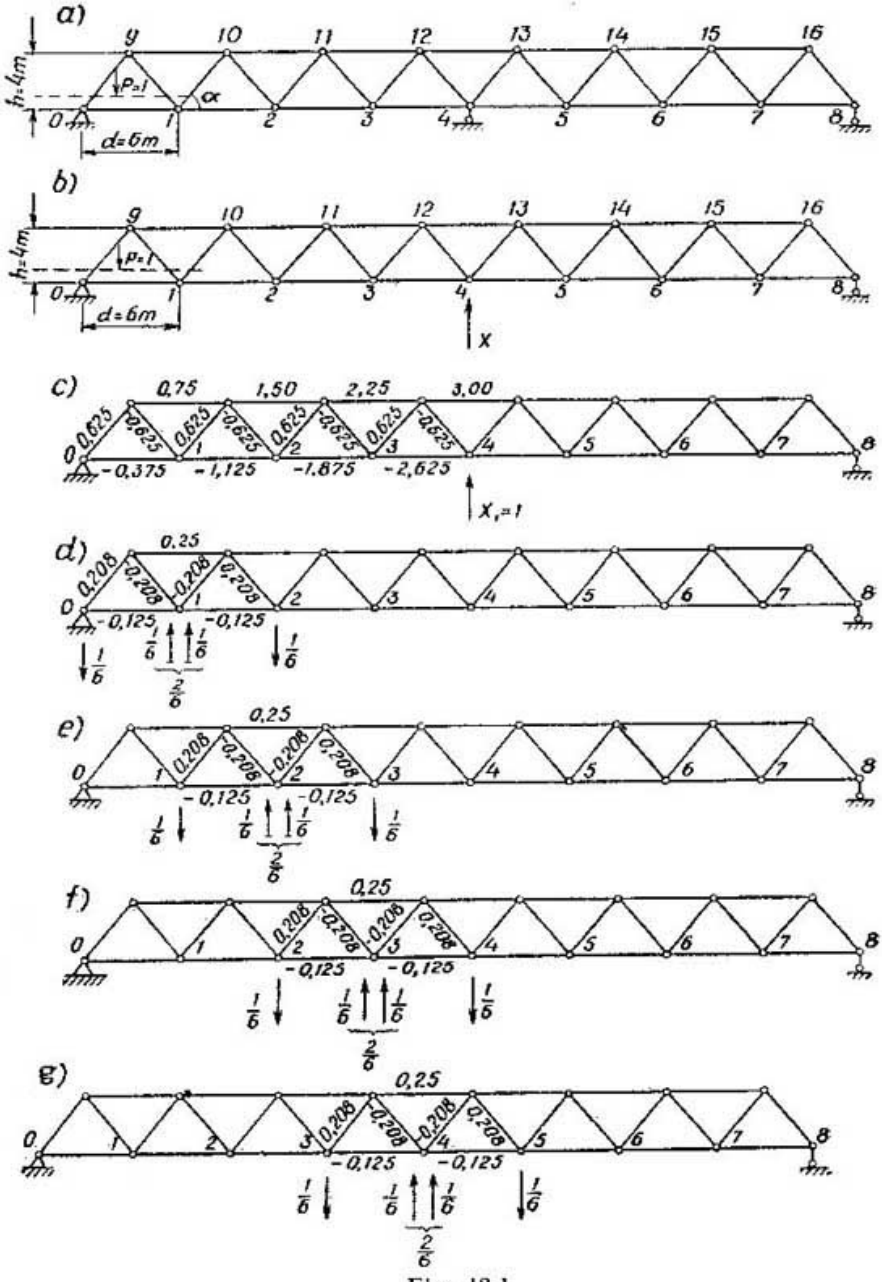

a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h=4m
d=6m
P=1
α
X
X₁=1
0,75
1,50
2,25
3,00
0,625
-0,625
-0,375
-1,125
-1,875
-2,625
0,25
0,208
-0,208
-0,125
1/6
2/6

Fig. 12.1

El diagrama δ_{pi} lo construimos por medio de los pesos elásticos determinados por la fórmula

$$w_{ni} = \sum_i \frac{\bar{N}_{in}\bar{N}_{ii}l_i}{E_iF_i}. \qquad (12.3)$$

Aquí, w_{ni} es el peso elástico del n^{mo} nudo del cordón de carga;
$\bar{N}_{in}$, los esfuerzos en las barras del sistema básico, debidos al grupo unitario de fuerzas aplicado en el n^{mo} nudo del cordón de carga.

Gracias a la simetría de la armadura, es suficiente determinar los pesos elásticos w_{ni}, solamente para los nudos $n = 1, 2, 3$ y 4. Al principio fijamos el grupo unitario de fuerzas, para la determinación de w_{11} (fig. 12.1*d*). En este caso, los esfuerzos en las barras se designan con $\bar{N}_{i1}$. Estos esfuerzos pueden ser hallados por medio del diagrama de Cremona o, analíticamente, por el procedimiento de las secciones simples. Solamente resultan diferentes de cero los esfuerzos en siete barras de dos paneles cargados. Estos esfuerzos están escritos en los ejes de las barras de la fig. 12.1*d*.

En la armadura dada todas las barras son del mismo material $E_i = E$; las áreas de la sección de las barras de los cordones son a las áreas de la sección de las diagonales, como 1 : 0,5; las longitudes de las barras de los cordones son a las longitudes de las riostras, como $1 : \frac{5}{6}$. Tomando en cuenta esto y la estructura de las fórmulas (12.1)—(12.3), señalamos que para simplificar los cálculos de w_{n1} y δ_{11} se puede considerar que $E_i = E = 1$, que las áreas de las barras de los cordones y sus longitudes son iguales a 1, que las áreas de las secciones de las riostras son iguales a 0,5 y que sus longitudes son iguales a $\frac{5}{6}$. El peso elástaco w_{11}, por la fórmula (12.3), será:

$$w_{11} = \frac{0\,25 \cdot 0{,}75 \cdot 1}{1 \cdot 1} + \frac{0{,}125 \cdot 0{,}375 \cdot 1}{1 \cdot 1} + \frac{0{,}125 \cdot 1{,}125 \cdot 1}{1 \cdot 1} + \frac{0{,}208 \cdot 0{,}625 \cdot 5}{1 \cdot 0{,}5 \cdot 6} +$$
$$+ \frac{0{,}208 \cdot 0{,}625 \cdot 5}{1 \cdot 0{,}5 \cdot 6} - \frac{0{,}208 \cdot 0{,}625 \cdot 5}{1 \cdot 0{,}5 \cdot 6} - \frac{0{,}208 \cdot 0{,}625 \cdot 5}{1 \cdot 0{,}5 \cdot 6} = 0{,}375.$$

Vemos que aquí, solamente tienen valores los tres primeros sumandos, dependientes de los esfuerzos en los cordones. Los cuatro sumandos restantes, dependientes de los esfuerzos en las riostras se reducen, ya que en el caso dado, encierran los productos de los esfuerzos simétricos $\bar{N}_{i1}$ por los antisimétricos $\bar{N}_{i1}$. No es difícil ver que ocurrirá lo mismo al calcular los pesos elásticos w_{21} y w_{31}. Para su determinación es necesario desplazar sucesivamente el grupo unitario de fuerzas, como se muestra en la fig. 12.1*e—f*. En este caso, los esfuerzos diferentes de cero $\bar{N}_{i2}$ y $\bar{N}_{i3}$ quedan iguales, así como los esfuerzos $\bar{N}_{i1}$. Efectuando el cálculo por la fórmula (12.3) y escribiendo únicamente los

sumandos que contienen los esfuerzos de los cordones, por las consideraciones señaladas más arriba, obtenemos que

$$w_{21} = \frac{0{,}25 \cdot 1{,}50 \cdot 1}{1 \cdot 1} + \frac{0{,}125 \cdot 1{,}125 \cdot 1}{1 \cdot 1} + \frac{0{,}125 \cdot 1{,}875 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 0{,}750;$$

$$w_{31} = \frac{0{,}25 \cdot 2{,}25 \cdot 1}{1 \cdot 1} + \frac{0{,}125 \cdot 1{,}875 \cdot 1}{1 \cdot 1} + \frac{0{,}125 \cdot 2{,}625 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 1{,}125.$$

Durante el cálculo del peso elástico ω_{41} por el eje de simetría, no tendrá lugar la reducción señalada de los sumandos debidos a los esfuerzos en las riostras. Evidentemente, aplicado el grupo unitario de fuerzas como se muestra en la fig. 12.1*g*, tomando en cuenta que, tanto los esfuerzos $\bar{\bar{N}}_{i4}$, diferentes de cero, como los esfuerzos $\bar{\bar{N}}_{i1}$ no varían en este caso y, confrontando los esfuerzos $\bar{\bar{N}}_{i4}$ y $\bar{\bar{N}}_{i1}$ de la fig. 12.1*g* y los de la fig. 12.1*c*, vemos que estos esfuerzos, por la condición de simetría, van a tener, respectivamente, signos iguales. Por eso, obtenemos:

$$w_{41} = \frac{0{,}25 \cdot 3{,}00 \cdot 1}{1 \cdot 1} + \frac{0{,}125 \cdot 2{,}625 \cdot 1}{1 \cdot 1} + \frac{0{,}125 \cdot 2{,}625 \cdot 1}{1 \cdot 1} + \\ + \frac{0{,}208 \cdot 0{,}625 \cdot 5}{1 \cdot 0{,}5 \cdot 6} 4 = 2{,}273.$$

Por cuanto el sistema básico representa una armadura de un tramo, con circulación por abajo y apoyos articulados, entonces, los pesos elásticos se aplican a la viga ficticia de un tramo con apoyos articulados por los extremos. Esta viga, cargada con pesos elásticos, se muestra en la fig. 12.2*a*. Dado que los pesos elásticos resultaron positivos, están dirigidos hacia arriba.

En la fig. 12.2*b* está trazado el diagrama de los momentos flectores en esta viga, representante del diagrama de los desplazamientos nodales δ_{P1}.

En el sistema básico adoptado no se pide el cálculo especial de δ_{11} por la fórmula (12.2), porque en el caso dado δ_{11} es igual, y de signo contrario, al desplazamiento δ_{P1} en el nudo *4*, donde está aplicada la fuerza $X_1 = 1$ dirigida hacia arriba. De tal modo, tenemos que $\delta_{11} = 58{,}776$.

Al colocar los valores de δ_{P1} y δ_{11} en (12.1) se obtienen las ordenadas de la línea de influencia de la incógnita básica X_1 o, que es lo mismo, las ordenadas de la línea de influencia buscada de la reacción de apoyo del apoyo del medio en la armadura dada. La configuración de esta línea de influencia y el valor de sus ordenadas se muestran en la fig. 12.2*c*.

Las ordenadas de la línea de influencia de la reacción de apoyo del apoyo izquierdo se obtuvieron por la expresión

$$\text{l. i. de } R_{0P} = (\text{l. i. de } X_1)\, \bar{R}_{01}^{(0)} + \text{l. i. de } R_{0P}^{(0)}, \qquad (12.4)$$

donde $\bar{R}_{01}^{(0)}$ es el valor de la reacción del apoyo izquierdo, debida a la fuerza $X_1 = 1$ en el sistema básico;

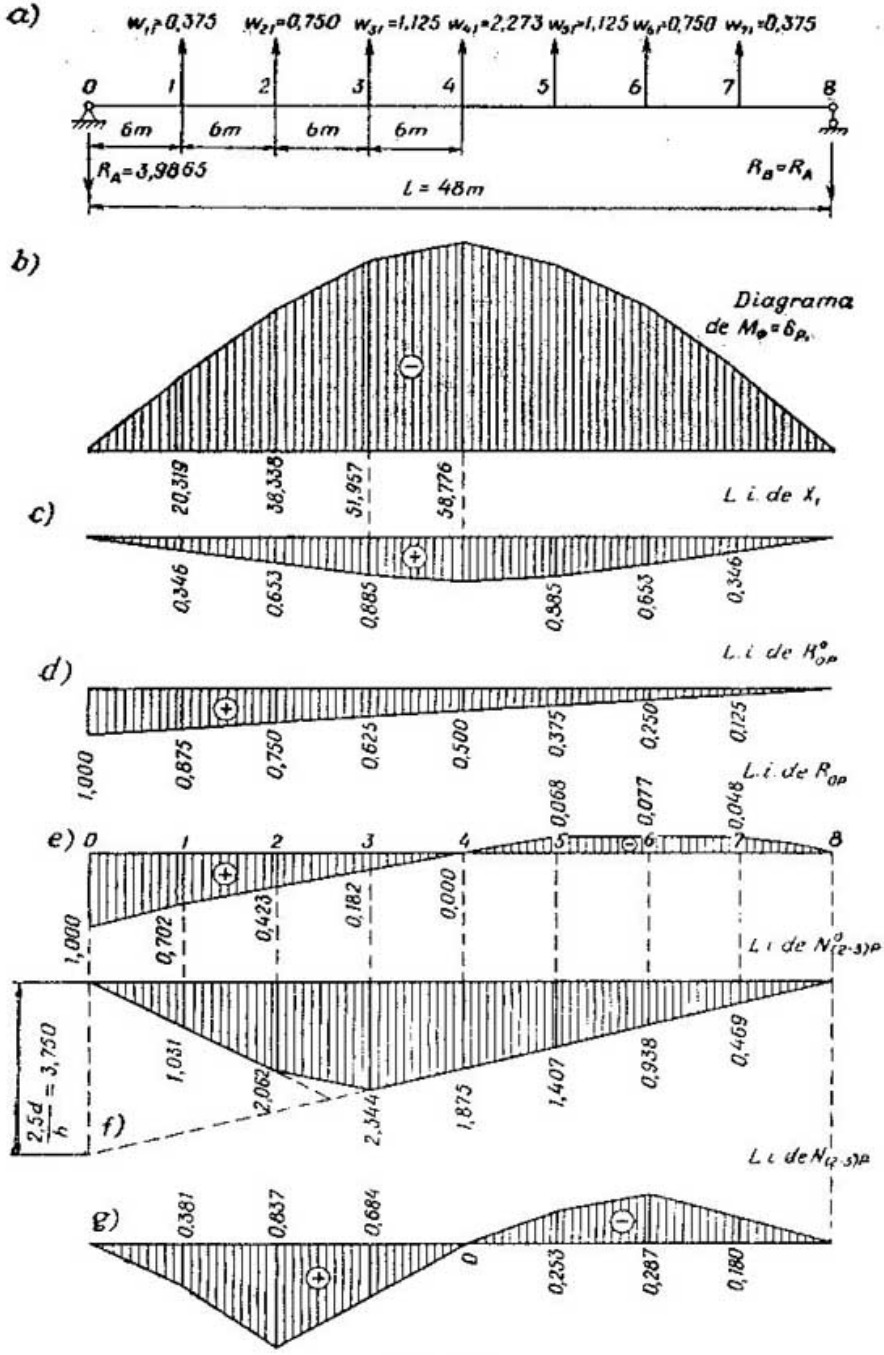

a)
w1=0,375 w2=0,750 w3=1,125 w4=2,273 w5=1,125 w6=0,750 w7=0,375
0 1 2 3 4 5 6 7 8
6m 6m 6m 6m
RA=3,9865
RB=RA
L = 48m
b)
Diagrama de Mφ=δp.
20,319 38,338 51,957 58,776
c)
L. i. de X1
0,346 0,653 0,885 0,885 0,653 0,346
d)
L. i. de H°0p
1,000 0,875 0,750 0,625 0,500 0,375 0,250 0,125
L. i. de R0p
0,068 0,077 0,048
e)
0 1 2 3 4 5 6 7 8
1,000 0,702 0,423 0,182 0,000
L. i. de N°(2-3)p
2,5d/h = 3,750
1,031 2,062 2,344 1,875 1,407 0,938 0,469
f)
L. i. de N(2-3)p
g)
0,381 0,837 0,684 0 0,253 0,287 0,180

Fig. 12.2

l. i. de $\overline{R}_{0P}^{(0)}$, las ordenadas de la línea de influencia de la reacción del apoyo izquierdo en el sistema básico. Esta línea de influencia se da en la fig. 12.2*d*.

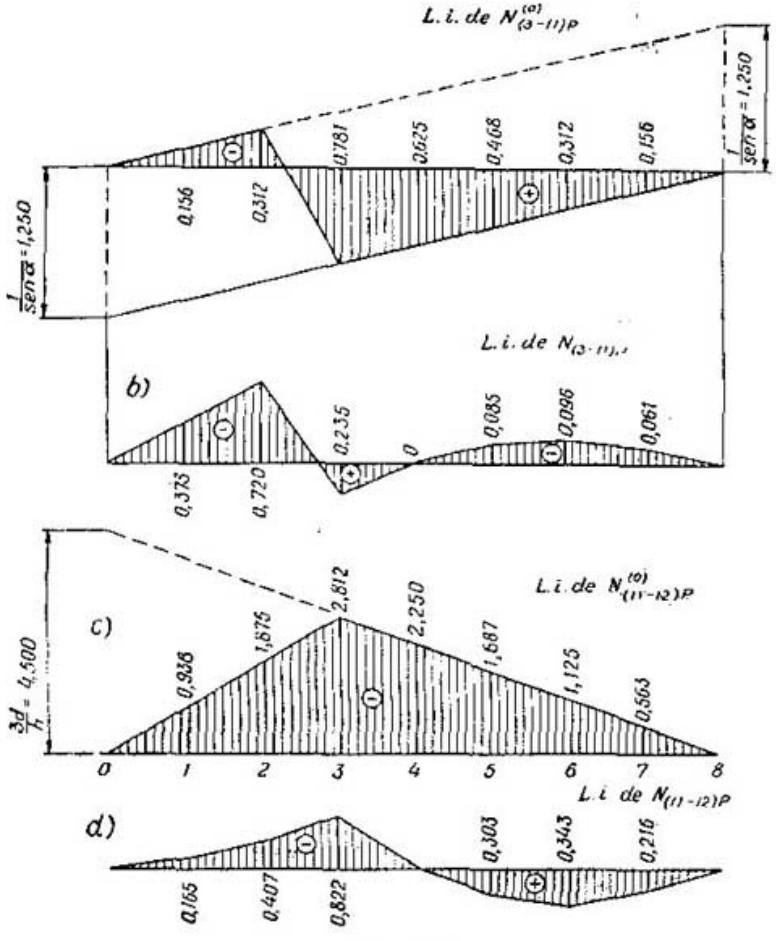


Fig. 12.3

Por cuanto la fuerza $X_1 = 1$ está aplicada en el centro de la armadura y actúa hacia arriba, entonces $\overline{R}_{10}^{(0)} = -\frac{1}{2}$; la configuración de la línea de influencia de R_{0P} se da en la fig. 12.2*e*.

La línea de influencia de la reacción de apoyo del apoyo derecho va a tener una ordenada positiva igual a la unidad, en el apoyo derecho, y una configuración análoga a R_{0P}.

Las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras *2-3*, *3-11* y *11-12*, se construyen por la expresión

$$\text{l. i. de } N_{iP} = (\text{l. i. de } X_1)\,\overline{N}_{i1} + \text{l. i. de } N^{(0)}_{iP}. \qquad (12.5)$$

Considerando que los valores de los esfuerzos son $\overline{N}_{(2\text{-}3)_1} = -1{,}875$, $\overline{N}_{(11\text{-}3)_1} = -0{,}625$ y $\overline{N}_{(11\text{-}12)_1} = 2{,}250$ (vease la fig. 12.1 *c*), por (12.5) obtenemos:

$$\text{l. i. de } N_{(2\text{-}3)P} = -1{,}875\,(\text{l. i. de } X_1) + \text{l. i. de } N^{(0)}_{(2\text{-}3)P};$$

$$\text{l. i. de } N_{(3\text{-}11)P} = -0{,}625\,(\text{l. i. de } X_1 + \text{l. i. de } N^{(0)}_{(11\text{-}3)P};$$

$$\text{l. i. de } N_{(11\text{-}12)P} = 2{,}250\,(\text{l. i. de } X_1) + \text{l. i. de } N^{(0)}_{(11\text{-}12)P}.$$

Por estas tres expresiones se calcularon las ordenadas de las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras dadas de la armadura. Las líneas de influencia en las respectivas barras del sistema básico: la l. i. de $N^{(0)}_{(2\text{-}3)P}$; la l. i. de $N^{(0)}_{(3\text{-}11)P}$ y la l. i. de $N^{(0)}_{(11\text{-}12)P}$, están representadas en las figs. 12.2*f* y 12.3*a*, *c*. La configuración de las líneas de influencia buscadas se muestran en las figs. 12.2*g* y 12.3*b*, *d*.

Instrucciones

1. En las armaduras con montantes de apoyo, donde la circulación es por el cordón superior (fig. 12.4*a*), en el caso de un

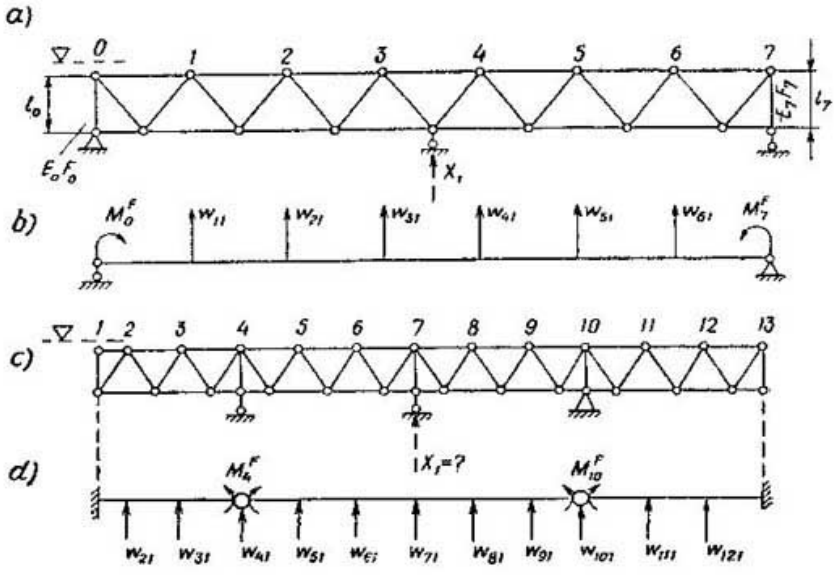


Fig. 12.4

sistema básico al que se le ha quitado el apoyo del medio, la viga ficticia con la carga ficticia se adopta según el esquema mostrado en la fig. 12.4*b* donde los momentos de apoyo superfluos expresan los desplazamientos debidos a las deformaciones longitudinales de los montantes de apoyo:

$$M_0^{\Phi} = -\frac{\bar{N}_{01} l_0}{E_0 F_0}; \quad M_7^{\Phi} = -\frac{\bar{N}_{71} l_7}{E_7 F_7}.$$

2. En la armadura volada (fig. 12.4*c*), en el caso del sistema básico señalado, el aspecto de la viga ficticia con carga ficticia se muestra en la fig. 12.4*d*. Cuando la circulación sea por abajo, no habrá momentos de apoyo ficticios.

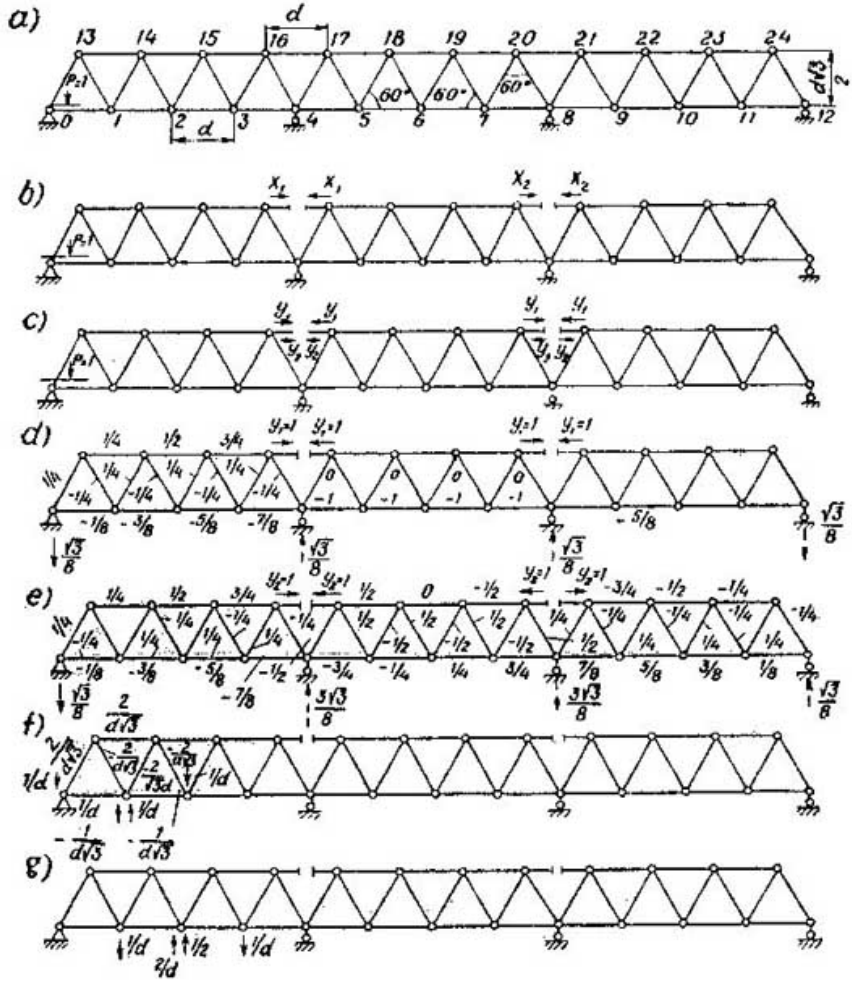


Fig. 12.5

Ejemplo 12.2. Construir las líneas de influencia de las fuerzas longitudinales en las barras *16-17*, *18-19* y *18-6* de la armadura mostrada en la fig. 12.5*a*. El área de las secciones de cada una de las barras de los cordones es igual a F. El área de las secciones de cada una de las seis riostras de apoyo, es igual a $\frac{4}{5}F$. El área de cada una de las secciones de las otras diagonales es igual a $\frac{1}{2}$. Todas las barras fueron hechas del mismo material.

Resolución

La armadura es de doble hiperestaticidad externa por tener dos barras de apoyo superfluas. Por tener la armadura dada eje de simetría, elegimos un sistema básico simétrico Este último se muestra en la fig. 12.5*b*, donde han sido seccionadas las barras *16-17* y *20-21*. Los esfuerzos en éstas son designados con X_1 y X_2. Para eliminar los desplazamientos suplementarios empleamos el procedimiento de las incógnitas emparejadas. Con este objeto, las fuerzas X_1 y X_2, dispuestas en forma simétrica, aunque diferentes una de otra, son presentadas del siguiente modo:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= Y_1 + Y_2; \\ X_2 &= Y_1 - Y_2. \end{aligned}\right\} \tag{12.6}$$

Tomamos los grupos de fuerzas Y_1 e Y_2 en calidad de nuevas incógnitas emparejadas (fig. 12.5*c*). El grupo Y_1 es simétrico y el Y_2, antisimétrico. Por eso, los desplazamientos suplementarios δ_{12} y $\delta_{21} = \delta_{12}$ son iguales a cero y las ecuaciones canónicas toman la forma:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}Y_1 + \delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{22}Y_2 + \delta_{2P} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

De aquí, la ecuación de la línea de influencia de la fuerza generalizada Y_1, del grupo simétrico de las incógnitas emparejadas, será:

$$Y_1 = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}}. \tag{12.8}$$

La ecuación de la línea de influencia de la fuerza generalizada Y_2, del grupo de incógnitas emparejadas, antisimétrico, es:

$$Y_2 = -\frac{\delta_{P2}}{\delta_{22}}. \tag{12.9}$$

Las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras pueden ser halladas por la expresión

$$\text{l. i. de } N_{iP} = (\text{l. i. de } Y_1)\,\bar{N}_{i1} + (\text{l. i. de } Y_2)\,\bar{N}_{i2} + \text{l. i. de } N^0_{iP}, \tag{12.10}$$

donde $\overline{N}_{i1}$ y $\overline{N}_{i2}$ son los valores de los esfuerzos en la barra i, debidos a las fuerzas unitarias emparejadas, $Y_1 = 1$ e $Y_2 = 1$, respectivamente (fig. 12.5*d*, *e*).

Las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras *16-17* y *20-21*, es decir, las líneas de influencia de los esfuerzos X_1 y X_2 también pueden ser hallados por (12.10) o (12.6):

$$\left.\begin{array}{l} \text{l. i. de } X_1 = \text{l. i. de } Y_1 + \text{l. i. de } Y_2; \\ \text{l. i. de } X_2 = \text{l. i. de } Y_1 - \text{l. i. de } Y_2. \end{array}\right\} \qquad (12.11)$$

Los esfuerzos $\overline{N}_{i1}$ y $\overline{N}_{i2}$ en las barras del sistema básico, debidos a $Y_1 = 1$ e $Y_2 = 1$, respectivamente, hallados por los métodos comunes, fueron anotados en la fig. 12.5*d*, *e*, en los ejes de las barras. Dado que en la fig. 12.5*d* los esfuerzos en el primer tramo

Tabla 12.1

Barras	$\overline{N}_{i1}$	$\overline{N}_{i1}^2$	$\frac{l_i}{l_0}$	$\frac{E_i}{E_0}$	$\frac{F_i}{F_0}$	$\frac{\overline{N}_{i1}^2 \frac{l_i}{l_0}}{\frac{E_i}{E_0}\cdot\frac{F_i}{F_0}}$
0-1	$-1/8$	$1/64$	1	1	1	$1/64$
1-2	$-3/8$	$9/64$	1	1	1	$9/64$
2-3	$-5/8$	$25/64$	1	1	1	$25/64$
3-4	$-7/8$	$49/64$	1	1	1	$49/64$
13-14	$1/4$	$1/16$	1	1	1	$4/64$
14-15	$1/2$	$1/4$	1	1	1	$16/64$
15-16	$3/4$	$9/16$	1	1	1	$36/64$
0-13	$1/4$	$1/16$	1	1	$4/5$	$5/64$
13-1	$-1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
1-14	$1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
14-2	$-1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
2-15	$1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
15-3	$-1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
3-16	$1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
16-4	$-1/4$	$1/16$	1	1	$4/5$	$5/64$
16-17	1	1	1	1	1	$54/64$
4-5	-1	1	1	1	1	$64/64$
5-6	-1	1	1	1	1	$64/64$
17-18	1	1	1	1	1	$64/64$
18-19	1	1	$1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	1	1	$32/64$

$\sum_i$ en la mitad de la armadura 486/64

$$\delta_{11} = \frac{l_0}{E_0F_0}\, 2\, \frac{486}{64} = \frac{486}{32} \cdot \frac{l_0}{E_0F_0} = \frac{486\, d}{32E_0F_0} = \frac{243\, d}{16E_0F_0}.$$

son simétricos a los esfuerzos en el tercer tramo, entonces, éstos no son mostrados.

Los cálculos previos a la determinación de los desplazamientos propios δ_{11} y δ_{22} se dan en las tablas 12.1 y 12.2.

Para facilitar los cálculos, presentamos las fórmulas de estos desplazamientos en la forma:

$$\delta_{11} = \sum_i \frac{\overline{N}_{i1}^2 l_i}{E_i F_i} = \sum_i \frac{\overline{N}_{i1}^2 l_i \frac{l_0}{l_0}}{E_i \frac{E_0}{E_0} F_i \frac{F_0}{F_0}} =$$

$$= \sum_i \frac{\overline{N}_{i1}^2 \frac{l_i}{l_0} l_0}{\frac{E_i}{E_0} \cdot \frac{E_i}{E_0} E_0 F_0} = \frac{l_0}{E_0 F_0} \sum_i \frac{\overline{N}_{i1}^2 \frac{l_i}{l_0}}{\frac{E_i}{E_0} \cdot \frac{F_i}{F_0}}, \qquad (12.12)$$

respectivamente,

$$\delta_{22} = \frac{l_0}{E_0 F_0} \sum \frac{\overline{N}_{i2}^2 \frac{l_i}{l_0}}{\frac{E_i}{E_0} \cdot \frac{F_i}{F_0}}, \qquad (12.13)$$

donde las magnitudes l_0, E_0 y F_0 se refieren a las barras seccionadas *16-17* y *20-21*.

Dado que todas las barras son del mismo material, $\frac{E_i}{E_0} = 1$. Para los cordones, la relación es $\frac{F_i}{F_0} = 1$, para las riostras de apoyo, $\frac{F_i}{F_0} = 0{,}8$. Para las riostras restantes, $\frac{F_i}{F_0} = 0{,}5$. Las barras con los esfuerzos nulos $\overline{N}_{i1}$ y $\overline{N}_{i2}$ no fueron incluidas en las tablas.

En el caso examinado, para construir el diagrama de δ_{P1}, es indispensable calcular solamente los pesos elásticos de los nudos *1, 2, 3, 5, 6*, es decir w_{11}, w_{21}, w_{31}, w_{51}, w_{61} y, dado que los pesos elásticos de los nudos *7, 9, 10* y *11* se determinan por simetría: $w_{71} = w_{51}$; $w_{91} = w_{31}$; $w_{10,1} = w_{21}$ y $w_{11,1} = w_{11}$. Análogamente, para construir el diagrama de δ_{P2}, es indispensable determinar los pesos elásticos w_{12}, w_{22}, w_{32}, w_{52} y w_{62} y, luego, por la simetría inversa, vamos a tener que $w_{72} = -w_{52}$; $w_{9,2} = -w_{32}$; $w_{10,2} = -w_{22}$ y $w_{11,2} = -w_{12}$. Para facilitar los cálculos, presentamos la fórmula (12.3) en la forma:

$$\left.\begin{aligned} w_{n1} &= \frac{l_0}{E_0 F_0} \sum_i \frac{\overline{N}_{in}\overline{N}_{i1} \frac{l_i}{l_0}}{\frac{E_i}{E_0} \cdot \frac{E_i}{F_0}}; \\ \text{análogamente,} \quad w_{n2} &= \frac{l_0}{E_0 F_0} \sum_i \frac{\overline{N}_{in}\overline{N}_{i2} \frac{l_i}{l_0}}{\frac{E_i}{E_0} \cdot \frac{F_i}{F_0}}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.14)$$

Tabla 12.2

Barras	$\overline{N}_{i2}$	$\overline{N}^2_{i2}$	$\frac{l_i}{l_0}$	$\frac{E_i}{E_0}$	$\frac{F_i}{F_0}$	$\overline{N}^2_{i2}\frac{l_i}{l_0}\cdot\frac{F_i}{E_0}\cdot\frac{F_i}{F_0}$
0-1	$-1/8$	$1/64$	1	1	1	$1/64$
1-2	$-3/8$	$9/64$	1	1	1	$9/64$
2-3	$-5/8$	$25/64$	1	1	1	$25/64$
3-4	$-7/8$	$49/64$	1	1	1	$49/64$
13-14	$1/4$	$1/16$	1	1	1	$4/64$
14-15	$1/2$	$1/4$	1	1	1	$16/64$
15-16	$3/4$	$9/16$	1	1	1	$36/64$
0-13	$1/4$	$1/16$	1	1	$4/5$	$5/64$
13-1	$-1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
1-14	$1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
14-2	$-1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
2-15	$1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
15-3	$-1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
3-16	$1/4$	$1/16$	1	1	$1/2$	$8/64$
16-4	$-1/4$	$1/16$	1	1	$4/5$	$5/64$
16-17	1	1	1	1	1	$64/64$
4-5	$-3/4$	$9/16$	1	1	1	$36/64$
5-6	$-1/4$	$1/16$	1	1	1	$4/64$
17-18	$1/2$	$1/4$	1	1	1	$16/64$
4-17	$-1/2$	$1/4$	1	1	$4/5$	$20/64$
17-5	$1/2$	$1/4$	1	1	$1/2$	$32/64$
5-18	$-1/2$	$1/4$	1	1	$1/2$	$32/64$
18-6	$1/2$	$1/4$	1	1	$1/2$	$32/64$

$\sum_i$ en la mitad de la armadura 434/64

$$\delta_{22} = \frac{l_0}{E_0F_0}\,2\,\frac{434}{64} = \frac{434}{32}\cdot\frac{l_0}{E_0F_0} = \frac{434\,d}{31\,E_0F_0} = \frac{217\,d}{16\,E_0F_0}.$$

Los cálculos previos a la determinación de los valores de w_{n1} y w_{n2}, por estas fórmulas, pueden ser efectuados en forma de tablas. Así, la tabla 12.3 ha sido compuesta para calcular el peso elástico w_{11}. La carga del sistema básico con un grupo de fuerzas unitario para la determinación de w_{11} se muestra en la fig. 12.5*f*. Esta misma carga sirve para la determinación de w_{12}.

El grupo unitario de fuerzas, aplicado al sistema básico, para la determinación de w_{21} y w_{22}, se muestra en la fig. 12.5*g*. El desplazamiento sucesivo del grupo unitario de fuerzas, para la determinación de los otros pesos, es análogo al descripto en el

ejemplo 12.1. Los pesos elásticos restantes serán:

$$w_{21} = w_{10.1} = w_{22} = -w_{10.2} = \frac{16}{8E_0F_0\sqrt{3}};$$

$$w_{31} = w_{91} = w_{32} = -w_{92} = \frac{27}{8E_0F_0\sqrt{3}};$$

$$w_{51} = w_{71} = w_{61} = \frac{32}{8E_0F_0\sqrt{3}};$$

$$w_{12} = -w_{11.2} = \frac{5}{8E_0F_0\sqrt{3}};$$

$$w_{52} = -w_{72} = \frac{22}{8E_0F_0\sqrt{3}};$$

$$w_{62} = 0.$$

Por cuanto el sistema básico tiene tres tramos, la cadena de tres vigas de un tramo se carga con los pesos elásticos (fig. 12.6*a*, *c*).

Tabla 12.3

Barras	$\overline{N}_{i1}$	$\overline{N}_{i1}$	$\frac{l_i}{l_0}$	$\frac{E_i}{E_0}$	$\frac{F_i}{F_0}$	$\frac{\overline{N}_{i1}\overline{N}_{i1}\frac{l_i}{l_0}}{\frac{E_i}{E_0}\cdot\frac{F_i}{F_0}}$
0-1	$-\frac{1}{d\sqrt{3}}$	$-1/8$	1	1	1	$\frac{1}{8d\sqrt{3}}$
1-2	$-\frac{1}{d\sqrt{3}}$	$-3/8$	1	1	1	$\frac{3}{8d\sqrt{3}}$
13-14	$\frac{2}{d\sqrt{3}}$	$1/4$	1	1	1	$\frac{4}{8d\sqrt{3}}$
0-13	$\frac{2}{d\sqrt{3}}$	$1/4$	1	1	$4/5$	$\frac{5}{8d\sqrt{3}}$
13-1	$-\frac{2}{d\sqrt{3}}$	$-1/4$	1	1	$1/2$	$\frac{8}{8d\sqrt{3}}$
1-14	$-\frac{2}{d\sqrt{3}}$	$1/4$	1	1	$1/2$	$-\frac{8}{8d\sqrt{3}}$
14-2	$\frac{2}{d\sqrt{3}}$	$-1/4$	1	1	$1/2$	$-\frac{8}{8d\sqrt{3}}$
						$\sum_i = \frac{5}{8d\sqrt{3}}$

$$w_{11} = w_{11.1} = \frac{5}{8d\sqrt{3}} \cdot \frac{l_0}{E_0F_0} = \frac{5}{8E_0F_0\sqrt{3}}.$$

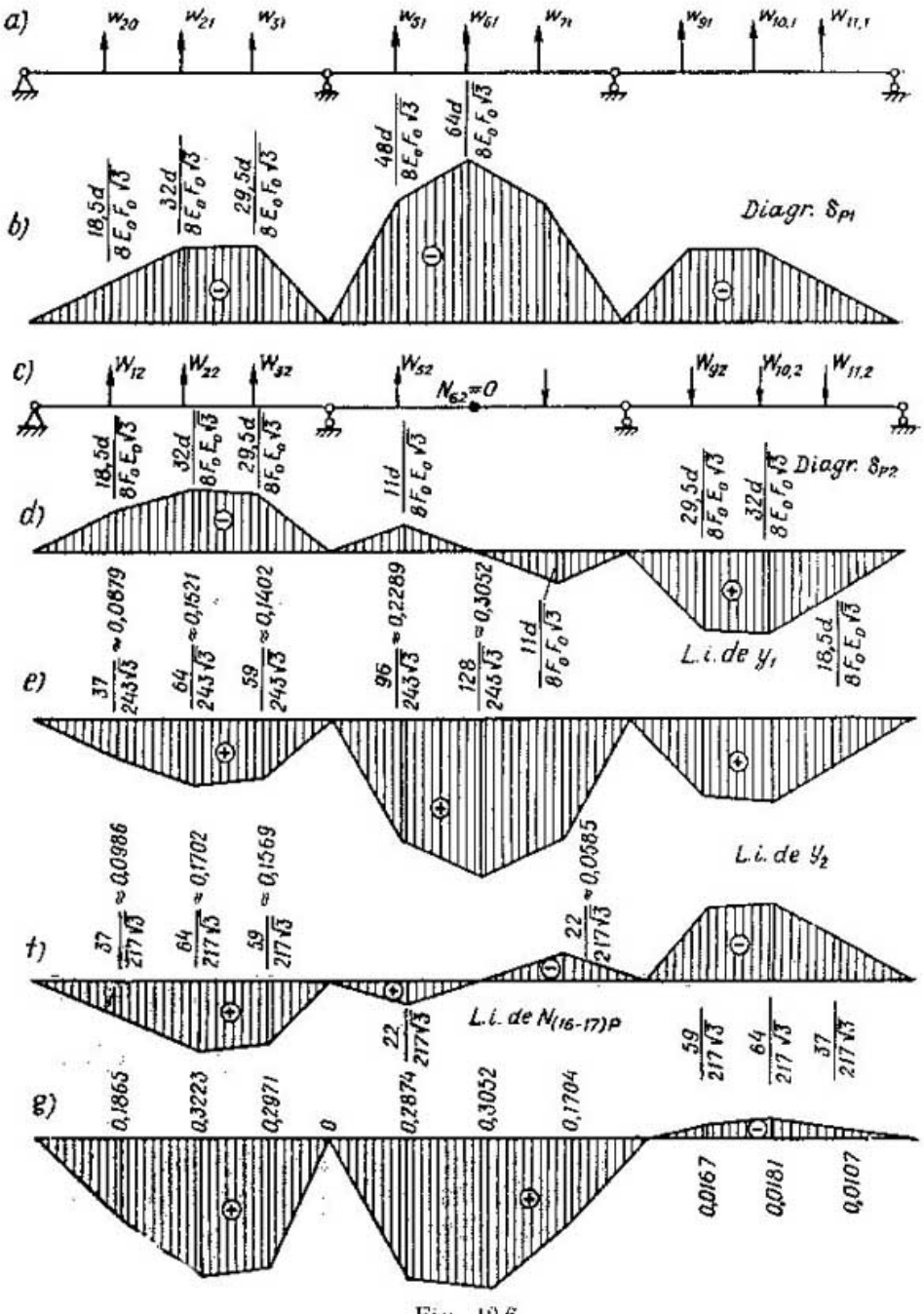

a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
Diagr. δ_{P1}
Diagr. δ_{P2}
$N_{62}=0$
L.i. de y_1
L.i. de y_2
L.i. de $N_{(16-17)P}$
0,1865
0,3223
0,2971
0
0,2874
0,3052
0,1704
0,0167
0,0181
0,0107

Fig. 12.6

Los pesos elásticos positivos están dirigidos hacia arriba, los negativos, hacia abajo. Los diagramas de los momentos flectores debidos a estos pesos (fig. 12.6*b*, *d*), representan diagramas nodales de δ_{P1} y δ_{P2}, respectivamente.

Al colocar los valores de las ordenadas δ_{P1} y δ_{P2} en (12.8) y (12.9) se obtienen las ordenadas de las líneas de influencia de Y_1

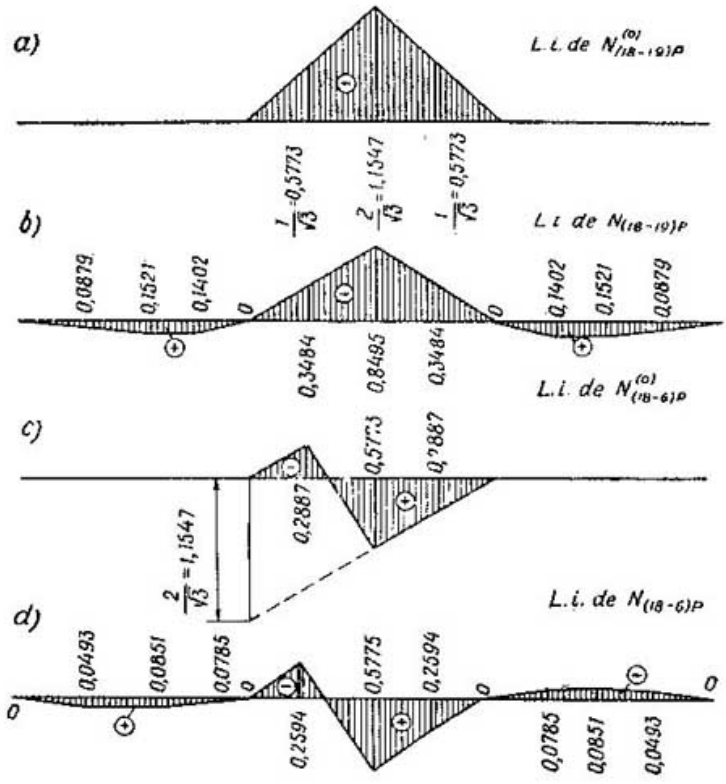


Fig. 12.7

e Y_2. Los valores de estas ordenadas y la configuración de las líneas de influencia de Y_1 e Y_2 se muestran en la fig. 12.6*e*, *f*.

Las líneas de influencia de las fuerzas axiles en las barras *16-17*, *18-19* y *18-6* se han construido por la expresión (12.10). Los valores de los esfuerzos $\bar{N}_{i1}$ y $\bar{N}_{i2}$ en las barras señaladas se dan en la fig. 12.5*d*, *e*. De tal modo, tenemos que

$$\text{l. i. de } N_{(16\text{-}17)\,P} = 1\ (\text{l. i. de } Y_1) + 1\ (\text{l. i. de } Y_2) + 0;$$

aquí, dado que en el sistema básico la barra *16-17* está seccionada, la l. i. de $N^{(0)}_{(16\text{-}17)\,P} = 0$; la l. i. de $N_{(16\text{-}17)\,P}$ se da en la

fig. 12.6*g*;

l. i. de $N_{(18\text{-}19)\,P} = 1$ (l. i. de Y_1) $+ 0$ (l. i. de Y_2) $+$ l. i. de $N^{(0)}_{(18\text{-}19)\,P}$;

l. i. de $N_{(18\text{-}6)\,P} = 0$ (l. i. de Y_1) $+ \frac{1}{2}$ (l. i. de Y_2) $+$ l. i. de $N^{(0)}_{(18\text{-}6)\,P}$.

Las líneas de influencia de $N^{(0)}_{iP}$, para las barras examinadas en el sistema básico, se muestran en la fig. 12.7*a*, *c*. Las líneas de influencia de los esfuerzos para estas barras, en el sistema dado, se dan en la fig. 12.7*b*, *d*.

Ejemplo 12.3. En el sistema combinado (fig. 12.8*a*)[1]) que representa una viga continua (viga de rigidez) de sección transversal constante, reforzada con un arco articulado (arco flexible),

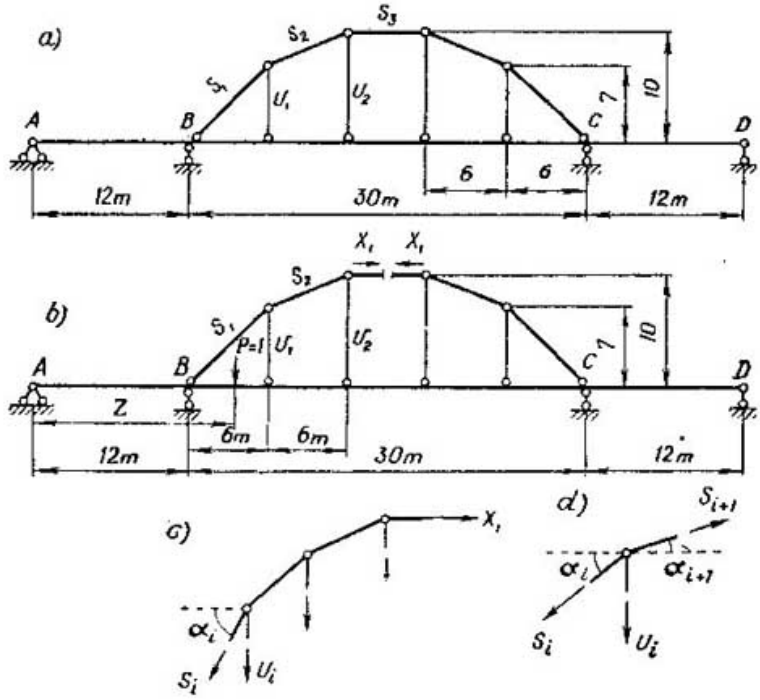


Fig. 12.8

se exige construir las siguientes líneas de influencia: 1) de la fuerza axil en la barra S_3; 2) del momento de apoyo en el apoyo B; 3) del momento en la sección que se halla arriba del punto de fijación del puntal V_2; 4) de los momentos nucleares en la misma sección; 5) de la fuerza transversal en la misma sección. La viga

[1]) El ejemplo 12.3 fue elaborado por el candidato a doctor en ciencias técnicas, doc. A. M. Smirnov, con la participación y redacción del autor.

de rigidez y los elementos de la superestructura están hechos del mismo material. Las áreas de las secciones de las barras de la cadena es $F_{cad} = 0{,}2\,F_{vig}$, donde F_{vig} es el área de la sección de la viga de rigidez. Las áreas de las secciones de los pendolones es $F_{pend} = 0{,}1\,F_{vig}$. El momento de inercia de la sección transversal de la viga es tomado, numéricamente, igual al área de esta sección: $J_{vig} = l^2 F_{vig}$. Las distancias desde los puntos superior e inferior del núcleo hasta el centro de gravedad de la sección son:

$$r_s = r_i = 0{,}3 \text{ m}.$$

El arco y la viga están unidos sin excentricidad.

Resolución

1. Elección del sistema básico. El sistema dado es simétrico. Por lo que el sistema básico se elige también simétrico. Esto simplifica considerablemente todo el cálculo siguiente. Como vínculo superfluo es adoptada la barra S_3, ubicada en el eje de simetría del sistema. El esfuerzo incógnito en esta barra se designa por X_1. El sistema básico adoptado está representado en la fig. 12.8*b*. Fue obtenido con el seccionado de la barra S_3. Este sistema básico es de doble hiperestaticidad. En este caso, se supone que el cálculo de la viga continua ya fue efectuado. La carga externa, la fuerza $P = 1$, se desplaza por la viga continua. La ecuación de la línea de influencia de la incógnita básica tiene la forma

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}^{(2)}}{\delta_{11}^{(2)}} = -\frac{\delta_{P1}^{(2)}}{\delta_{11}^{(2)}} \qquad (12.15)$$

El índice (2), en las designaciones de los desplazamientos, indica que estos desplazamientos se determinan en un sistema básico de doble hiperestaticidad.

La sustitución de $\delta_{1P}^{(2)}$ por $\delta_{P1}^{(2)}$ se efectúa basándose en el teorema de los desplazamientos recíprocos. El sentido geométrico del desplazamiento $\delta_{11}^{(2)}$ es un desplazamiento recíproco de los extremos de la barra seccionada, por la dirección de la fuerza X_1, debido a la acción de la fuerza $X_1 = 1$ sobre el sistema básico. Los desplazamientos $\delta_{P1}^{(2)}$ son las ordenadas del eje curvo de la viga continua, debidos a la acción de las fuerzas $X_1 = 1$ sobre el sistema básico.

Si construimos el diagrama de los desplazamientos verticales $\delta_{P1}^{2)}$ y dividimos cada ordenada por la magnitud constante $\delta_{11}^{(2)}$, entonces, según (12.5), resulta la línea de influencia del esfuerzo X_1.

2. Determinación del desplazamiento unitario $\delta_{11}^{(2)}$. El desplazamiento $\delta_{11}^{(2)}$ en el sistema básico es el resultado de las deforma-

ciones longitudinales de las barras de la superestructura y de la viga de rigidez, y las deformaciones por flexión de esta viga:

$$\delta_{11}^{(2)} = \delta_{11}^{(2)}(N) + \delta_{11}^{(2)}(M). \qquad (12.16)$$

El desplazamiento originado por las deformaciones longitudinales de las barras se determina por la fórmula (12.2).

En (12.2), la suma encierra todas las barras de la superestructura y la viga de rigidez en el tramo BC. En los tramos AB y CD de esta viga no hay fuerzas longitudinales. El cálculo del desplazamiento $\delta_{11}^{(2)}(N)$ se muestra en la tabla 12.4.

Tabla 12.4

Denominación de las barras	l_i, m	F_i, m²	$\frac{l_i}{E_i F_i}$, m/t	$\overline{N}_{i1}$	$\overline{N}_{i1}^2$	$\frac{\overline{N}_{i1}^2 l_i}{E_i F_i}$, m/t
S_1	9,22	$0{,}2F_{vig}$	$\frac{46{,}1}{EF_{vig}}$	+1,54	2,37	$\frac{109}{EF_{vig}}$
S_2	6,70	$0{,}2F_{vig}$	$\frac{33{,}5}{EF_{vig}}$	+1,12	1,25	$\frac{41{,}9}{EF_{vig}}$
S_3	$\frac{6}{2} = 3{,}00$	$0{,}2F_{vig}$	$\frac{15{,}0}{EF_{vig}}$	+1,00	1,00	$\frac{15{,}0}{EF_{vig}}$
V_1	7,00	$0{,}1F_{vig}$	$\frac{70{,}0}{EF_{vig}}$	−0,666	0,442	$\frac{30{,}9}{EF_{vig}}$
V_2	10,00	$0{,}1F_{vig}$	$\frac{100}{EF_{vig}}$	−0,500	0,25	$\frac{25{,}0}{EF_{vig}}$
S_{BC}	$\frac{1}{2}30{,}00 = 15{,}00$	F_{vig}	$\frac{15{,}0}{EF_{vig}}$	−1,00	1,00	$\frac{15{,}0}{EF_{vig}}$

$$\frac{1}{2}\delta_{11}^{(2)}(N) = \sum_i \frac{236{,}5}{EF_{vig}} \text{ (m/t)}$$

$$\delta_{11}^{(2)}(N) = \frac{473{,}6}{EF_{vig}} \text{ (m/t)}.$$

Las longitudes de las barras se determinan por las dimensiones básicas dadas del sistema y, en la tabla 12.4 se dan en metros. Las áreas de las secciones de las barras están indicadas en la condición del ejemplo. Según esta misma condición, el módulo de elasticidad del material es $E_i = E$.

Las fuerzas longitudinales S_1 y S_2 en las barras del arco articulado y las V_1 y V_2 en los pendolones se determinaron por las conocidas reglas de cálculo de las armaduras isostáticas, por ejemplo, por el método de recorte de nudos. En este caso, no es

difícil convencerse de que los esfuerzos para cualquier elemento del cordón del arco se expresan por (fig. 12.8*c*):

$$S_i = \frac{X_1}{\cos \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{12.17}$$

Los esfuerzos en los pendolones (fig. 12.8*d*) son:

$$V_i = X_1 (\operatorname{tg} \alpha_{(i+1)} - \operatorname{tg} \alpha_i), \tag{12.18}$$

donde α_i es el ángulo de inclinación de la i^{ma} barra del cordón de arco a examinar, respecto al horizonte.

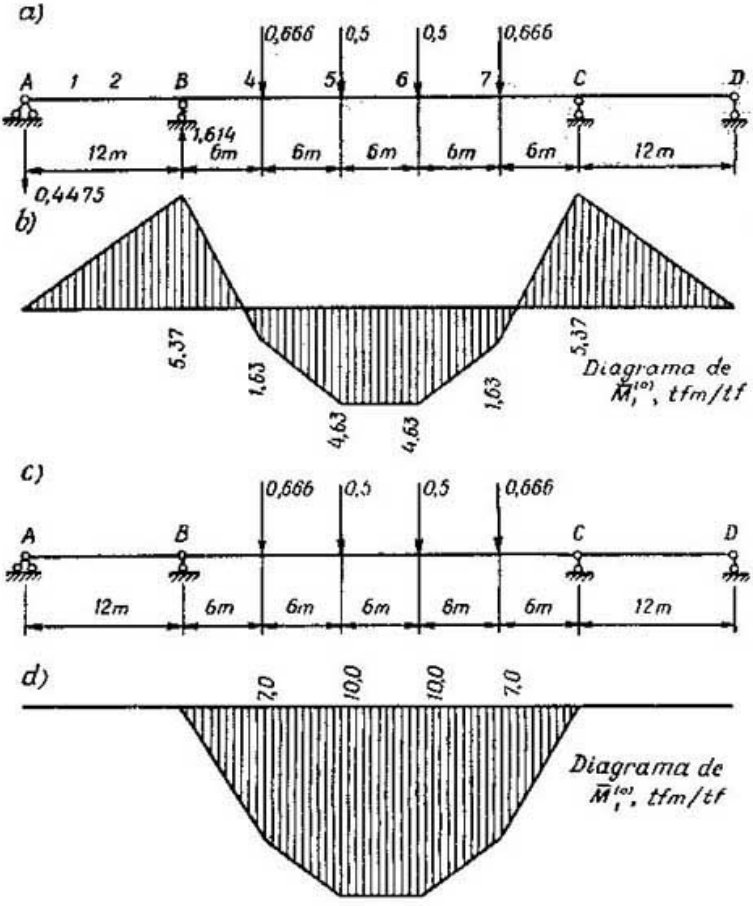


Fig. 12.9

La fuerza longitudinal en el tramo de viga *BC*, es decir, en la barra S_{BC}, es igual a la proyección horizontal del esfuerzo de la barra S_3 con signo contrario, o sea, igual a $-X_1$, de lo que es fácil convencerse, efectuando un corte por el elemento S_3, en el

sistema dado (arco y viga), y proyectando sobre el eje horizontal todas las fuerzas que actúan en la parte cortada. De las expresiones (12.17) y (12.18) se sigue que las líneas de influencia de las fuerzas longitudinales, en los elementos del arco y en los pendolones, serán semejantes a las líneas de influencia de X_1 y se determinarán por estas expresiones.

El sistema básico y la carga unitaria que actúa sobre éste son simétricos. Por eso, en la tabla 12.4 se consideró solamente la mitad del sistema. Para obtener el valor completo del desplazamiento $\delta_{11}^{(2)}(N)$ se duplica la suma de la tabla 12.4. El desplazamiento $\delta_{11}^{(2)}(M)$ fue originado por la flexión de la viga continua. Para determinarlo, en la viga continua se construye el diagrama de los momentos flectores debidos a la solicitación de la fuerza $X_1 = 1$ sobre el sistema básico. Dicho diagrama está representado en la fig. 12.9*b*. Fue construido en función de la carga que se da en la fig. 12.9*a*. Aquí, las fuerzas 0,666 y 0,500 se toman de la tabla 12.4, las cuales expresan la acción de los pendolones sobre la viga ($V_1 = -0{,}666$ y $V_2 = -0{,}500$).

El proceso del cálculo de la viga continua con carga indicada no se efectúa, ya que se supone que es sabido. El cálculo del desplazamiento $\delta_{11}^{(2)}(M)$ se efectúa por la "multiplicación" de diagramas, según la conocida fórmula

$$\delta_{11}^{(2)}(M) = (\bar{M}_1) \cdot (\bar{M}_1^{(0)}) = \sum \frac{w_1 y_1}{EJ_{\text{vlg}}} \text{ (m/tf)}, \qquad (12.19)$$

donde $\bar{M}_1$ es el diagrama de la fig. 12.9 *b* y $\bar{M}_1^{(0)}$ el de la fig. 12.9*d*. Aquí, para simplificar el cálculo, se emplea la regla de determinación de los desplazamientos de los sistemas hiperestáticos, según el cual, uno de los diagramas multiplicados puede ser tomado del sistema isostático. Con este objeto se aplicó la fuerza $X_1 = 1$ al sistema isostático, compuesto por la superestructura con un corte en la barra S_3 y por las vigas partidas, con los apoyos articulados. El respectivo sistema (sin la superestructura) se da en la fig. 12.9*c*.

Empleando la fórmula (12.19) y tomando en cuenta que $J_{\text{vlg}} = l^2 F_{\text{vlg}}$ (por condición), hallamos que:

$$\delta_{11}^{(2)}(M) = \frac{578}{EF_{\text{vlg}}} \text{ m/tf}.$$

El desplazamiento completo definitivo $\delta_{11}^{(2)}$ aumentado EF_{vlg} veces, resulta el siguiente:

$$EF_{\text{vlg}}\delta_{11}^{(2)} = EF_{\text{vlg}}\delta_{11}^{(2)}(N) + EF_{\text{vlg}}\delta_{11}^{(2)}(M) = 473{,}6 + 578 = 1052 \text{ m}.$$

3. Cálculo de los desplazamientos $\delta_{P1}^{(2)}$ y de las ordenadas de la línea de influencia de X_1. Los desplazamientos $\delta_{P1}^{(2)}$ son las ordenadas del eje curvo de la viga continua mostrada en la fig. 12.9*a*, debidos a la acción de las fuerzas $X_1 = 1$ sobre el sistema básico.

El cálculo de estas ordenadas lo efectuamos por la ecuación del método de los parámetros iniciales para el eje curvo de la viga [1]):

$$EJ_{vig}y_z = EJ_{vig}y_0 + EJ_{vig}\varphi_0 z - \sum_i \frac{M_i}{2}(z-a_i)^2 - \\ - \sum_i \frac{P_i}{6}(z-b_i)^3 - \sum_i \frac{q_i}{24}[(z-c_i)^4 - (z-d_i)^4]. \quad (12.20)$$

En esta fórmula, y_0 y φ_0 son la flecha y el ángulo de giro de la sección en el origen de las coordenadas; M_i, P_i y q_i son los momentos, las fuerzas concentradas y las intensidades de las cargas uniformemente repartidas; a_i y b_i son las distancias desde el origen de las coordenadas hasta las secciones donde están aplicadas M_i y P_i; c_i es la distancia desde el origen de las coordenadas hasta el origen del tramo, con intensidad q_i; d_i es la distancia desde el origen de las coordenadas hasta el extremo de este tramo; z es la abscisa variable de la sección.

Se consideran positivos: la flecha hacia abajo y el giro de la sección en el sentido de las agujas del reloj; el momento, cuando está traccionada la fibra interior; y las cargas P y q, si están dirigidas hacia arriba.

El origen de las coordenadas se toma en el punto A. El ángulo de giro de la sección en el origen de las coordenadas, se determina por la condición de que la flecha en el apoyo B sea igual a cero. En el caso dado resulta que $\varphi_0 = -\frac{10{,}75}{EJ_{vig}}$, y la flecha en el apoyo es A: $y_0 = 0$.

Ahora por la fórmula (12.20), se pueden calcular las magnitudes $\delta_{Pi}^{(2)}$ en cualquier sección de la viga continua. Por ejemplo, la flecha en la sección 4, para $z = 18$ m, se determina de la siguiente expresión:

$$EJ_{vig}y_4 = -10{,}75 \cdot 18 + \frac{0{,}4475}{6}18^3 - \frac{1{,}614}{6}(18-12)^3 = 183 \text{ m}^3.$$

De tal modo, $y_4 = \frac{183}{EJ_{vig}}$ (m/tf). La dimensión indicada de y_4 y, en general, la dimensión de los desplazamientos, $\delta_{Pi}^{(2)}$, así como también la del desplazamiento $\delta_{11}^{(2)}$, está ligada al hecho de que la fuerza $X_1 = 1$ es adimensional. Por eso, las fuerzas $\bar{N}_{i1}$ y las que actúan sobre la viga continua, dada en la fig. 12.9*a*, también son adimensionales.

En la tabla 12.5 se dan los valores de $\delta_{Pi}^{(2)}$ calculados de tal modo e iguales a las flechas y_i en las distintas secciones de la

[1]) Si la viga continua es de sección variable, con variación suave del momento de inercia, el diagrama puede ser construido en forma aproximada por los pesos elásticos (véase más abajo, el ejemplo 12.4).

viga continua. En esta misma tabla se dan también las ordenadas de la línea de influencia de X_1, calculadas por la fórmula $X_1 = -\frac{\delta_{P1}^{(2)}}{\delta_{11}^{(2)}}$. En esta fórmula, el denominador es una magnitud constante, calculada más arriba: $\delta_{11}^{(2)} = \frac{1052}{EF_{vig}}$ (m/tf).

En vista de la simetría de la estructura, las ordenadas se determinan sólo para una de sus mitades. Durante el cálculo de las ordenadas de la línea de influencia del esfuerzo X_1, se consideró que la rigidez de la viga, de acuerdo al problema, se expresa por medio del área de su sección:

$$EJ_{vig} = (1\ \text{m})^2 EF_{vig}.$$

Tabla 12.5

N° de la sección	1	2	4	5
$\delta_{P1}^{(2)}$	$-\frac{38{,}2}{EJ_{vig}}$ m/t	$-\frac{47{,}6}{EJ_{vig}}$ m/t	$+\frac{183{,}0}{EJ_{vig}}$ m/t	$+\frac{331{,}0}{EJ_{vig}}$ m/t
Ordenadas de la línea de influencia de X_1	+0,0363	+0,0453	−0,174	−0,314

Como conclusión de la división de $\delta_{P1}^{(2)}$ por $\delta_{11}^{(2)}$, las ordenadas de la línea de influencia de X_1 serán adimensionales. La línea de influencia del esfuerzo X_1 está representada en la fig. 12.10*a*.

4. Construcción de la línea de influencia del momento flector en la sección 5 de la viga de rigidez. La línea de influencia del momento flector en la sección arbitraria z de la viga continua del sistema dado (en la viga de rigidez) se determina por la siguiente expresión:

$$\text{l. i. de } M_{(z)} = \text{l. i. de } M_z^c + (\text{l. i. de } X_1 \overline{M}_z), \qquad (12.21)$$

donde l. i. de $M_z^{(c)}$ son las ordenadas de la línea de influencia del momento flector en la sección dada z del sistema básico, o sea, de la viga continua;

l. i. de X_1, las ordenadas de la línea de influencia de X_1;

$\overline{M}_{(z)}$, el momento flector (tfm/tf), en esta misma sección, debido a la acción de la fuerza $X_1 = 1$ sobre el sistema básico.

Así, por ejemplo, la ecuación de la línea de influencia de M_5 (del momento flector en la sección 5 del sistema dado), según la ecuación (12.21) toma la forma:

$$\text{l. i. de } M_5 = \text{l. i. de } M_5^{(c)} + (\text{l. i. de } X_1)\,\overline{M}_5.$$

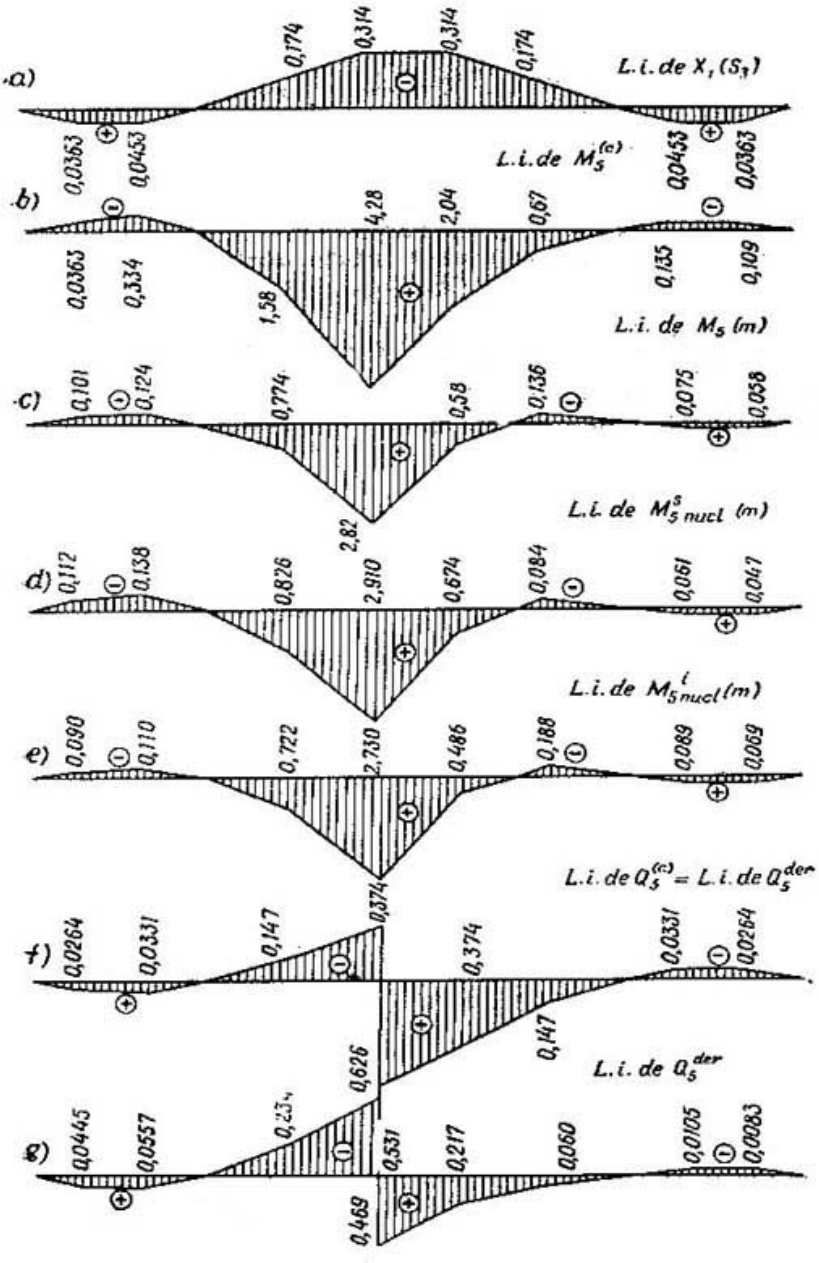

a)
0,174
0,314
0,314
0,174
L.i. de $X_1(S_1)$
0,0363
0,0453
L.i. de $M_5^{(c)}$
0,0453
0,0363
b)
4,28
2,04
0,67
0,0363
0,334
1,58
0,135
0,109
L.i. de M_5 (m)
c)
0,101
0,124
0,774
0,58
0,136
0,075
0,058
2,82
L.i. de $M_{5\,nucl}^{s}$ (m)
d)
0,112
0,138
0,826
2,910
0,674
0,084
0,061
0,047
L.i. de $M_{5\,nucl}^{i}$ (m)
e)
0,090
0,110
0,722
2,730
0,486
0,188
0,089
0,069
L.i. de $Q_5^{(c)} = $ L.i. de Q_5^{der}
0,374
f)
0,0264
0,0331
0,147
0,374
0,0331
0,0264
0,626
0,147
L.i. de Q_5^{der}
g)
0,0445
0,0557
0,531
0,217
0,060
0,0105
0,0083
0,469

Fig. 12.10

Aquí l. i. de $M_5^{(c)}$ son las ordenadas de la línea de influencia del momento flector en la sección 5 de la viga continua; dicha línea de influencia está representada en la fig. 12.10*b*;

$\overline{M}_5 = +4{,}63$ tfm/tf, el momento flector en la sección 5 del sistema básico, o sea, de la viga continua, debido a una solicitación unitaria (véase la fig. 12.9*b*);

l. i. de X_1 son las ordenadas de la línea de influencia del X_1 de la tabla 12.5.

El proceso de construcción de las líneas de influencia de los esfuerzos en la viga continua se lo da por sabido, por lo que no se expone [1]).

En la fig. 12.10*c* está representada la línea de influencia del momento flector M_5 en la sección 5 del sistema combinado dado, construida por la ecuación indicada.

5. Construcción de las líneas de influencia de los momentos nucleares en la sección 5 de la viga de rigidez. Dado que las líneas de influencia del momento flector y de la fuerza longitudinal tienen distintas formas y que la viga de rigidez recibe el empuje horizontal del arco, entonces, para determinar las mayores tensiones de borde normales en la viga de rigidez, en el caso de carga rodante, se deben emplear las líneas de influencia de estas tensiones o las de los momentos nucleares, por medio de los cuales las tensiones de borde se expresan con las fórmulas de un solo término:

$$\sigma_{inf} = \frac{M_{z\,nucl}^{sup}}{W_{inf}}, \quad \sigma_{sup} = -\frac{M_{z\,nucl}^{inf}}{W_{sup}}, \tag{12.22}$$

donde σ_{inf} y σ_{sup} son las tensiones de borde normales en los puntos superior e inferior de cierta sección z;

$M_{z\,nucl}^{sup}$ y $M_{z\,nucl}^{inf}$, los momentos nucleares con respecto a los puntos superior e inferior del núcleo de esta sección;

W_{inf} y W_{sup}, los momentos de resistencia de la misma sección durante el cálculo de las tensiones de borde, superior e inferior.

En este caso, las ordenadas de las líneas de influencia de los momentos nucleares pueden ser obtenidas por la expresión

$$\text{l. i. de } M_{z\,nucl}^{sup/inf} = \text{l. i. de } M_z \pm (\text{l. i. de } N_z)\, r_{\frac{sup}{inf}}; \tag{12.23}$$

---

[1]) Véase por ejemplo, G. Grio. Vigas continuas con momento de inercia constante. Tablas. M. — L., GITI. 1931.

La posibilidad de emplear estas tablas para las vigas con distintos momentos de inercia en los tramos se expone en el trabajo de I. A. Miédnikov. Sobre el cálculo de vigas continuas y pórticos con disitntos momentos de inercia en los tramos. Trabajos de MADI, ed. II. Dorizdat, 1949.

aquí, los índices superiores se refieren al punto superior del núcleo, los inferiores, al inferior;

l. i. de M_z son las ordenadas de la línea de influencia del momento flector en la sección dada z de la viga de rigidez, con respecto al eje central, principal de la sección;

l. i. de N_z, las ordenadas de la línea de influencia de la fuerza longitudinal en esta misma sección de la viga de rigidez; dado que $N_z = -X_1$ (véase pág. 217), la línea de influencia de N_z va a tener, también, el mismo aspecto que la línea de influencia de X_1, pero con los signos contrarios;

r_{sup} y r_{inf}, las distancias de los puntos superior e inferior del núcleo hasta el centro de gravedad de la sección, dadas en las condiciones del ejemplo.

Las líneas de influencia de los momentos nucleares de la sección *5* se exponen en la fig. 12.10*d*, *e*.

6. Construcción de la línea de influencia de la fuerza transversal en la sección 5 de la viga de rigidez. Las ordenadas de la línea de influencia de Q_5, o sea, de la fuerza transversal de la sección *5* del sistema dado, se calculan por la ecuación

$$\text{l. i. de } Q_5 = \text{l. i. de } Q_5^c + (\text{l. i. de } X_1)\,\bar{Q}_5, \qquad (12.24)$$

donde l. i. de Q_5^c son las ordenadas de la línea de influencia de la fuerza transversal en la sección *5* de la viga continua;

$\bar{Q}_5$, la fuerza transversal en la sección a la izquierda del nudo *5*, al accionar la fuerza $X_1 = 1$ sobre el sistema básico;

l. i. de X_1, las ordenadas de la línea de influencia del esfuerzo X_1.

La fuerza transversal es $\bar{Q}_5 = 0{,}5$ tf. Se determina en el sistema básico, en la misma sección a la izquierda del nudo *5*, debida a las cargas indicadas en la fig. 12.9*a*.

En la fig. 12.10*f* está representada la línea de influencia de Q^c, de la fuerza transversal en la sección de la viga continua.

En la fig. 12.10*g* está representada la línea de influencia de Q_5^{izq}. Esta es la línea de influencia de la fuerza transversal en la sección inmediata a la izquierda del nudo *5*, para el sistema combinado dado.

En la sección inmediata a la derecha del nudo *5*, tenemos que $\bar{Q}_5 = 0$. Por eso, la línea de influencia de la fuerza transversal inmediata a la derecha del nudo *5*, es decir, la línea de influencia de Q_5^{der}, para el sistema combinado, coincide con la línea de influencia de la fuerza transversal en la sección *5* de la viga continua, o sea, con la línea de influencia representada en la fig. 12.10*f*.

Ejemplo 12.4. En el sistema combinado (fig. 12.11*a*) [1]) en forma de viga continua de sección variable, reforzada con una cadena articulada, se pide construir las siguientes líneas de influencia: 1) la del empuje horizontal de la cadena; 2) la del momento de apoyo en el apoyo *I* de la viga; 3) la del momento en la sección del medio del segundo tramo de la viga. Se pide confrontar las líneas de influencia de los momentos, construidas en un sistema análogo, si la viga tiene una sección constante F_0, donde F_0 es el área de la sección de la viga en el apoyo *O* y en el medio del segundo tramo. La viga, la cadena y el pendolón son del mismo material. Las áreas de la sección de las barras de la cadena son $F_{cad} = 0{,}2\,F_0$. Las de la sección de los pendolones, $F_{pend} = 0{,}1\,F_0$. La relación del momento de inercia al área de la sección transversal es tomada numéricamente igual a $\frac{J_0}{F_0} = \left(\frac{l_2}{50}\right)^2$, de donde $E_0 = \frac{J_0}{3{,}6869}$. La cadena fue fijada al borde superior de la viga. La excentricidad de fijación de la cadena es igual a 1 m. La ecuación del eje de la viga, en el primer tramo (el origen de las coordenadas está en el punto *O'*, el eje *z* está dirigido hacia la derecha y el *y*, hacia abajo), tiene la forma:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + b_1\left(\frac{z}{2l_1}\right)^2 + c_1\left(\frac{z}{2l_1}\right)^4}}, \qquad (12.25)$$

en el segundo tramo:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{b_2}{l_2^2}\left(z - \frac{l_2}{2}\right)^2 + \frac{c_2}{l_2^4}\left(z - \frac{l_2}{2}\right)^4}}, \qquad (12.26)$$

(el origen de las coordenadas está en el punto *6*, el eje *y* está dirigido hacia abajo y el *z*, hacia la derecha). El eje del tercer tramo es simétrico al eje del primero. En el caso general, para el I^{mo} tramo intermedio,

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{b_i}{l_i^2}\left(z - \frac{l_i}{2}\right)^2 + \frac{c_i}{l_i^4}\left(z - \frac{l_i}{2}\right)^4}},$$

(el origen de las coordenadas está en el extremo izquierdo del tramo, en el punto superior de la sección).

El momento de inercia de la sección transversal en los tramos primero y tercero varía por la ecuación [2])

$$J(z) = \frac{1}{1 + b_1\left(\frac{z}{2l_1}\right)^2 + c_1\left(\frac{z}{2l_1}\right)^4}; \qquad (12.27)$$

[1]) El ejemplo 12.4 fue elaborado por el asistente N. M. Parchevski, con la participación y redacción del autor.

[2]) Prof. V. A. Kiseliov. Cálculo de vigas continuas de sección gradualmente variable. Tesis de los informes a la XXIV conferencia científicoinvestigadora de MADI (Sección puentes, construcción de obras y mecánica de construcción). M. 1966, pág. 41.

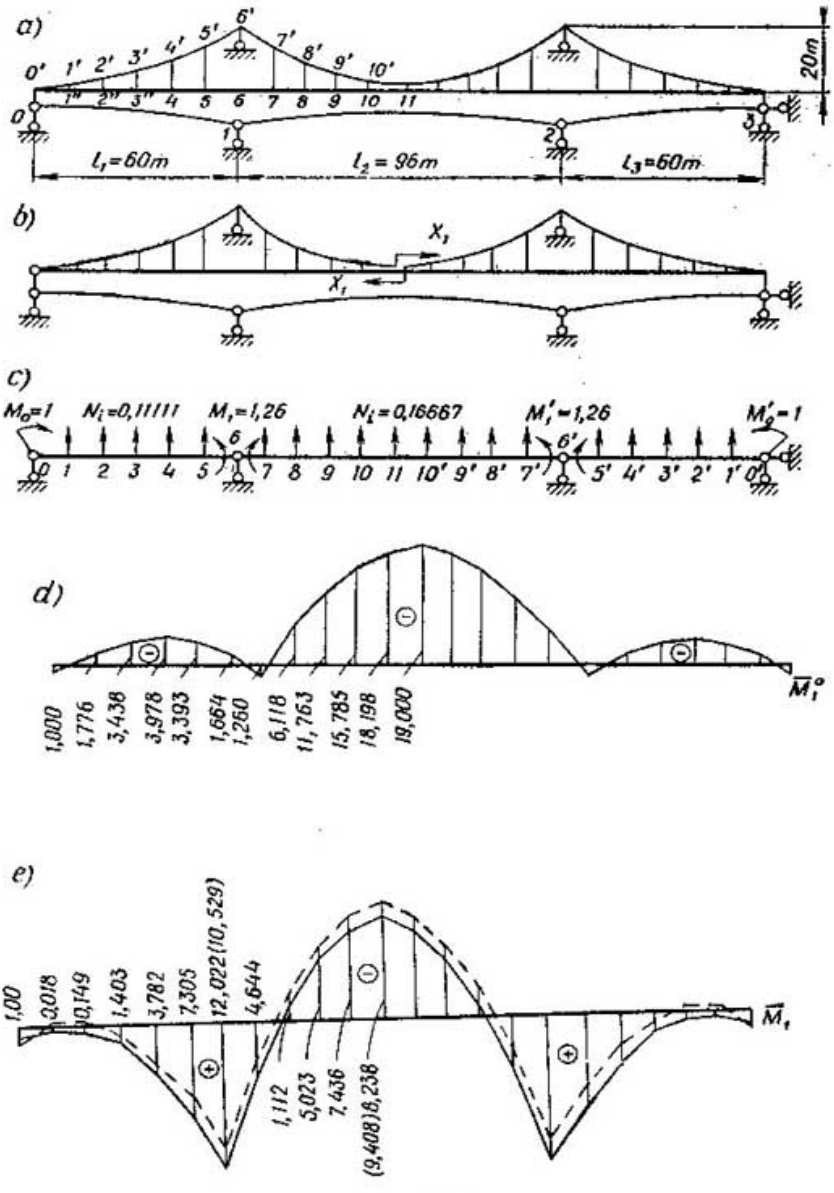

a)
0' 1' 2' 3' 4' 5' 6' 7' 8' 9' 10'
1'' 2'' 3'' 4 5 6 7 8 9 10 11
0 1 2 3
20m
l_1=60m
l_2=96m
l_3=60m
b)
X_1
X_1
c)
M_0=1
N_1=0,11111
M_1=1,26
N_2=0,16667
M_1'=1,26
M_2'=1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 10' 9' 8' 7' 6' 5' 4' 3' 2' 1' 0
d)
$\overline{M}_1^0$
1,000 1,776 3,438 3,978 3,393 1,664 1,260 6,118 11,763 15,785 18,198 19,000
e)
$\overline{M}_1$
1,00 2,018 0,149 1,403 3,782 7,305 12,022 (10,529) 4,644
1,112 5,023 7,436 (9,408) 8,238

Fig. 12.11

en el segundo tramo, por:

$$J(z) = \frac{J_0}{1 + \frac{b_2}{l_2^2}\left(z - \frac{l_2}{2}\right)^2 + \frac{c_2}{l_2^4}\left(z - \frac{l_2}{2}\right)^4} \qquad (12.28)$$

(el origen de las coordenadas está en el extremo izquierdo del segundo tramo).

Los coeficientes b_i y c_i se determinan por las fórmulas

$$b_i = \frac{64m_i - 4n_i - 60}{3}; \quad c_i = \frac{64n_i - 256m_i + 192}{3}, \qquad (12.29)$$

donde $n_i = \frac{J_0}{J_n} = \frac{1}{2}$; $m_i = \frac{J_0}{J_m} = \frac{15}{16}$, $i = 1, 2$.

Aquí, J_0 es el momento de inercia de la sección en el apoyo O y en el centro del segundo tramo;

J_n, el momento de inercia de la sección en los apoyos *1* y *2*;

J_m, el momento de inercia de las secciones en el medio de los tramos primero y tercero y en las cuartas del segundo tramo.

Por (12.29), para $i = 1$ e $i = 2$, obtenemos que $b_1 = b_2 = -\frac{2}{3}$; $c_1 = c_2 = -\frac{16}{3}$. Para estos valores, en la tabla 12.6 se dan los valores de los momentos de inercia hallados por las fórmulas (12.27) y (12.28).

Tabla 12.6

Nº de la sección	Primer tramo							Segundo tramo				
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
J_z/J_0	1,000	1,005	1,019	1,067	1,163	1,382	2,000	1,266	1,113	1,036	1,007	1,000

Los pendolones están fijados a la cara superior de la viga. Las articulaciones que unen los pendolones a los eslabones de la cadena, en el segundo tramo están situadas sobre la parábola $y = 5\left(\frac{z}{24}\right)^2$ (el origen de las coordenadas se halla en el punto *11*; el eje y está dirigido hacia arriba).

En el primer tramo, los nudos de la cadena se hallan situados en la parábola cuadrangular, cuyo eje vertical pasa por $O - O'$; en el tercer tramo, son simétricos a los del primero.

Resolución

1. Elección del sistema básico. En vista de la simetría del sistema dado, el básico se elige también simétrico. En el vínculo superfluo, se toma como incógnita el empuje horizontal de la ca-

dena, designado por X_1. El sistema básico está representado en la fig. 12.11*b*. Es de doble hiperestaticidad. La ecuación de la línea de influencia de la incógnita adoptada tiene la forma (12.15).

2. Construcción de la línea de influencia de los momentos de apoyo en el sistema básico. Dado que el sistema básico es de doble hiperestaticidad, entonces, para calcularlo, elegimos nuevamente un sistema básico, en el caso dado, isostático. Ya que este sistema básico tiene un eje de simetría, utilizamos el procedimiento de incógnitas agrupadas (por parejas) (véase la pág. 207). En este caso, el grupo X_2 es simétrico y el X_3, antisimétrico. Los estados unitarios propios se muestran en las figs. 12.12*b* y 12.13*a*. Por cuanto los desplazamientos $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$, las ecuaciones de las líneas de influencia de las fuerzas generalizadas X_2 y X_3 toman la forma:

$$X_2 = -\frac{\delta_{p2}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\delta_{p3}}{\delta_{33}}. \tag{12.30}$$

Para construir estas líneas de influencia empleamos el método grafoanalítico. Con este objeto, para determinar los pesos elásticos, construimos los diagramas de $\overline{M}_2$ y $\overline{M}_3$ (figs. 12.12*b* y 12.13*a*) y cargamos las vigas ficticias con carga ficticia, cuya intensidad es $\dot{q}(z) = -\frac{\overline{M}(z)}{EJ(z)}$. Por cuanto la viga es de sección variable, los diagramas de intensidades de las cargas ficticias $\dot{q}_2$ y $\dot{q}_3$ tienen configuración curvilínea; por eso, para facilitar el cálculo, dividimos el eje de la viga en varias partes, dentro de los límites de las cuales estos diagramas son considerados lineales (figs. 12.12*c* y 12.13*b*). Como resultado, los diagramas de $\dot{q}_2$ y $\dot{q}_3$ adquirieron una configuración poligonal y, en tal caso, los pesos elásticos situados en los límites de cada parte pueden ser calculados por la fórmula [1])

$$W_n = \frac{d_n}{6}\left(\dot{q}_{n-1}^{\text{der}} + 2\dot{q}_n^{\text{izq}}\right) + \frac{d_{n+1}}{6}\left(2\dot{q}_n^{\text{der}} + \dot{q}_{n+1}^{\text{izq}}\right), \tag{12.31}$$

donde d_n y d_{n+1} son las longitudes de las partes;

$\dot{q}_n^{\text{izq}}$, la intensidad de la carga ficticia en la sección, a una distancia infinitesimal, a la izquierda del punto n;

$\dot{q}_n^{\text{der}}$, ídem, a la derecha del punto n.

En todos los puntos del ejemplo dado $\dot{q}_n^{\text{izq}} = \dot{q}_n^{\text{der}}$.

Las vigas ficticias con pesos elásticos se muestran en las figs. 12.12*d* y 1213*c*. Los pesos elásticos, indispensables para la obtención de los desplazamientos δ_{p2}, fueron calculados en las secciones *1 — 11*; los pesos elásticos, indispensables para obtener los desplazamientos δ_{p3}, en las secciones *1 — 5* serán iguales a

---

[1]) Prof. V. A. Kiseliov. La línea elástica en el caso de flexión transversal de las vigas. Manual de estudio. "Escuela superior", 1966.

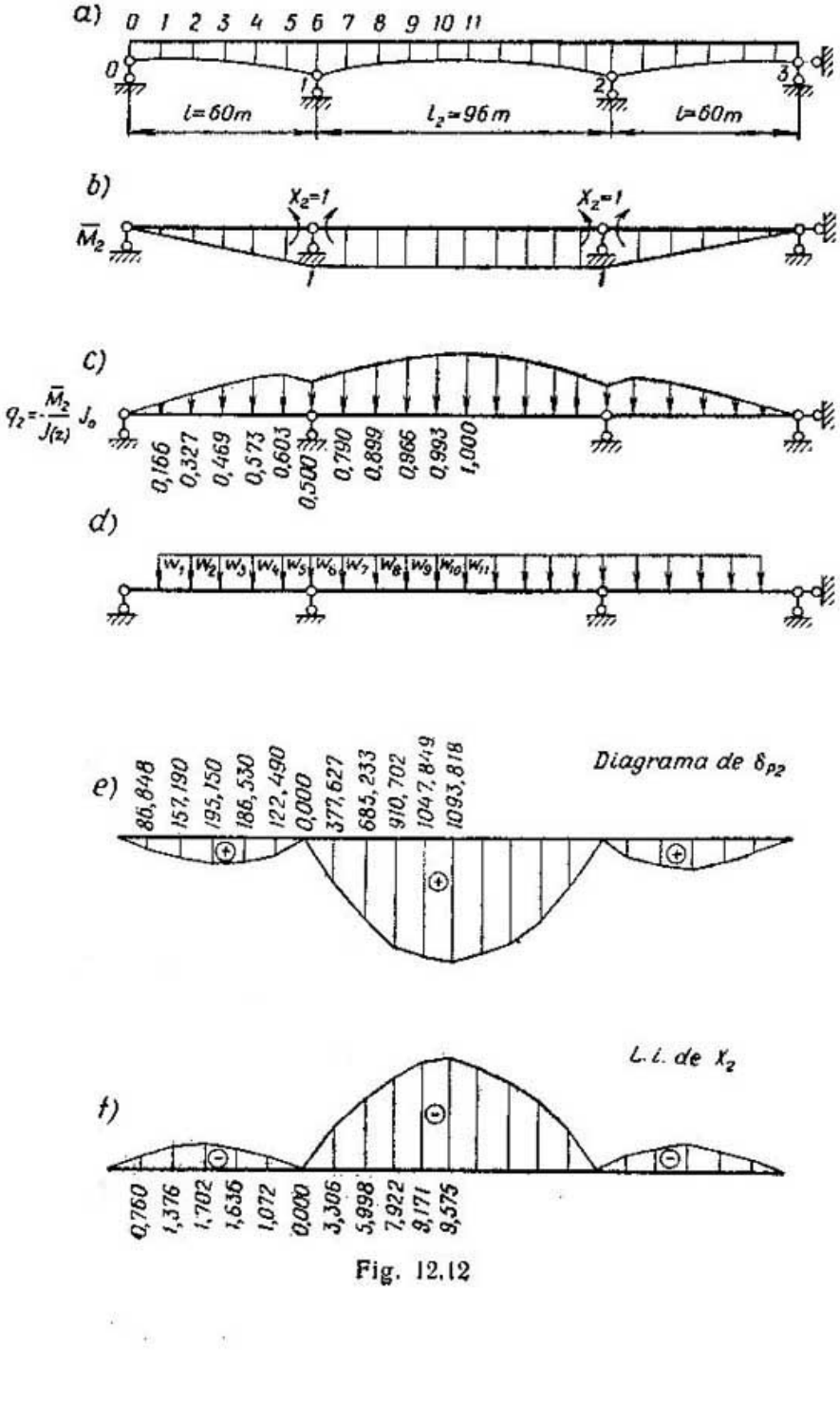

a)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
0
1
2
3
l=60m
l₂=96m
l=60m
b)
X₂=1
X₂=1
M̄₂
c)
q₂=M̄₂/J(z) J₀
0,166
0,327
0,469
0,573
0,603
0,500
0,790
0,899
0,966
0,993
1,000
d)
w₁ w₂ w₃ w₄ w₅ w₆ w₇ w₈ w₉ w₁₀ w₁₁
e)
Diagrama de δp2
86,848
157,190
195,150
186,530
122,490
0,000
377,627
685,233
910,702
1047,849
1093,818
f)
L. i. de X₂
0,760
1,376
1,702
1,636
1,072
0,000
3,306
5,998
7,922
8,171
9,575

Fig. 12.12

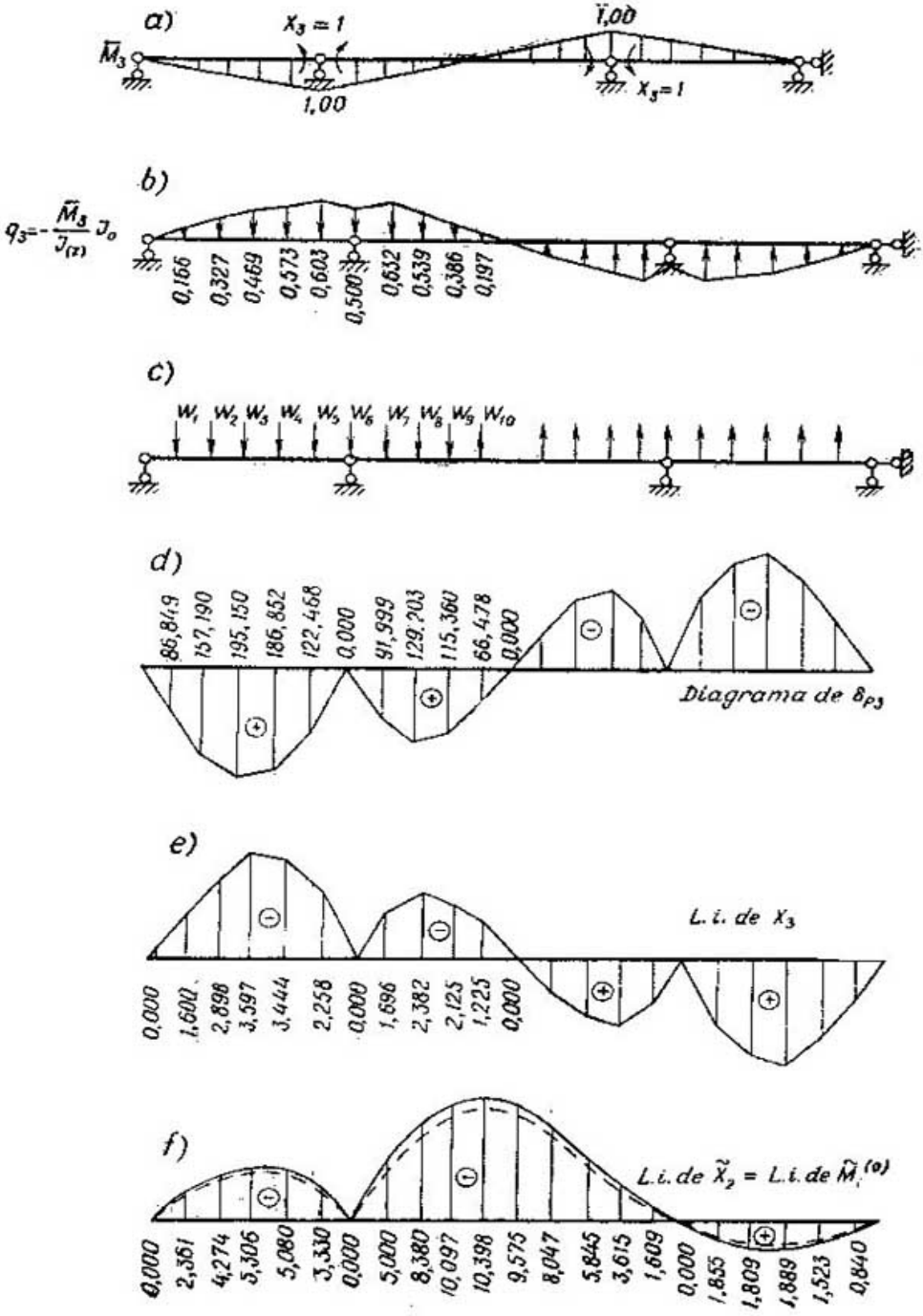

a)
$X_3 = 1$
$\bar{M}_3$
1,00
1,00
$X_3 = 1$
b)
$q_3 = -\frac{\bar{M}_3}{J_{(x)}} J_o$
0,166
0,327
0,469
0,573
0,603
0,500
0,632
0,539
0,386
0,197
c)
W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 W_6 W_7 W_8 W_9 W_{10}
d)
86,849
157,190
195,150
186,852
122,468
0,000
91,999
129,203
115,360
66,478
0,000
Diagrama de δ_{P3}
e)
L.i. de X_3
0,000
1,600
2,898
3,597
3,444
2,258
0,000
1,596
2,382
2,125
1,225
0,000
f)
L.i. de $\tilde{X}_2$ = L.i. de $\tilde{M}_i^{(0)}$
0,000
2,361
4,274
5,306
5,080
3,330
0,000
5,000
8,380
10,097
10,398
9,575
8,047
5,845
3,615
1,609
0,000
1,855
1,809
1,889
1,523
0,840

Fig. 12.13

los anteriores en las mismas secciones y en las secciones *6 — 10* estos pesos deben ser calculados. La determinación de los pesos elásticos se efectuó solamente hasta el medio de la viga, dado que ésta es simétrica. Los valores de los pesos elásticos se dan en la tabla 12.7.

Tabla 12.7

Nº de la sección	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$W_n^{(2)}$	1,651	3,238	4,626	5,609	5,808	5,536	7,294	8,556	9,200	9,488	9,569
$W_n^{(3)}$	1,651	3,238	4,626	5,609	5,808	5,283	5,708	5,318	3,650	1,888	0

Los diagramas de los momentos en las vigas ficticias se construyeron partiendo de los pesos elásticos. Dichos diagramas, que representan los diagramas de los desplazamientos δ_{p2} y δ_{p3}, se muestran en las figs. 12.12*e* y 12.13*d*.

La determinación de los coeficientes δ_{22} y δ_{33} se efectúa por la fórmula

$$\delta_{ii} = \int \frac{\bar{M}_i^2}{EJ(z)}\,dz = -\int -\frac{\bar{M}_i(z)\,dz}{EJ(z)}\,\bar{M}_i(z) = -\sum W_i \bar{M}_i. \quad (12.32)$$

En este caso se obtiene:

$$\delta_{22} = -\sum W_i \bar{M}_2 = 114{,}298; \quad \delta_{33} = -\sum W_i \bar{M}_3 = 54{,}248.$$

Disponiendo de los diagramas de δ_{P2} y δ_{P3} y de los valores de δ_{22} y δ_{33}, construimos las l. i. de X_2 y X_3 por las ecuaciones (12.30). Las ecuaciones de las líneas de influencia de los momentos de apoyo en los apoyos *1* y *2*, designados por $\tilde{X}_2$ y $\tilde{X}_3$, respectivamente, toman la forma:

$$\left.\begin{aligned} \text{l. i. de } \tilde{X}_2 &= \text{l. i. de } X_2 + \text{l. i. de } X_3; \\ \text{l. i. de } \tilde{X}_3 &= \text{l. i. de } X_2 - \text{l. i. de } X_3. \end{aligned}\right\} \quad (12.33)$$

Las líneas de influencia de X_2 y X_3 se representan en las figs. 12.12*f* y 12.13*e*. La del momento de apoyo $\tilde{X}_2 = \bar{M}_1^{(0)}$, en la fig. 12.13*f*. En punteado se muestra la misma línea de influencia para la viga con el momento de inercia constante.

3. Construcción de la línea de influencia de X_1 por la ecuación (12.15). El desplazamiento $\delta_{11}^{(2)}$ se determina así como en el ejemplo 12.3,o sea, por la expresión (12.16). El proceso de este cálculo se describe en las pags. 215—218. Los diagramas, cuya multiplicación se exige por la fórmula (12.19), se muestran en las figs. 12.11*e* y 12.11*d*. En la fig. 12.11*e* se presenta, en punteado, el diagrama de los momentos $\bar{M}_1$ para la viga continua con el mo-

mento de inercia constante. En el caso dado, para las relaciones adoptadas de las áreas y para sus relaciones con los momentos de inercia, obtenemos que $\delta_{11}^{(2)} = \frac{10829}{EJ_0}$.

Los desplazamientos $\delta_{p1}^{(2)}$ representan las ordenadas del eje curvo de la viga continua de sección variable, debidos a la acción

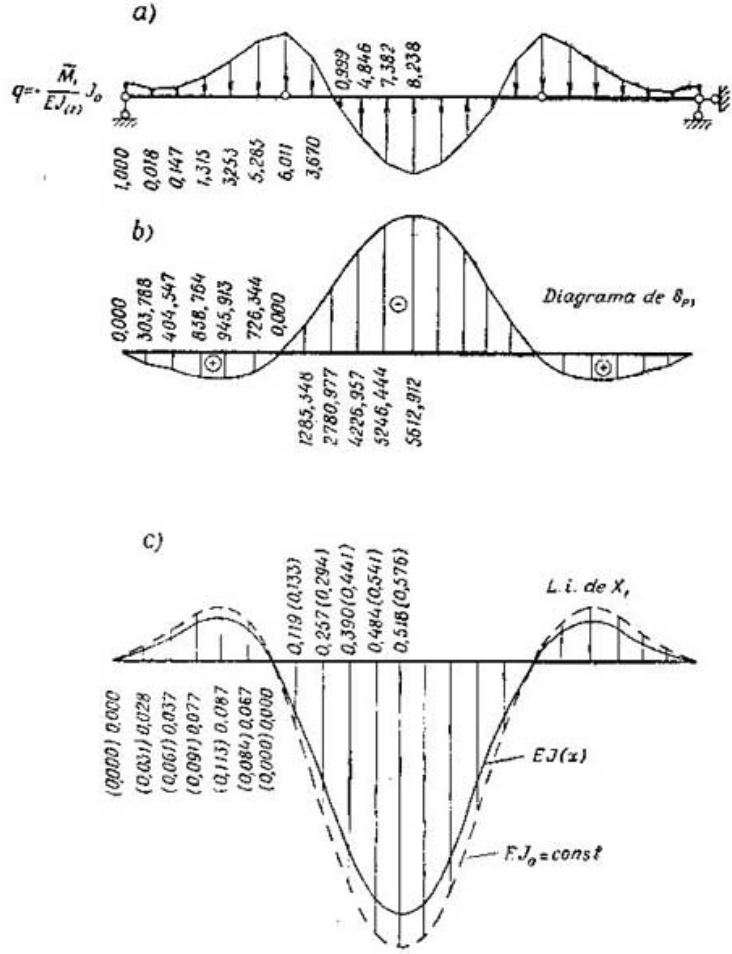


Fig. 12.14

de las fuerzas $X_1 = 1$ sobre el sistema básico hiperestático (fig. 12.11*b*). La construcción del diagrama $\delta_{p1}^{(2)}$ es análoga a la de los diagramas de δ_{p2} y δ_{p3}, descripta más arriba. La viga ficticia (fig. 12.14*a*) se somete a la carga ficticia de intensidad $\bar{q}_1$, debida a la cual fue construido el diagrama de los momentos

ficticios en la fig. 12.14*b*, el cual es el diagrama de las flechas $\delta_{p1}^{(2)}$.

La línea de influencia de X_1 se muestra en la fig. 12.14*c*. En punteado se muestra la misma línea de influencia en el caso de una viga con el momento de inercia constante J_0.

4. Construcción de las líneas de influencia de los momentos flectores en el sistema dado. La ecuación de la línea de influencia de los momentos flectores en cualquier sección de la viga, tiene,

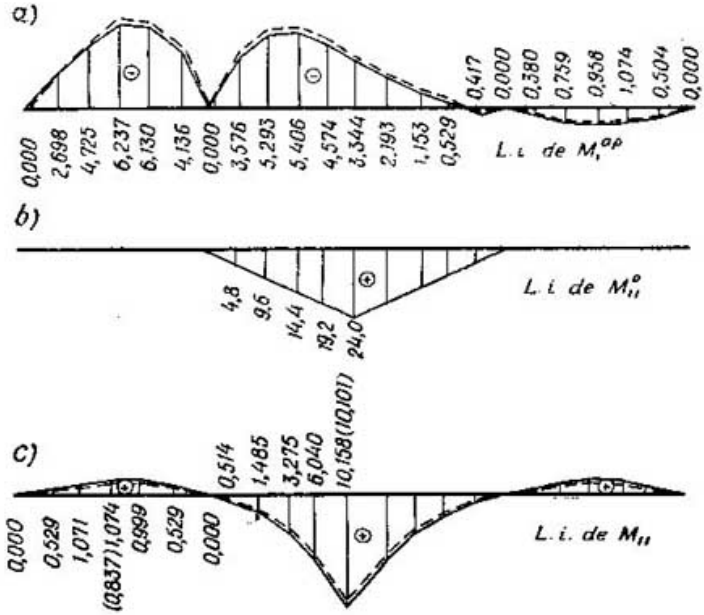


Fig. 12.15

como antes, la forma (12.21), y aplicada a las secciones que nos interesan, será:

$$\text{l. i. de } M_I^{\text{apoyo}} = \text{l. i. de } M_6 = \text{l. i. de } \tilde{M}_I^{(0)} + (\text{l. i. de } X_1) \cdot 12{,}022;$$

$$\text{l. i. de } M_{II} = \text{l. i. de } \tilde{M}_{II}^{(0)} + (\text{l. i. de } X_1) \cdot (-8{,}238).$$

Los valores de las ordenadas 12,022, —8,238 fueron tomados del diagrama de $\bar{M}_1$ (fig. 12.11*e*). En este caso, no es difícil convencerse de que

$$\text{l. i. de } \tilde{M}_{II}^{(0)} = \frac{1}{2}(\text{l. i. de } \tilde{X}_2 + \text{l. i. de } \tilde{X}_3) + \text{l. i. de } M_{II}^{(0)},$$

donde l. i. de M_{II}^0 es la línea de influencia del momento en el sistema básico isostático, para la sección *II* (véase la fig. 12.15*b*).

Las líneas de influencia del momento de apoyo en el apoyo *I* y en la sección *II*, por el medio del segundo tramo, se muestran en las figs. 12.15*a* y 12.15*b*; las líneas de influencia de M_I^{sp} y M_{II} en la viga con el momento de inercia constante J_0, se muestran en punteado.

CAPITULO 13 * CALCULO DE ARCOS HIPERESTATICOS

Ejemplo 13.1. Se da el esquema de un arco (fig. 13.1) y una carga fija sobre éste. El eje del arco está trazado por la curva de la elipse. A lo largo de la mitad derecha del arco la carga está uniformemente repartida y actúa en forma vertical.

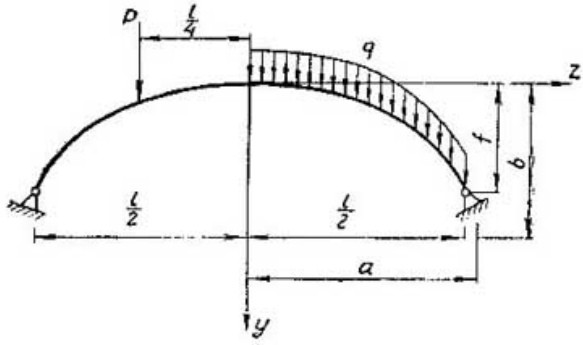


Fig. 13.1

Se exige escribir las expresiones de todos los coeficientes de la ecuación canónica en forma de integral, tomando en consideración sólo los momentos flectores.

Resolución

La ecuación del eje del arco tiene la forma

$$y = \frac{a}{k}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^2}\right]. \qquad (13.1)$$

Aquí, a es la longitud del semieje mayor;
b, la longitud del semieje menor;
$k = \frac{a}{b}$, la relación entre las longitudes de los semiejes.

Nos damos la magnitud de k. Calculamos la longitud a por los datos f y l siendo $\frac{l}{2f} \geqslant k$:

$$a = \frac{kf}{2} + \frac{l^2}{8kf}. \tag{13.2}$$

Eliminando un vínculo horizontal en uno de los apoyos, obtenemos el sistema básico (fig. 13.2).

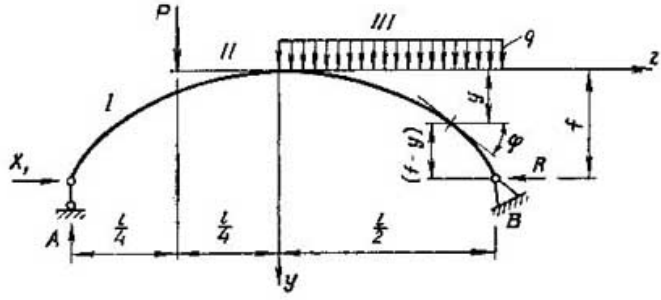


Fig. 13.2

La ecuación canónica tiene el aspecto

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \tag{13.3}$$

El coeficiente δ_{11} se calcula por medio de la integral

$$\delta_{11} = 2 \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1^2 \, ds}{EJ}, \tag{13.4}$$

donde

$$\bar{M}_1 = -1 \, (f - y) = y - f; \tag{13.5}$$

$$ds = \frac{dz}{\cos \varphi} = dz \sqrt{1 + (y')^2}; \tag{13.6}$$

$$J = f(z). \tag{13.7}$$

Ahora, la expresión del coeficiente δ_{11} por medio de las magnitudes dadas en forma de integral, tiene la forma:

$$\delta_{11} = \frac{2}{E} \int_0^{l/2} \frac{(y - f)^2 \sqrt{1 + (y')^2} \, dz}{f(z)}. \tag{13.8}$$

En la integral (13.8) es indispensable colocar la y de (13.1) y la

$$y' = \frac{z}{ak \sqrt{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^2}}. \tag{13.9}$$

Hallemos el coeficiente Δ_{1P}. Determinemos las reacciones de apoyo debidas a la carga en el sistema básico (fig. 13.2):

$$A = \frac{3}{4}P + \frac{ql}{8}; \tag{13.10}$$

$$B = \frac{1}{4}P + \frac{3ql}{8}. \tag{13.11}$$

Hallemos las expresiones para los momentos flectores en los tres tramos:

$$\text{para } -\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant -\frac{l}{4};\ M_P^{0\,(I)} = A\left(\frac{l}{2} + z\right); \tag{13.12}$$

$$\text{para } -\frac{l}{4} \leqslant z \leqslant 0;\ M_P^{0\,(II)} = A\left(\frac{l}{2} + z\right) - P\left(\frac{l}{4} + z\right); \tag{13.13}$$

$$\text{para } 0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2};\ M_P^{0\,(III)} = A\left(\frac{l}{2} + z\right) - P\left(\frac{l}{4} + z\right) - \frac{qz^2}{2} = B\left(\frac{l}{2} - z\right) - \frac{qz^2}{2}. \tag{13.14}$$

El coeficiente Δ_{1P}, en la forma general, tiene la forma:

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_P^0\, ds}{EI}. \tag{13.15}$$

De tal manera, colocando las expresiones (13.5)—(13.7) y (13.12)—(13.14) en (13.15), obtenemos:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E}\int_{-l/2}^{-l/4} \frac{1}{f(z)}(y - f)\, A\left(\frac{l}{2} + z\right)\sqrt{1 + (y')^2}\, dz + \frac{1}{E}\int_{-l/4}^{0} \frac{1}{f(z)}(y - f)\left[A\left(\frac{l}{2} + z\right) - P\left(\frac{l}{4} + z\right)\right]\sqrt{1 + (y')^2}\, dz + \frac{1}{E}\int_{0}^{l/2} \frac{1}{f(z)}(y - f)\left[B\left(\frac{l}{2} - z\right) - \frac{qz^2}{2}\right]\sqrt{1 + (y')^2}\, dz. \tag{13.16}$$

En las integrales (13.16) es indispensable colocar la y de (13.1) y la y' de (13.9). Las integrales (13.8) y (13.16), en el caso general, pueden ser calculadas por medio de los métodos numéricos.

Ejemplo 13.2. Se da el esquema de un arco (fig. 13.3). El eje del arco está trazado por la curva de la circunferencia. La sección transversal en cada uno de los cuatro tramos es constante. Se pide construir, por medio del centro elástico, el diagrama de los momentos flectores en el sistema dado.

Indicaciones. Las fuerzas longitudinales y transversales, durante la determinación de los coeficientes de las ecuaciones canónicas, son despreciadas.

Resolución

El centro elástico lo consideramos como centro de gravedad del sistema convencional (fig. 13.4), que tiene la configuración del eje del arco y la masa lineal, proporcional a la magnitud inversa de la rigidez, o sea, el centro de gravedad de los pesos elementales, convencionales, es $dv = \frac{ds}{EJ}$.

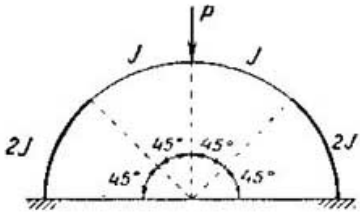


Fig. 13.3

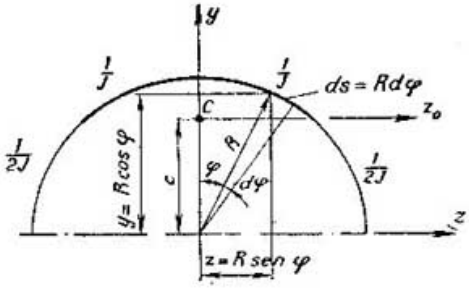


Fig. 13.4

Hallemos el momento estático con relación al eje z del sistema convencional. Integramos solamente por la mitad derecha del sistema y, usando la simetría, duplicamos los resultados:

$$S_z = 2\int_0^{\pi/4} y\frac{ds}{J} + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} y\frac{ds}{2J} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} R\cos\varphi\frac{R\,d\varphi}{J} + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} R\cos\varphi\frac{R\,d\varphi}{2J} =$$

$$= \frac{2R^2}{J}\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{R^2}{J}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi = 1{,}7071\frac{R^2}{J}.$$

El peso convencional del sistema es:

$$F = 2\int_0^{\pi/4}\frac{ds}{J} + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{ds}{2J} = \frac{2R}{J}\int_0^{\pi/4} d\varphi + \frac{R}{J}\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi = 2{,}3562\frac{R}{J}.$$

Hallemos la posición del centro elástico:

$$c = \frac{\int y\,dv}{\int dv} = \frac{S_z}{F} = \frac{1{,}7071\frac{R^2}{J}}{2{,}3562\frac{R}{J}} = 0{,}72451R. \qquad (13.17)$$

Además de la posición del centro elástico, es indispensable conocer las direcciones de los ejes centrales, principales, del sis-

tema convencional (fig. 13.4). En el caso general, esto se puede hacer por medio de las fórmulas de la teoría de los momentos de inercia y, en el ejemplo dado, debido a la simetría, uno de los ejes principales coincide con el eje de simetría (y) y el otro (z_0) es perpendicular a este último.

Obtenemos el sistema básico (fig. 13.5) seccionando el arco por el eje de simetría. Cada lado del corte lo unimos con el centro elástico por medio de voladizos absolutamente rígidos. Aplicamos las incógnitas en el centro elástico, siendo que X_1 y X_2 deberán coincidir por la dirección con los ejes principales del sistema convencional (fig. 13.4). El sistema de ecuaciones canónicas tiene la forma:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} &= 0;\\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0;\\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

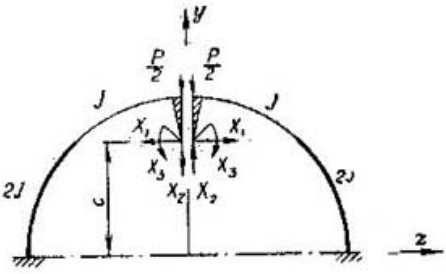


Fig 13.5

Calculamos los coeficientes de las ecuaciones canónicas:

$$E\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1^2\, ds}{kJ} = 2\int_0^{\pi/4} \frac{(c-y)^2\, ds}{J} +$$

$$+ 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(c-y)^2\, ds}{2J} = \frac{2}{J}\int_0^{\pi/4} (c - R,\cos\varphi)^2\, R\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{J}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (c - R\cos\varphi)^2\, R\, d\varphi = 0{,}19126\,\frac{R^3}{J};$$

$$E\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_P^0\, ds}{kJ} = 2\int_0^{\pi/4} \frac{(c-y)\left(-\frac{P}{2}z\right) ds}{J} +$$

$$+ 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(c-y)\left(-\frac{P}{2}z\right) ds}{2J} = -\frac{P}{J}\int_0^{\pi/4} (c - R\cos\varphi)\, R\,\mathrm{sen}\,\varphi R\, d\varphi -$$

$$- \frac{P}{2J}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (c - R\cos\varphi)\, R\,\mathrm{sen}\,\varphi R\, d\varphi = -\,0{,}09335\,\frac{PR^3}{J}.$$

El coeficiente Δ_{2P} es igual a cero, dado que X_2 es una incógnita antisimétrica y la carga, simétrica. El coeficiente δ_{22} no es igual a cero, por consiguiente, $X_2 = 0$. El cálculo de δ_{22} no es indispen-

sable. Nos queda calcular δ_{33} y Δ_{3P}:

$$E\delta_{33} = \sum \int \frac{\bar{M}_3^2\, ds}{kJ} = 2\int_0^{\pi/4} \frac{R\, d\varphi}{J} +$$

$$+ 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{R\, d\varphi}{2J} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi R}{J} = 2{,}3562\,\frac{R}{J};$$

$$E\Delta_{3P} = \sum \int \frac{\bar{M}_3 M_P^0\, ds}{kJ} = 2\int_0^{\pi/4} \frac{\left(-\frac{P}{2}z\right) R\, d\varphi}{J} + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\left(-\frac{P}{2}z\right) R\, d\varphi}{2J} =$$

$$= -\frac{PR}{J}\int_0^{\pi/4} R\,\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi - \frac{PR}{2J}\int_{\pi/4}^{\pi/2} R\,\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = -\,0{,}64644\,\frac{PR^2}{J}.$$

Calculamos las incógnitas:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{0{,}09335\,\frac{PR^3}{J}}{0{,}19126\,\frac{R^3}{J}} = 0{,}4881\ P; \qquad (13.18)$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3P}}{\delta_{33}} = \frac{0{,}64644\,\frac{PR^2}{J}}{2{,}3562\,\frac{R}{J}} = 0{,}2744\ PR. \qquad (13.19)$$

Construimos el diagrama de M por la fórmula

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + M_P^0, \qquad (13.20)$$

donde

$$\bar{M}_1 = c - y = c - R\cos\varphi = 0{,}7245R - R\cos\varphi;$$

$$\bar{M}_2 X_2 = 0; \quad \text{dado que} \quad X_2 = 0;$$

$$\bar{M}_3 = 1;$$

$$M_P^0 = -\frac{P}{2}z = -\frac{P}{2}R\,\operatorname{sen}\varphi, \quad \text{para} \quad 0 \leqslant z \leqslant R.$$

El eje del semiarco lo dividimos en ocho partes iguales. Hacemos el cálculo solamente para la mitad derecha del arco y sobre la izquierda construimos el diagrama por simetría.

El diagrama buscado de los momentos flectores se construyó en la fig. 13.6.

Ejemplo 13.3. Se da el esquema de un arco simétrico, sin articulaciones, con sus dimensiones (fig. 13.7). Se da la sección transversal, rectangular, y sus dimensiones en el arranque y la llave. La altura de la sección es variable. La ecuación del eje se da por la catenoide

$$y = \frac{f}{m-1}(chkz - 1). \qquad (13.21)$$

La ley de variación de los momentos de inercia se da con la fórmula

$$J = J_0 + (J_p - J_0)\left(\frac{z}{l_1}\right)^2. \qquad (13.22)$$

En la sección con abscisa z_k se exige construir las líneas de influencia de M, N y Q y las líneas de influencia de los momentos nucleares.

Observación. El método de resolución expuesto más abajo conviene para cualquier forma del eje de un arco y para cualquier ley de variación de los momentos de inercia.

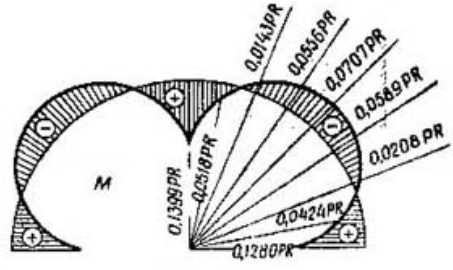


Fig. 13.6

Resolución

El coeficiente k para la ecuación del eje lo hallamos por una de las fórmulas:

$$k = \frac{1}{l_1}\ln\left(m \pm \sqrt{m^2 - 1}\right) \qquad (13.23)$$

$$k = \frac{1}{l_1}\operatorname{Arch} m. \qquad (13.24)$$

En la fórmula (13.23) se puede tomar tanto el signo más como el menos. A consecuencia de la simetría del cono hiperbólico, ambas variantes, a fin de cuentas, llevan a un sólo resultado.

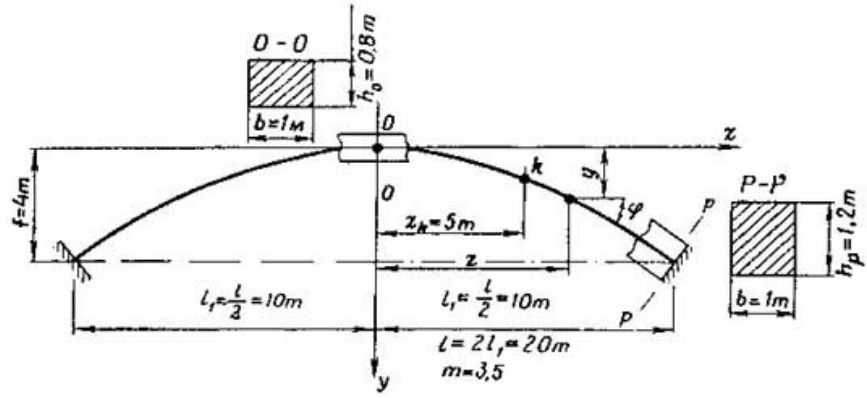


Fig. 13.7

Para $m = 3,5$ por las fórmulas (13.23) o (13.24) hallamos que $k = 0,19248$. Por la fórmula (13.21) calculamos ordenadas aisladas de los puntos del eje. Dividimos el semiarco en 10 partes. Las alturas de las secciones transversales las determinamos por la

fórmula

$$h = \sqrt[3]{\frac{12J}{b}}.$$

Los resultados se dan en la tabla 13.1.

Tabla 11.3

z, m	y, m	J, m^4	h, m
0,00	0,00000	0,042667	0,80000
0,50		0,042920	0,80158
1,00	0,02973		
1,50		0,044947	0,81401
2,00	0,12002		
2,50		0,049000	0,83773
3,00	0,27424		
3,50		0,055080	0,87108
4,00	0,49811		
4,50		0,063186	0,91187
5,00	0,79995		
5,50		0,073319	0,95826
6,00	1,19088		
6,50		0,085479	1,00858
7,00	1,68560		
7,50		0,099665	1,06147
8,00	2,30250		
8,50		0,115878	1,11616
9,00	3,06448		
9,50		0,134117	1,17188
10,00	4,00000	0,144000	1,20000

Calculamos la posición del centro elástico. El sistema básico está representado en la fig. 13.8.

La fórmula general para el cálculo del centro elástico tiene la forma:

$$c = \frac{\int\limits_S y \frac{ds}{J}}{\int\limits_S \frac{ds}{J}}. \qquad (13.25)$$

Aproximadamente, se la puede sustituir por la siguiente:

$$c = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} y_i w_i^{(3)}}{\sum\limits_{i=0}^{n} w_i^{(3)}}. \qquad (13.26)$$

Aquí, y_i es la ordenada del punto del eje en el límite de cada parte;

$w_i^{(3)}$, el peso elástico para el punto en el límite de cada parte desde $\bar{X}_3 = 1$; y

n, el número de partes.

Examinamos únicamente el semiarco derecho. Sustituimos el eje curvo por la quebrada con n partes (fig. 13.9). Los puntos límites de las partes coinciden con el eje. El número de cada parte

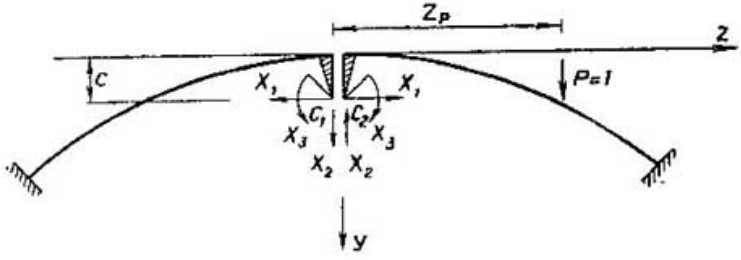


Fig. 13.8

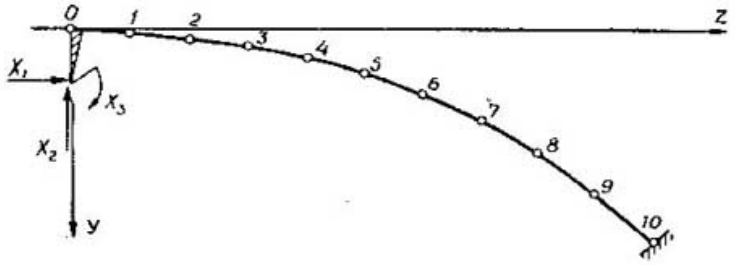


Fig. 13.9

coincide con el número del punto límite derecho. Las proyecciones de las longitudes de cada parte sobre el eje z se toman iguales unas a otras.

La fórmula general para el cálculo de los pesos elásticos, sin tener en cuenta las fuerzas longitudinales y transversales, tiene la forma:

$$w_i^{(k)} = -\frac{\Delta s_i}{6EJ_i}\left(2M_i^{(k)} + M_{i-1}^{(k)}\right) - \frac{\Delta s_{i+1}}{6EJ_{i+1}}\left(2M_i^{(k)} + M_{i+1}^{(k)}\right). \qquad (13.27)$$

Aquí, E es el módulo de elasticidad;

Δs_i, la longitud de la parte i;

J_i, el momento de inercia de la sección media de la i^{ma} parte;

$M_i^{(k)}$, el momento flector en el punto i, debido a $\bar{X}_k = 1$.

Los momentos flectores debidos a $X_3 = 1$, para cada punto son idénticos e iguales a 1. Por eso, la fórmula (13.27) se simplifica:

$$w_i^{(3)} = -\frac{\Delta s_i}{2EJ_i} - \frac{\Delta s_{i+1}}{2EJ_{i+1}}.$$

Los resultados del cálculo de los pesos elásticos se dan en la tabla 13.2.

Tabla 13.2

i	Δs_i, m	$\frac{\Delta s_i}{J_i}$	$\frac{\Delta s_{i+1}}{J_{i+1}}$	$w_i^{(3)} E$	$y_i w_i^{(3)} E$
0	0,0000	0,000	23,309	—11,654	—0,000
1	1,0004	23,309	22,339	—22,824	—0,679
2	1,0041	22,339	20,649	—21,494	—2,580
3	1,0118	20,649	18,605	—19,627	—5,382
4	1,0247	18,605	16,531	—17,568	—8,751
5	1,0446	16,531	14,644	—15,587	—12,469
6	1,0737	14,644	13,051	—13,847	—16,490
7	1,1156	13,051	11,790	—12,420	—20,935
8	1,1750	11,790	10,849	—11,319	—26,062
9	1,2572	10,849	10,209	—10,529	—32,266
10	1,3694	10,209	0,000	—5,104	—20,416
$E \sum w_i^{(3)} = -161{,}97;\ E \sum y_i w_i^{(3)} = -146{,}03$					

Hallamos la suma:

$$E \sum_{i=0}^{10} w_i^{(3)} = -161{,}97; \qquad E \sum_{i=0}^{10} y_i w_i^{(3)} = -146{,}03.$$

Por fin, obtenemos la posición del centro elástico

$$c = \frac{146{,}03}{161{,}97} = 0{,}90159 \text{ m}.$$

El cálculo, con el empleo del centro elástico, permite reducir el sistema de ecuaciones canónicas general al sistema que sigue:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (13.28)$$

donde

$$\text{l. i. de } \Delta_{1P} = \text{diag. de } \delta_{P1}; \quad \text{l. i. de } \delta_{2P} = \text{diag. de } \delta_{P2};$$
$$\text{l. i. de } \Delta_{3P} = \text{diag. de } \delta_{P3}.$$

Hemos de construir el diagrama de δ_{P1} sobre la base horizontal y considerarlo como diagrama ficticio de los momentos flectores,

en la viga ficticia, debidos a los pesos elásticos $w_i^{(1)}$. Examinamos solamente el semiarco derecho. En el izquierdo, el diagrama se construye por simetria.

Determinamos los momentos en el sistema básico, debidos a $\bar{X}_1 = 1$:

$$\bar{M}_i^{(1)} = y - c - y - 0{,}90159.$$

Prosiguiendo hallamos los pesos elásticos por la fórmula (13.27) (tabla 13.3).

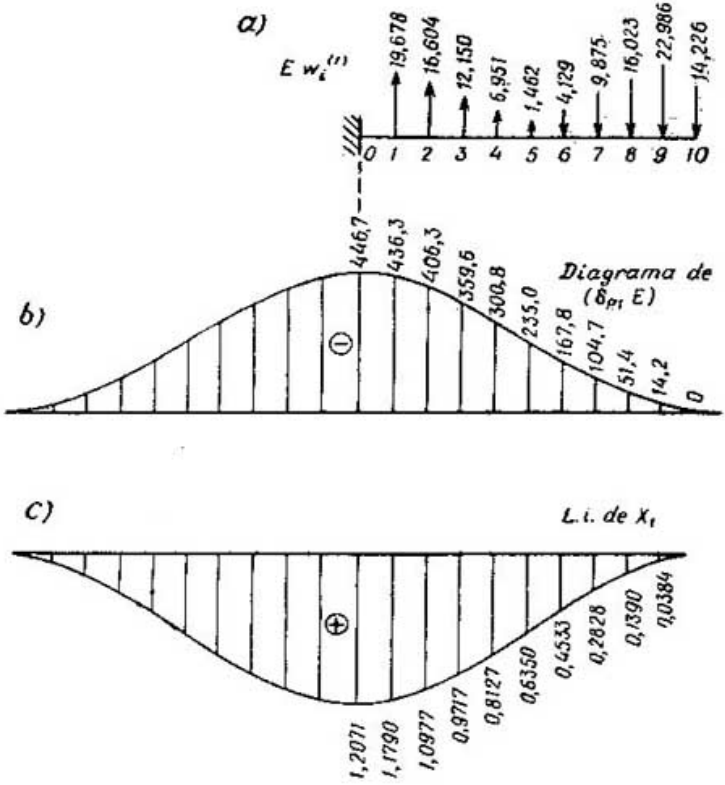


Fig. 13.10

Por medio de los pesos elásticos construimos el diagrama de δ_{Pi} (fig. 13.10*b*), como diagrama de los momentos flectores ficticios en la viga ficticia (fig. 13.10*a*). Los pesos elásticos positivos están dirigidos hacia arriba.

Durante el cálculo de δ_{11} es indispensable considerar la influencia de la fuerza longitudinal. De tal modo,

$$E\delta_{11} = \sum \int \bar{M}_1^2 \frac{ds}{J} + \sum \int \bar{N}_1^2 \frac{ds}{F}. \qquad (13.29)$$

Tabla 13.3

i	$\frac{\Delta s_i}{6J_i}$	$\frac{\Delta s_{i+1}}{6J_{i+1}}$	$\overline{M}_{i-1}^{(1)}$	$\overline{M}_i^{(1)}$	$\overline{M}_{i+1}^{(1)}$	$w_i^{(1)}E$	$\overline{M}_i^{(1)}\, w_i^{(1)}E$
0	0	3,8847	—	—0,90159	—0,87186	10,392	—9,369
1	3,8847	3,7233	—0,90159	—0,87186	—0,78157	19,678	—17,157
2	3,7233	3,4415	—0,87186	—0,78157	—0,62735	16,604	—12,977
3	3,4415	3,1006	—0,78157	—0,62735	—0,40348	12,150	—7,622
4	3,1006	2,7553	—0,62735	—0,40348	—0,10164	6,951	—2,804
5	2,7553	2,4407	—0,40348	—0,10164	0,28929	1,462	—0,148
6	2,4407	2,1752	—0,10164	0,28929	0,78401	—4,129	—1,194
7	2,1752	1,9649	0,28929	0,78401	1,40091	—9,875	—7,742
8	1,9649	1,8082	0,78401	1,40091	2,16289	—16,023	—22,447
9	1,8082	1,7018	1,40091	2,16289	3,09841	—22,986	—49,716
10	1,7018	0	2,16289	3,09841	—	—14,226	—44,078

$$-\sum \overline{M}_i^{(1)} w_i^{(1)} E = 175{,}25$$

Examinemos a $\sum \int M^2 \frac{ds}{J}$ como producto del diagrama de M por sí mismo (fig. 13.11):

$$\sum \int M^2 \frac{ds}{J} = \sum \left(\frac{\omega_i y_i}{J_i} + \frac{\omega_{i+1} y_{i+1}}{J_{i+1}} \right) =$$

$$= \sum M_i \left[\frac{\Delta s_i}{6J_i} (2M_i + M_{i-1}) + \frac{\Delta s_{i+1}}{6J_{i+1}} (2M_i + M_{i+1}) \right] = -\sum M_i w_i E.$$

Así,

$$\sum \int \overline{M}_{(k)}^2 \frac{ds}{J} = -\sum \overline{M}_i^{(k)} w_i^{(k)} E. \qquad (13.30)$$

Para las fuerzas longitudinales, análogamente obtenemos:

$$\sum \int \overline{N}_k^2 \frac{ds}{F} = -\sum \overline{N}_i^{(k)} w_i^{(N)} E, \qquad (13.31)$$

donde

$$w_i^{(N)} = -\left[\frac{\Delta s_i}{6EF_i} (2\overline{N}_i + \overline{N}_{i-1}) + \frac{\Delta s_{i+1}}{6EF_{i+1}} (2\overline{N}_i + \overline{N}_{i+1}) \right]. \qquad (13.32)$$

Los cálculos de $w_i^{(N)}$ se muestran en la tabla 13.4. Hallemos $E\delta_{11}$:

$$\frac{E}{2} \delta_{11} = -\sum_{i=0}^{10} \overline{M}_i^{(1)} w_i^{(1)} - \sum_{i=0}^{10} \overline{N}_i^{(1)} w_i^{(N)} = 175{,}25 + 9{,}80 = 185{,}05;$$

$$E\delta_{11} = 2 \cdot 185{,}05 = 370{,}10.$$

Tabla 13.4

i	z_i, m	h_i, m; $F_i = bh_i$, m^2	$\frac{\Delta s_i}{6F_i}$	$\frac{\Delta S_{i+1}}{6F_{i+1}}$	$shkz_i$	$\operatorname{tg}\varphi_i$	$\overline{N}_{i-1}^{(1)}$	$\overline{N}_i^{(1)} = \cos\varphi_i$	$\overline{N}_{i+1}^{(1)}$	$w_i^{(N)}E$	$\overline{N}_i^{(1)} w_i^{1N} E$
0	0	0,8000	0	0,2080	0	0	—	1,0000	0,9982	−0,623	−0,623
1	1	0,8016	0,2080	0,2056	0,1937	0,0596	1,0000	0,9982	0,9927	−1,237	−1,235
2	2	0,8140	0,2056	0,2013	0,3945	0,1215	0,9982	0,9927	0,9928	−1,211	−1,202
3	3	0,8378	0,2013	0,1961	0,6101	0,1879	0,9927	0,9828	0,9675	−1,170	−1,150
4	4	0,8711	0,1961	0,1909	0,8483	0,2612	0,9828	0,9675	0,9455	−1,122	−1,086
5	5	0,9119	0,1909	0,1867	1,1180	0,3443	0,9675	0,9455	0,9153	−1,070	−1,012
6	6	0,9583	0,1867	0,1844	1,4293	0,4402	0,9455	0,9153	0,8753	−1,017	−0,931
7	7	1,0086	0,1844	0,1845	1,7936	0,5524	0,9153	0,8753	0,8249	−0,967	−0,846
8	8	1,0615	0,1845	0,1877	2,2247	0,6851	0,8753	0,8249	0,7644	−0,919	−0,758
9	9	1,1162	0,1877	0,1947	2,7384	0,8433	0,8249	0,7644	0,6956	−0,875	−0,669
10	10	1,1719	0,1947	0	3,3539	1,0329	0,7644	0,6956	—	−0,420	−0,292

$$-\sum \overline{N}_i^{(1)} w_i^{(1)} E = 9{,}80$$

La línea de influencia de X_1 (fig. 13.10*c*) se construye por la fórmula

$$X_i = -\frac{\delta_{Pi}}{\delta_{ii}}. \tag{13.33}$$

Por $\bar{X}_2 = 1$ hallamos los momentos flectores $\bar{M}_2 = \bar{M}^{(2)} = 1 \cdot z$. Calculamos los pesos elásticos $w_i^{(2)}$ por la fórmula (13.27). Los resultados se dan en la fig. 13.12*a*. El diagrama de $E\delta_{P2}$ (fig. 13.12*b*) se construye como diagrama de los momentos flectores ficticios debidos a $w_i^{(2)} E$.

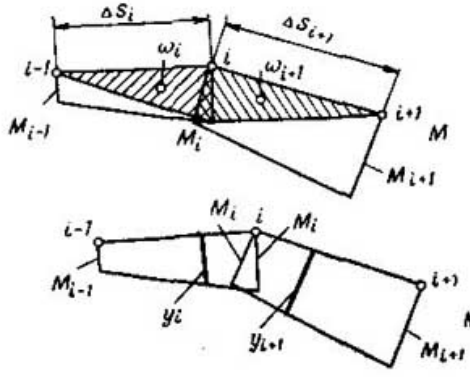


Fig. 13.11.

El coeficiente δ_{22} lo determinamos del siguiente modo:

$$\delta_{22} = \sum \int \bar{M}_2^2 \frac{ds}{EJ} = \\ = -2 \sum_{i=0}^{10} \bar{M}_i^{(2)} w_i^{(2)}. \tag{13.34}$$

En el presente ejemplo resulta que $E\delta_{22} = 8248{,}4$. Como control se puede determinar aún a $E\delta_{22}$ como la ordenada en cero duplicada del diagrama $E\delta_{P2}$:

$$E\delta_{22} = 2 \cdot 4124{,}2 = 8248{,}4.$$

El diagrama de $E\delta_{P3}$ (fig. 13.13*b*) se construye por los pesos elásticos $w_i^{(3)} E$. Para el control, hallamos que

$$E\delta_{P3\ máx} = \sum_{i=0}^{10} w_i^{(2)} E = 679{,}3.$$

$E\delta_{33}$ se halla por la fórmula

$$E\delta_{33} = -2 \sum_{i=10}^{10} w_i^{(3)} E. \tag{13.35}$$

En el presente ejemplo se obtiene que $E\delta_{33} = 323{,}94$.

Las líneas de influencia de X_2 (fig. 13.12*c*) y X_3 (fig. 13.13*c*) se construyen por la fórmula (13.33).

La línea de influencia de la fuerza interna, en cualquier sección, se construye por la fórmula

$$\text{l. i. de } S = \bar{S}_1 (\text{l. i. de } X_1) + \bar{S}_2 (\text{l. i. de } X_2) + \bar{S}_3 (\text{l. i. de } X_3) + (\text{l. i. de } S_P^0) \tag{13.36}$$

donde S es el momento flector M, la fuerza transversal Q o la longitudinal N, en la sección dada;

$\overline{S_i}$, la fuerza interna en la misma sección, en el sistema basico, debida a $X_i = 1$ (magnitud constante);

1. i. de S_P^0, la línea de influencia de la fuerza interna respectiva en la misma sección, en el sistema básico.

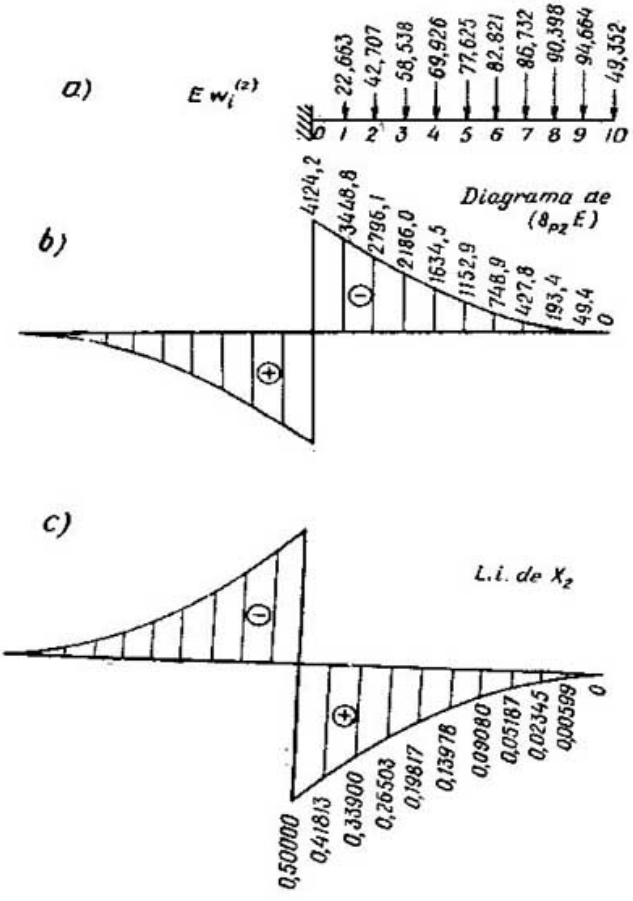


Fig. 13.12

En la fig. 13.14 se dan las líneas de influencia de M_p^0, Q_p^0 y N_p^0 en el sistema básico para un cuarto de tramo y en la fig. 13.15, las líneas de influencia de M, Q y N en la misma sección, en el sistema dado.

Como ejemplo, hallemos una ordenada de la línea de influencia. Sea que el peso $P = 1$ se encuentra a una distancia infinitesi-

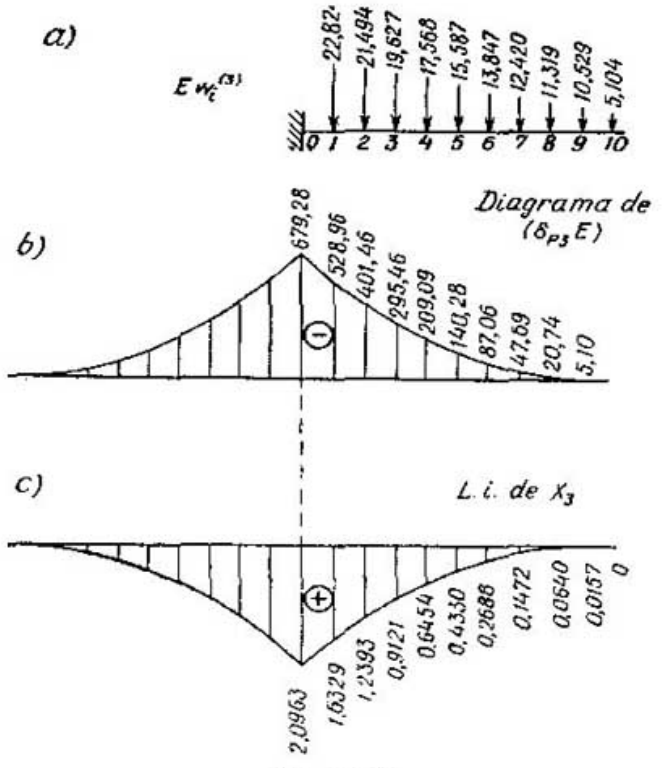


Fig. 13.13

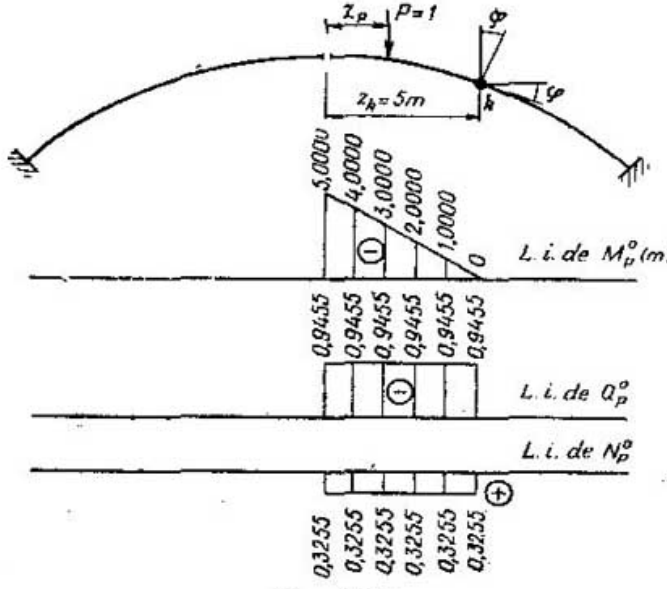


Fig. 13.14

mal, a la derecha del medio del tramo. Entonces

$$M_{1/4} = (y - c)\,X_1 + z_k X_2 + X_3 + M_P^0 = (0{,}79995 - 0{,}90159)\,1{,}2071 + \\ + 5 \cdot 0{,}50000 + 2{,}0963 - 5{,}0000 = -0{,}5264.$$

Las líneas de influencia en las otras secciones pueden ser construidas por el método general, según la fórmula (11.36). En la

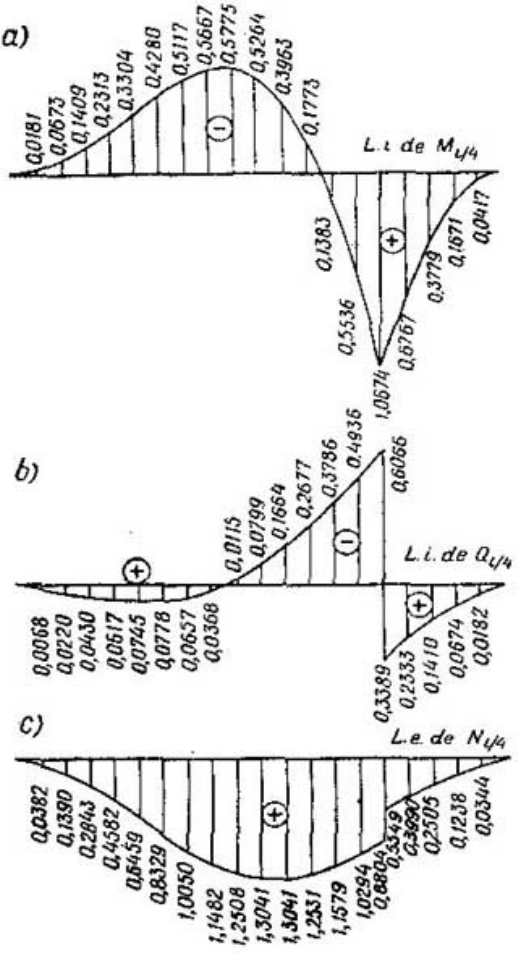


Fig. 13.15

fig. 13.16 se dan las líneas de influencia de los momentos flectores en la llave y el arranque.

El momento flector nuclear, para un problema plano, es igual a la suma de los momentos de las fuerzas ubicadas a un lado de la sección, con respecto al punto nuclear situado en esta sección.

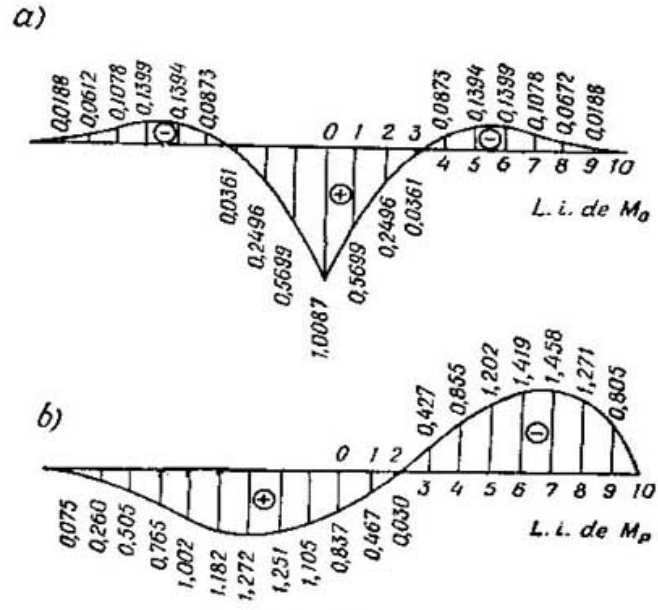


Fig. 13.16

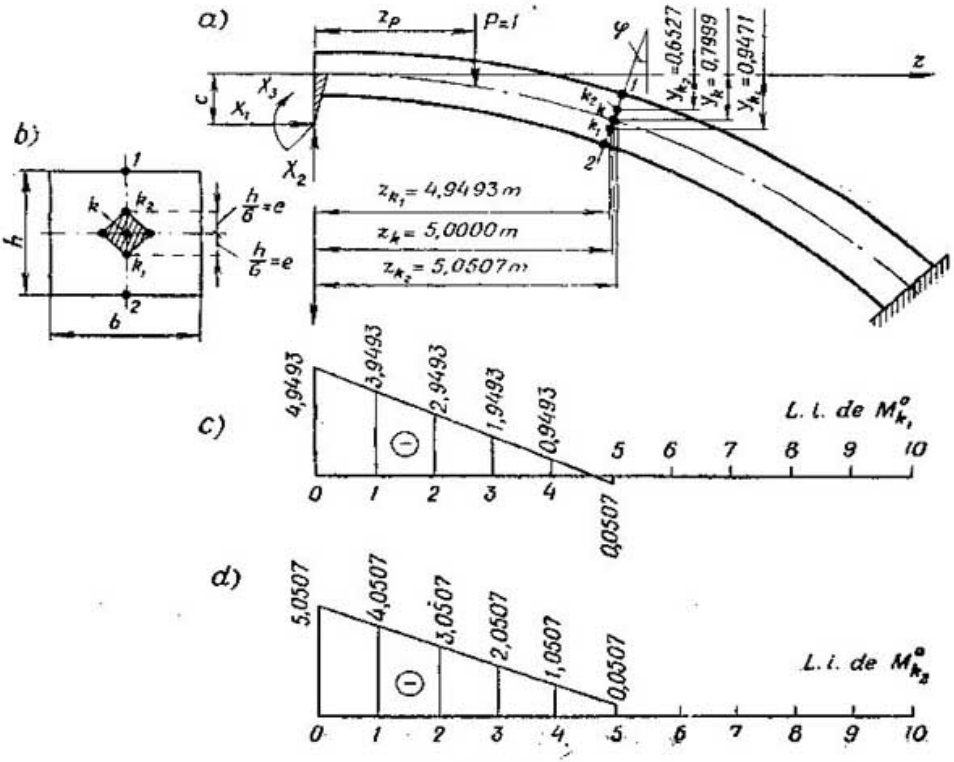


Fig. 13.17

Examinemos la sección transversal en un cuarto de tramo para $z_k = 5$ m (fig. 13.17*a*). En el caso de sección transversal rectangular, los puntos nucleares k_1 y k_2 estarán ubicados sobre las normales, a una distancia e del eje.

Las fórmulas para el cálculo de las ordenadas de las líneas de influencia de los momentos nucleares tienen la forma:

$$\text{l. i. de } M_{k_1}^{\text{nucl}} = (y_{k_1} - c)(\text{l. i. de } X_1) + z_{k_1}(\text{l. i. de } X_2) + (\text{l. i. de } X_3) + \\ + (\text{l. i. de } M_{k_1}^0); \text{ y l. i. de } M_{k_2}^{\text{nucl}} = (y_{k_2} - c)(\text{l. i. de } X_1) + \\ + z_{k_2}(\text{l. i. de } X_2) + (\text{l. i. de } X_3) + (\text{l. i. de } M_{k_2}^0),$$

donde

$$M_{k_1}^0 = -P(z_{k_1} - z_p) \quad \text{para} \quad 0 \leqslant z_p \leqslant z_k;$$

$$M_{k_2}^0 = -P(z_{k_2} - z_p) \quad \text{para} \quad 0 \leqslant z_p \leqslant z_k.$$

Cuando el peso esté ubicado a la derecha de la sección k,

$$M_{k_1}^0 = 0 \quad \text{y} \quad M_{k_2}^0 = 0.$$

En el presente ejemplo

$$e = \frac{h}{6} = \frac{0{,}93447}{6} = 0{,}15574 \text{ m}.$$

Las líneas de influencia de los momentos nucleares se dan en la fig. 13.18. Para $z = 5$, las líneas de influencia tienen discontinuidades, siendo que los puntos de intersección de los ramales izquierdo y derecho se hallan en las verticales que pasan por el respectivo punto nuclear k_1 o k_2.

Después de cargar las líneas de influencia, las tensiones normales pueden ser determinadas por las fórmulas:

$$\sigma_1 = \frac{M_{k_1}^{\text{nucl}}}{W} \quad \text{(para el punto 1)};$$

$$\sigma_2 = -\frac{M_{k_2}^{\text{nucl}}}{W} \quad \text{(para el punto 2)}.$$

Aquí, la compresión se toma con el signo más.

Problema 13.4. Se da el esquema de un arco biarticulado (fig. 13.19*a*). El eje del arco es trazado por una parábola cuadrangular.

$$y = \frac{4f}{l^2} z^2. \tag{13.37}$$

La ley de variación de los momentos de inercia es:

$$J = J_0 - \frac{4}{l^2}(J_0 - J_p) z^2. \tag{13.38}$$

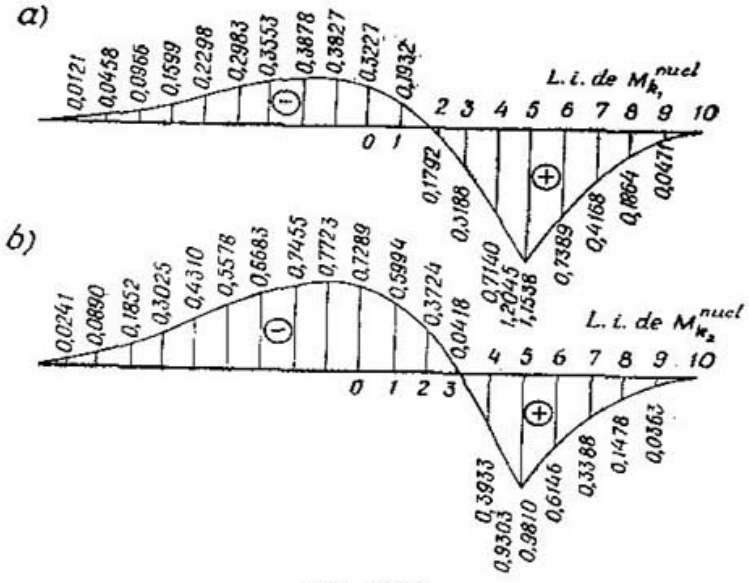


Fig. 13.18

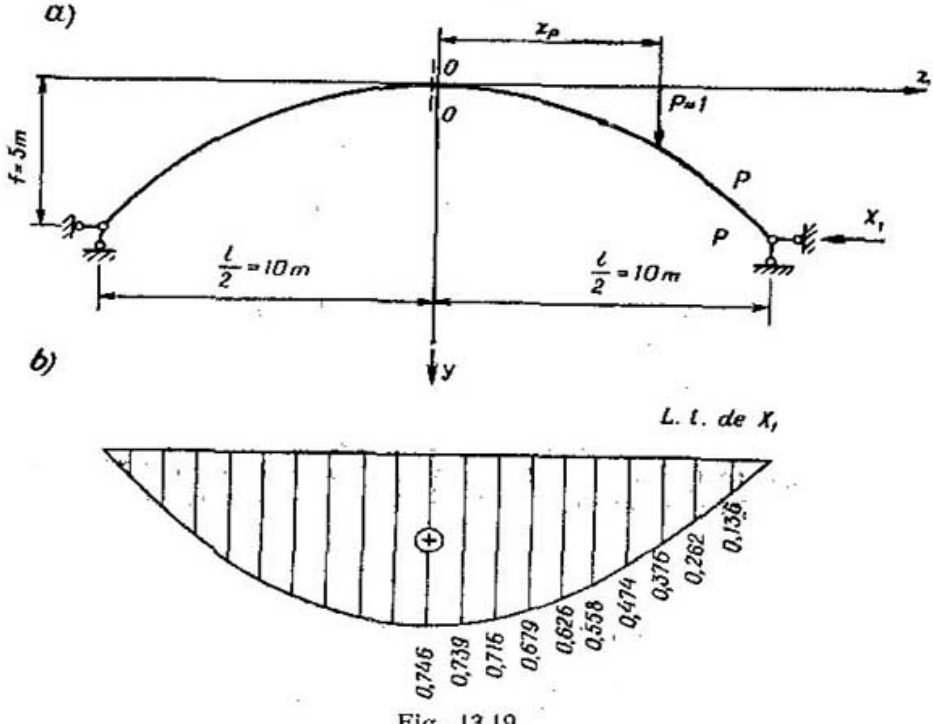


Fig. 13.19

Las relaciones entre los momentos de inercia y las superficies de las secciones transversales son designadas:

$$k = \frac{J}{F}; \quad k_0 = \frac{J_0}{F_0}; \quad k_p = \frac{J_p}{F_p}.$$

Suponemos que

$$k = k_0 - \frac{4}{l^2}(k_0 - k_p)\, z^2. \tag{13.39}$$

Las magnitudes k_0 y k_p se consideran dadas. Suponemos que

$$k_0 = 0{,}2 \text{ m}^2, \quad k_p = 0{,}1 \text{ m}^2.$$

Se pide construir la línea de influencia del empuje horizontal.

Indicaciones

Se puede obtener el sistema básico eliminando el vínculo horizontal de apoyo en los apoyos izquierdo o derecho. Los pesos elásticos se hallan por las fórmulas (13.27) y (13.32). El diagrama de δ_{p1} se construye por medio de una viga ficticia, de luz l, con apoyos articulados en cada extremo. δ_{11} se halla por la fórmula (13.29) y X_1 por la (13.33).

La respuesta se da en la fig. 13.19*b*.

CAPITULO 14 * CALCULO DE SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS POR EL METODO DE DESPLAZAMIENTOS

Utilizando el método de desplazamientos son tomados por incógnitas Z_k los desplazamientos independientes, lineales (progresivos) y angulares, de los nudos k del sistema dado. El sistema básico se obtiene introduciendo aquellos vínculos de momento y de fuerza que eliminen los desplazamientos elásticos, angulares y progresivos, de los nudos, y representa un sistema de vigas hiperestáticas con ambos extremos empotrados o con uno empotrado y el otro sobre un apoyo articulado. Las ecuaciones canónicas tienen el aspecto:

$$\begin{aligned} &r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + \ldots + R_{1P} = 0; \\ &r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + \ldots + R_{2P} = 0; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + r_{n3}Z_3 + \ldots + R_{nP} = 0. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Aquí, r_{km} es la reacción del vínculo k debida al desplazamiento $Z_m = 1$;

R_{kP}, ídem, debido a la carga (o a la temperatura y al asiento de los apoyos).

Si despreciamos las deformaciones debidas a N y Q, las reacciones de los vínculos se determinan por medio de los diagramas de los momentos flectores de $\bar{M}_k$ y M_P del sistema básico, del equilibrio de los nudos y barras recortados sobre los cuales fueron aplicados los vínculos.

Los diagramas de $\bar{M}_k$ y M_P del sistema están compuestos por los diagramas de los momentos flectores de las vigas hiperestáticas que entran en el sistema básico. En las figs. 14.1 y 14.2 se dan los diagramas de los momentos debidos a los desplazamientos unitarios y a las distintas cargas, para las vigas con la rigidez lineal constante $i = \frac{EJ}{l}$.

Al calcular la carga rodante por el método de los desplazamientos es indispensable conocer previamente las líneas de influencia de las reacciones de momento y de fuerza de los apoyos de las vigas hiperestáticas del sistema básico. Sus ordenadas se determinan por las siguientes fórmulas, en función de la coordenada adimensional $u = \frac{z}{l}$ de la posición del peso $P = 1$ en el tramo (fig. 14.3):

1) ambos extremos a y b están empotrados:

$$r_a = -lf_3(u); \quad r_b = lf_4(u); \quad V_a = \varphi_1(u); \quad V_b = 1 - \varphi_1(u); \quad (14.2)$$

2) el extremo derecho b está empotrado y el izquierdo a, articulado:

$$r_a = 0; \quad r_b = lf_5(u); \quad V_a = \varphi_2(u); \quad V_b = 1 - \varphi_2(u) \quad (14.3)$$

3) el extremo izquierdo a está empotrado y el derecho b, articulado:

$$r_a = -lf_6(u); \quad r_b = 0; \quad V_a = \varphi_3(u); \quad V_b = 1 - \varphi_3(u) \quad (14.4)$$

Los valores de las funciones f y φ se dan en la tabla 14.1.

Las ordenadas de las líneas de influencia de las incógnitas Z_k se calculan por las fórmulas:

$$Z_k = \beta_{k1}r_{1P} + \beta_{k2}r_{2P} + \ldots + \beta_{kn}r_{nP} \quad (14.5)$$

o bien

$$Z_k = -\beta_{k1}\delta_{P1} - \beta_{k2}\delta_{P2} - \ldots + \beta_{kn}\delta_{Pn}. \quad (14.6)$$

Aquí, β_{km} son los coeficientes de influencia determinados por la resolución del sistema de ecuaciones canónicas (14.1), en el cual se considera que $R_{kP} = 1$ y que todos los términos de carga restantes son $R_{mP} = 0$ (véase el capítulo 10);

r_{kP}, las reacciones unitarias de carga, de los vínculos k; surgen al moverse el peso $P = 1$ por los tramos, y se calculan según las fórmulas (14.2), (14.3) ó (14.4);

$\delta_{Pk} = -r_{kP}$, las ordenadas de los diagramas de las flechas debidas a la acción de los desplazamientos unitarios incógnitos $Z_k = 1$ en el sistema básico.

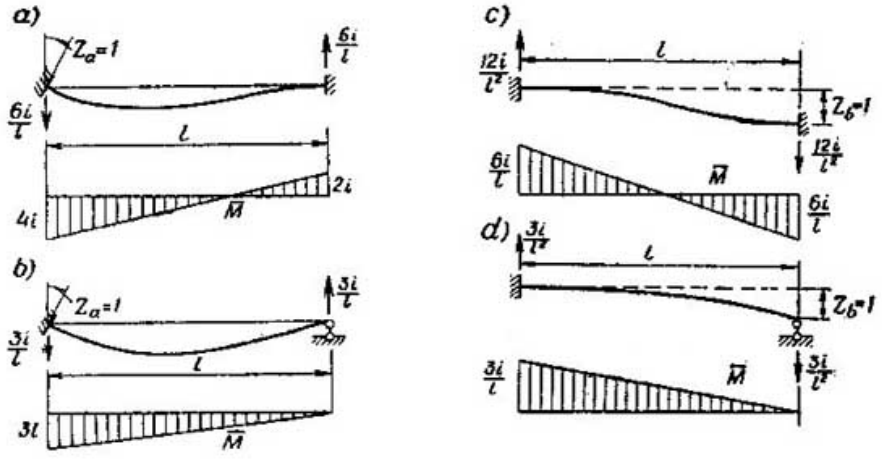


Fig. 14.1

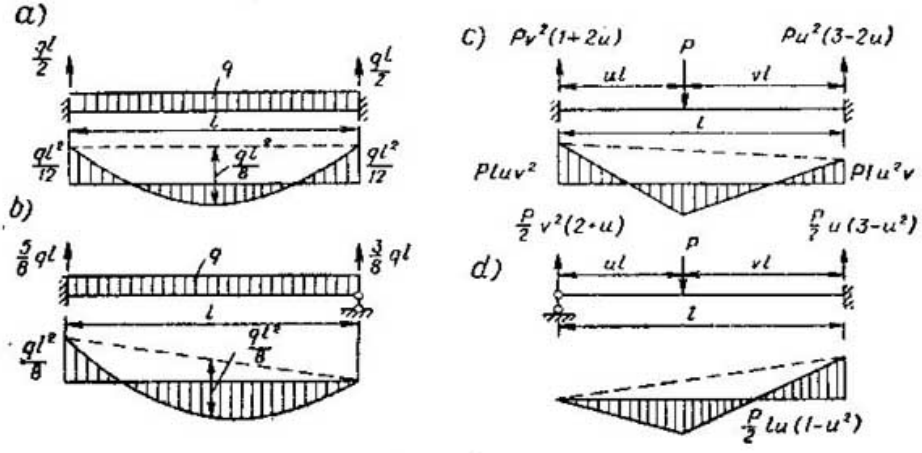


Fig. 14.2

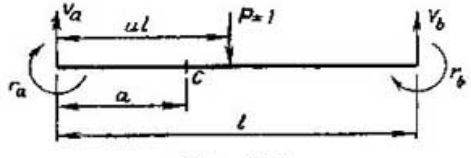


Fig. 14.3

Tabla 14.1

$\frac{a}{l}=u$	$f_1(u)=u(1-u)^2$	$f_2(u)=(1-u)u^2$	$\Phi_1(u)=1-u^2(3-2u)$	$f_3(u)=\frac{u}{2}(1-u^2)$	$\Phi_2(u)=1-\frac{u}{2}(3-u^2)$	$f_4(u)=\frac{u}{2}(1-u)(2-u)$	$\Phi_3(u)=1-\frac{u^2}{2}(3-u)$
0	0	0	1,0000	0	1,0000	0	1,0000
0,1	0,0810	0,0090	0,9720	0,0495	0,8505	0,0855	0,9855
0,2	0,1280	0,0320	0,8960	0,0960	0,7040	0,1440	0,9440
0,3	0,1470	0,0630	0,7840	0,1365	0,5635	0,1785	0,8785
0,4	0,1440	0,0960	0,6480	0,1680	0,3920	0,1920	0,7920
0,5	0,1250	0,1250	0,5000	0,1875	0,3125	0,1875	0,6875
0,6	0,0960	0,1440	0,3520	0,1920	0,2080	0,1680	0,6080
0,7	0,0630	0,1470	0,2160	0,1785	0,1215	0,1365	0,4365
0,8	0,0320	0,1280	0,1040	0,1440	0,0560	0,0960	0,2960
0,9	0,0090	0,0810	0,0280	0,0855	0,0145	0,0495	0,1495
1,0	0	0	0	0	0	0	0

Por medio de las incógnitas Z se expresan las líneas de influencia de las fuerzas internas. Por ejemplo, para la sección C (fig. 14.3):

$$\text{l. i. de } M_C = \text{l. i. de } M_C^0 + (\text{l. i. de } Z_1)\,\bar{M}_{C1} + (\text{l. i. de } Z_2)\,\bar{M}_{C2} + \ldots + (\text{l. i. de } Z_n)\,\bar{M}_{Cn}; \qquad (14.7)$$

$$\text{l. i. de } Q_C = \text{l. i. de } Q_C^0 + (\text{l. i. de } Z_1)\,\bar{Q}_{C1} + (\text{l. i. de } Z_2)\,\bar{Q}_{C2} + \ldots + (\text{l. i. de } Z_n)\,\bar{Q}_{Cn}. \qquad (14.7)$$

Aquí, $\bar{M}_{Ck}$ y $\bar{Q}_{Ck}$ son las ordenadas tomadas de los diagramas unitarios de $\bar{M}_k$ y $\bar{Q}_k$ en la sección C;

l. i. de M_C^0 y l. i. de Q_C^0, las líneas de influencia del momento flector y la fuerza transversal en la sección C del sistema básico, o sea, en aquella viga hiperestática donde se halla la sección C.

En función de la posición del peso $P = 1$ en el tramo (fig. 14.3), sus ordenadas se calculan por las fórmulas:

el peso está a la derecha de la sección C:

$$M_C^0 = r_a + V_a a; \quad Q_C^0 = V_a;$$

el peso está a la izquierda de la sección C:

$$M_C^0 = r_a + V_a a - 1\,(a - ul); \quad Q_C^0 = V_a - 1. \tag{14.8}$$

También se los puede calcular por las fórmulas:

$$M_C^0 = M_C^{vig} + r_{aP}\frac{l-a}{l} - r_{bP}\frac{a}{l} = M_C^{vig} - \delta_{Pa}\frac{l-a}{l} + \delta_{Pb}\frac{a}{l};$$

$$Q_C^0 = Q_C^{vig} - \frac{r_{aP} + r_{bP}}{l} = Q_C^{vig} + \frac{\delta_{Pa} + \delta_{Pb}}{l}. \tag{14.9}$$

Aquí, M_C^{vig} y Q_C^{vig} son las ordenadas de las líneas de influencia del momento flector y la fuerza transversal en la sección C de una viga simplemente apoyada (isostática), con los apoyos articulados.

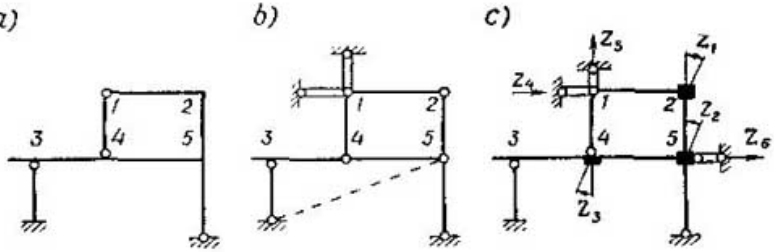


Fig. 14.4

Ejemplo 14.1. Determinar el grado de hiperestaticidad cinemática del pórtico (fig. 14.4*a*) y elegir el sistema básico por el método de los desplazamientos.

Resolución

El grado de hiperestaticidad por el método de los desplazamientos es igual al número de desplazamientos independientes, angulares y progresivos, de los nudos del pórtico. El número de desplazamientos angulares es igual al de nudos rígidos (no articulados), excepto los de apoyo, dado que estos últimos no tienen movilidad elástica. En nuestro ejemplo, los nudos *2*, *4* y *5* son rígidos, o sea, son tres nudos.

El número de desplazamientos independientes progresivos, se determina por el número de vínculos complementarios que es necesario colocar para hacer invariante el sistema obtenido con una introducción de articulaciones en todos los nudos, incluso en los de apoyo. Después de la introducción de articulaciones en todas las barras del pórtico (fig. 14.4*b*) es necesario poner tres de dichos vínculos, por ejemplo, dos en el nudo *1* (indicados con doble línea) y uno en el *5* (en forma de una barra complementaria,

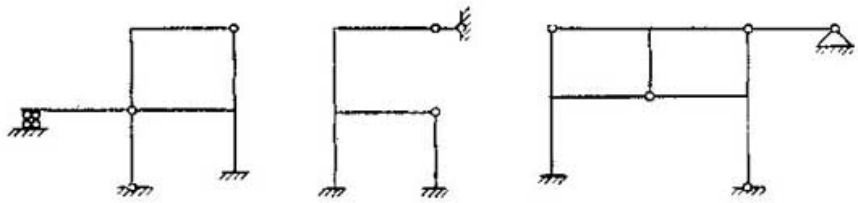


Fig. 14.5

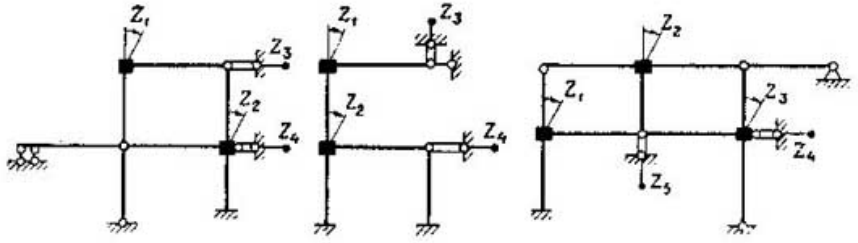


Fig. 14.6

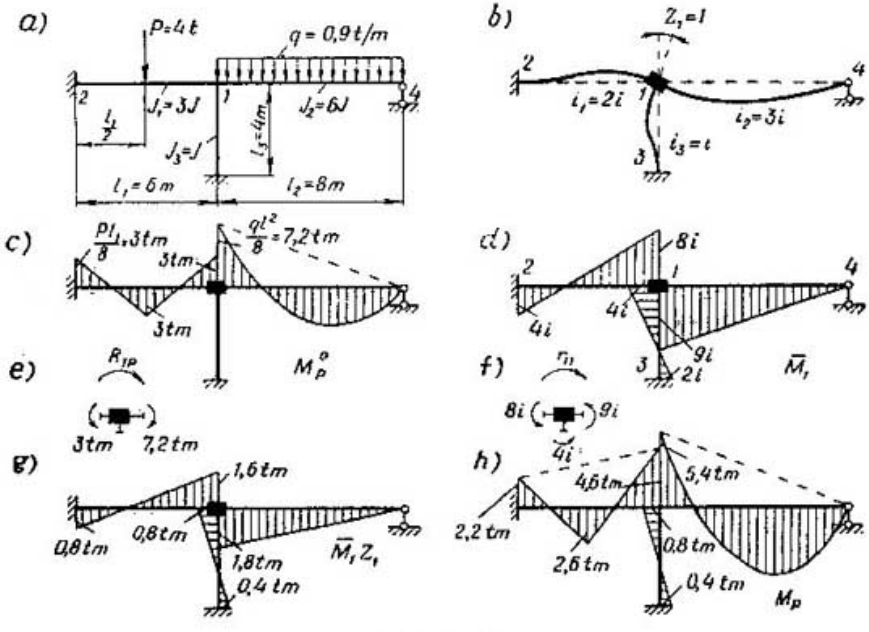


Fig. 14.7

representada en punteado en la fig. 14.4*b*, o en forma de apoyo horizontal, representado en la fig. 14.4*c*).

De tal modo, el grado de hiperestaticidad cinemática será $n = 3 + 3 = 6$.

El sistema básico se muestra en la fig. 14.4*c*. Como incógnitas Z_1, Z_2 y Z_3 son tomados los desplazamientos angulares de los nudos *2*, *5* y *4*; como Z_4 y Z_6, los desplazamientos elásticos horizontales de los nudos *1* y *5*; y como Z_5, el desplazamiento elástico vertical del nudo *1*. Los desplazamientos progresivos de los nudos *2*, *3* y *4* están en función de los desplazamientos de los nudos *1* y *5*.

Problema 14.2. Elegir el sistema básico para los pórticos representados en la fig. 14.5, por el método de desplazamientos.

Respuesta: Véase la fig. 14.6.

Ejemplo 14.3. Construir en el pórtico (fig. 14.7*a*) por el método de desplazamientos, el diagrama de los momentos flectores debidos a la carga.

Resolución

Por el método de desplazamientos, el pórtico tiene una hiperestaticidad cinemática: en éste hay un sólo nudo rígido capaz de girar en forma independiente (el *1*) y no tiene desplazamientos progresivos.

Colocamos en el nudo *1* un vínculo de momento que le impida girar y obtenemos un sistema básico de tres vigas hiperestáticas (fig. 14.7*b*). El ángulo de giro Z_1 del nudo *1* es la incógnita buscada. La ecuación canónica tiene la forma:

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0.$$

Para hallar las reacciones R_{1P} y r_{11}, al principio determinamos los coeficientes de rigirez i_k de cada viga. Tomamos $l_3 = 4$ m $= l$ e

$$i_3 = \frac{EJ_3}{l_3} = \frac{EJ}{l} = i.$$

Entonces,

$$i_2 = \frac{EJ_2}{l_2} = \frac{E \cdot 6J}{2l} = 3i; \qquad i_1 = \frac{EJ_1}{l_1} = \frac{E \cdot 3J}{\frac{3}{2}l} = 2i.$$

Después, construímos los diagramas de los momentos flectores en el sistema básico por medio de las figs. 14.1 y 14.2: M_P^0 es debido a la carga y $\bar{M}_1$, al ángulo de giro unitario $Z_1 = 1$ (fig. 14.7*c*, *d*), considerando que en las vigas *1-2* y *1-3* están empotrados ambos extremos y que en la *1-4*, solamente el izquierdo, el derecho está articulado.

De la condición de equilibrio del nudo *1* (fig. 14.7*e* y *f*) hallamos las reacciones:

$$R_{1P} = 3 - 7{,}2 = -4{,}2 \text{ tfm}; \qquad r_{11} = (8 + 9 + 4)\, i = 21i.$$

Colocándolas en la ecuación canónica, obtenemos que

$$Z_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} = \frac{4{,}2}{21i} = \frac{2}{10i}.$$

El diagrama definitivo de los momentos flectores M_P (fig. 14.7*h*)

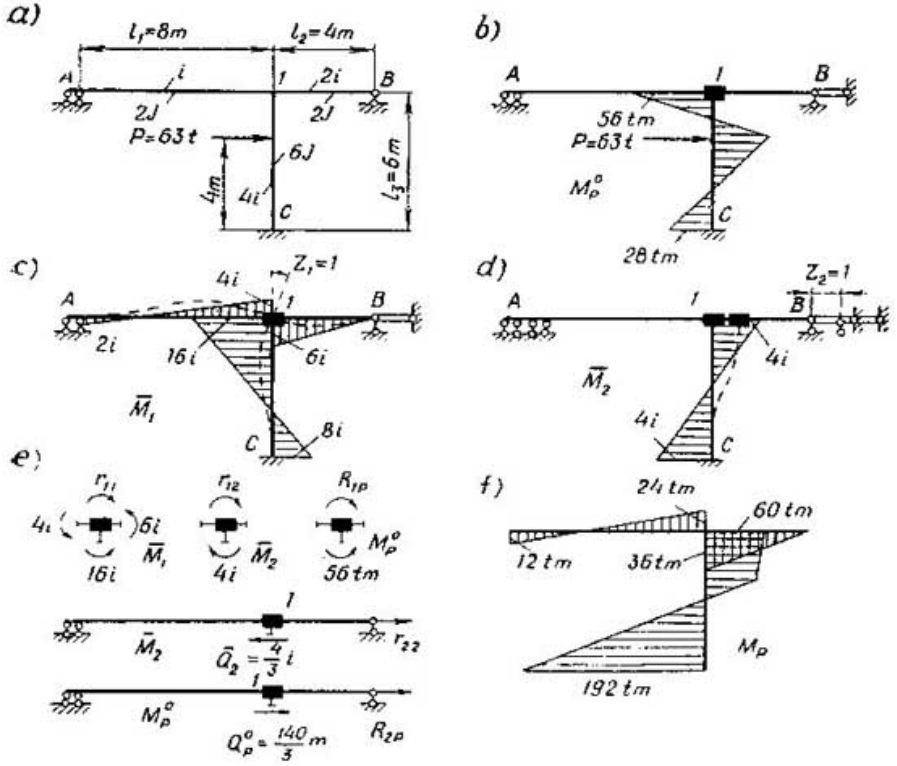


Fig. 14.8

del pórtico lo obtenemos sumando al diagrama de $\bar{M}_1 Z_1$ (fig. 14.7*g*) el de carga M_P^0:

$$M_P = \bar{M}_1 Z_1 + M_P^0.$$

Ejemplo 14.4. Construir el diagrama de los momentos flectores de un pórtico de dos tramos, debidos a la fuerza horizontal $P = 63$ tf (fig. 14.8*a*).

Resolución

El ángulo de giro Z_1 del nudo *1* y el desplazamiento horizontal progresivo, Z_2, de la viga de estructura son incógnitas. Obtenemos el sistema básico con la aplicación de un vínculo de momento al

nudo I y uno de fuerza, por ejemplo, al apoyo B (fig. 14.8b). Las ecuaciones canónicas tienen el aspecto:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0;$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0.$$

Para los coeficientes de rigidez tomamos que $i_1 = \frac{EJ}{l_1} = \frac{EJ}{4} = i$. Respectivamente, $i_2 = \frac{E \cdot 2J}{4} = 2i$ e $i_3 = \frac{E \cdot 6J}{6} = 4i$. Se muestran en la fig. 14.8 a.

Calculamos las ordenadas extremas de los diagramas de los momentos flectores por medio de las figs. 14.2 y 14.1:

de los debidos a la carga (suponiendo que el nudo C es el extremo izquierdo y el I el derecho de la viga representada en la fig. 14.2c) tenemos

$$M^0_{P,\,1C} = -Pl_3u_3v_3^2 = -63 \cdot 6\,\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -28 \text{ tfm};$$

$$M^0_{P,\,1C} = -63 \cdot 6\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3} = -56 \text{ tfm};$$

de los debidos a $Z_1 = 1$ (por la fig. 14.1a) tenemos

$$\bar{M}_{1,\,1A} = 4i_1 = 4i; \quad \bar{M}_{1,\,A1} = 2i_1 = 2i; \quad \bar{M}_{1,\,1B} = 3i_2 = 6i$$
$$\bar{M}_{1,\,B1} = 0; \quad \bar{M}_{1,\,1C} = 4i_3 = 16i; \quad \bar{M}_{1,\,C1} = 2i_3 = 8i;$$

de los debidos a $Z_2 = 1$ (por la fig. 14.1c) tenemos

$$\bar{M}_{2,\,1C} = \frac{6i_3}{3} = 4i; \quad \bar{M}_{2,\,C} = 4i.$$

Por estas ordenadas se construyeron los diagramas de M^0_P, $\bar{M}_1$ y $\bar{M}_2$ (fig. 14.8 $b - d$).

Recortando en los estados unitarios y de carga (fig. 14.8e) el nudo I determinamos las reacciones del vínculo de momento por la condición de equilibrio del nudo:

$$r_{11} = (16 + 4 + 6)\,i = 26i; \quad r_{12} = r_{21} = -4i; \quad R_{1P} = 56 \text{ tfm}.$$

Recortamos la viga de estructura AB en los estados unitarios $(\bar{M}_2)$ y de carga (M^0_P) (fig. 14.8e) para hallar las reacciones del vínculo de fuerza. Las fuerzas transversales horizontales actúan sobre la viga solamente en el nudo I. Hallamos la fuerza transversal en el estado unitario, en el nudo I, por medio del diagrama de $\bar{M}_2$:

$$\bar{Q}_2 = \frac{d\bar{M}_2}{dz} = \frac{\bar{M}_{2,\,1C} - \bar{M}_{2,\,C1}}{l_3} = \frac{4+4}{6}\,i = \frac{4}{3}\,i,$$

o por la fórmula (fig. 14.1c)

$$\bar{Q}_2 = \frac{12i_3}{l_3^2} = \frac{12 \cdot 4i}{36} = \frac{4}{3}\,i.$$

Está dirigida hacia la izquierda.

Calculamos la fuerza transversal en el estado de carga, en el nudo *1*, suponiendo que este nudo está en el extremo derecho y que $ul = u_3 l_3 = 4$ m, por la fórmula (fig. 14.2*c*):

$$Q_P^2 = Pu_3^2(3 - 2u_3) = 63\left(\frac{4}{6}\right)^2\left(3 - 2\frac{4}{6}\right) = \frac{140}{3}\text{ t.}$$

Está dirigida hacia la dececha. Del equilibrio de la viga de estructura *AB* (fig. 14.8*e*) obtenemos:

$$r_{22} = \frac{4}{3}i; \quad R_{2P} = -\frac{140}{3}\text{ tf.}$$

Componemos las ecuaciones canónicas con los coeficientes numéricos:

$$26iZ_1 - 4iZ_2 + 56 = 0;$$

$$-4iZ_1 + \frac{4}{3}iZ_2 - \frac{140}{3} = 0.$$

La resolución de éstas da:

$$Z_1 = \frac{6}{i}; \quad Z_2 = \frac{53}{i}.$$

Multiplicando las ordenadas del diagrama de $\bar{M}_1$ por Z_1, de $\bar{M}_2$ por Z_2 y sumando a los resultados el diagrama de M_P^0, obtenemos el diagrama definitivo de los momentos flectores del pórtico (fig. 14.8*f*). Señalamos que el multiplicador $i = \frac{EJ}{l}$ tfm se simplifica, por lo que se lo puede tomar directamente igual a la unidad, pero sin olvidar su dimensión durante los cálculos.

Ejemplo 14.5. Efectuar el cálculo estático del pórtico por el método de los desplazamientos. El esquema del pórtico, sus medidas, la carga y los coeficientes de rigidez $i = \frac{EJ}{l}$ (dentro de círculos) se muestran en la fig. 14.9*a*.

Resolución

El sistema básico está representado en la fig. 14.9*b*. Como incógnitas se toman Z_1 y Z_2 (los ángulos de giro de los nudos *1* y *2*) y Z_3 y Z_4 (los desplazamientos horizontales de las vigas *1-3* y *2-4*).

Los diagramas de los momentos flectores en el sistema básico, debidos a la carga (M_P^0) y a las incógnitas unitarias ($\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ y $\bar{M}_4$), se dan en la fig. 14.9. Por estos diagramas hallamos los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes de las ecuaciones canónicas. Del equilibrio de los nudos *1* y *2*, para la acción separada de cada una de las incógnitas unitarias, y de

la carga obtenemos las reacciones de momento:

$$r_{11} = 12 + 6 = 18; \quad r_{12} = r_{21} = 0; \quad r_{13} = r_{31} = -3;$$
$$r_{14} = r_{41} = 0; \quad R_{1P} = 12q;$$
$$r_{22} = 12 + 9 + 12 = 33; \quad r_{23} = r_{32} = -3;$$
$$r_{24} = r_{42} = 3 - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}; \quad R_{2P} = -8q.$$

Del equilibrio de las vigas de estructura recortadas *1-3* (sección *1—1* en la fig. 14.9*e*) y *2-4* (sección *2—2* en la fig. 14.9*f*) obtenemos las reacciones de fuerza:

$$r_{33} = \frac{3+3}{6} + \frac{3}{3} = 2; \quad r_{34} = r_{43} = -\frac{3}{3} = -1;$$
$$R_{3P} = -\frac{P}{2} = -8q;$$
$$R_{44} = \frac{3}{3} + \frac{9+9}{2 \cdot 4} + \frac{3}{2} = \frac{19}{4}; \quad R_{4P} = 0.$$

Las ecuaciones canónicas con los coeficientes numéricos tiene el aspecto:

$$18Z_1 - 3Z_3 + 12q = 0;$$
$$33Z_2 - 3Z_3 - \frac{3}{2}Z_4 - 8q = 0;$$
$$-3Z_1 - 3Z_2 + 2Z_3 - Z_4 - 8q = 0;$$
$$-\frac{3}{2}Z_2 - Z_3 + \frac{19}{4}Z_4 = 0.$$

Resolviéndolas y colocando el valor $q = 0{,}49$ tf/m, hallamos que

$$Z_1 = \frac{1{,}55}{6}; \quad Z_2 = \frac{2{,}87}{6}; \quad Z_3 = 3{,}51; \quad Z_4 = 0{,}89.$$

Construimos el diagrama definitivo de los momentos flectores del pórtico por las ordenadas en los extremos de las barras. Las ordenadas son calculadas por la fórmula

$$M_P = M_P^0 + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \ldots + \bar{M}_n Z_n.$$

Por ejemplo, en los extremos de la barra *A-1*:

$$M_{A\text{-}1} = 12 \cdot 0{,}49 - 6\frac{1{,}55}{6} + 3 \cdot 3{,}51 = 14{,}86 \text{ tfm};$$
$$M_{1A} = 12 \cdot 0{,}49 + 12\frac{1{,}55}{6} - 3 \cdot 3{,}51 = -1{,}55 \text{ tfm}.$$

En estos extremos, las ordenadas de los diagramas de $\bar{M}_2$ y $\bar{M}_4$ son iguales a cero.

En los extremos de las barras del nudo 2:

$$M_{23} = 9\,\frac{2,87}{6} - 3 \cdot 3,51 + 3 \cdot 0,89 = -3,555 \text{ tfm};$$

$$M_{24} = 8 \cdot 0,49 - 12\,\frac{2,87}{6} = -1,82 \text{ tfm};$$

$$M_{2B} = 12\,\frac{2,87}{6} - \frac{9}{2}\,0,89 = 1,735 \text{ tfm, etc.}$$

Por las ordenadas halladas se construyó el diagrama de M_P (fig. 14.9*g*). Por las condiciones de equilibrio de los nudos y vigas

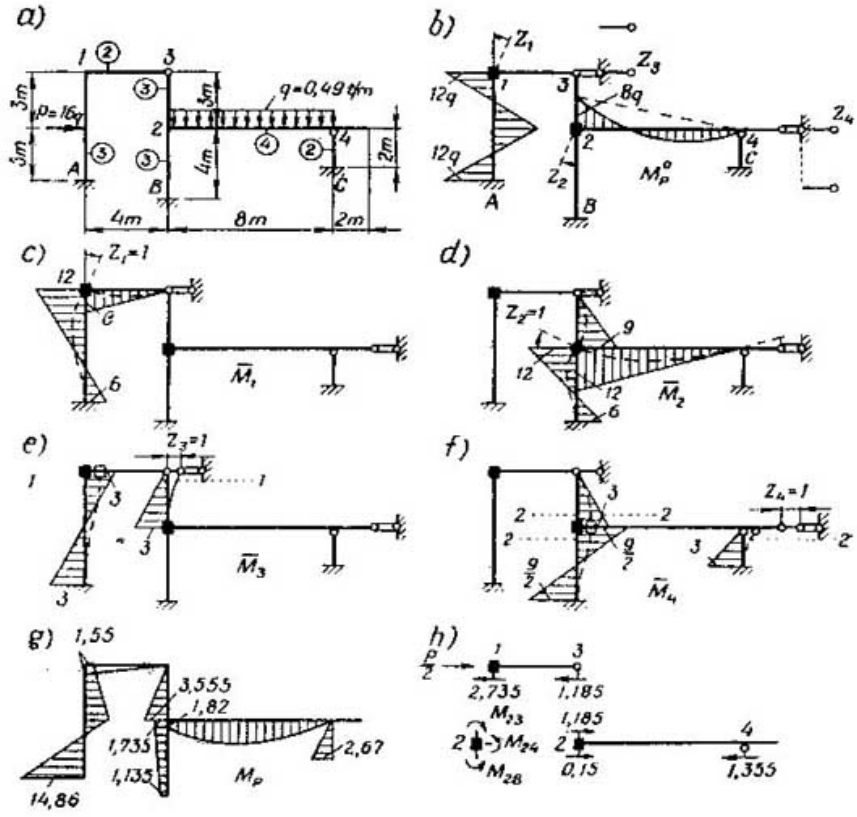


Fig. 14.9

de estructura recortados verificamos si es correcto o no este diagrama. Por ejemplo, en el nudo 2 actúan los momentos (fig. 14.9*h*)

$$M_{23} - M_{24} - M_{2B} = 3,555 - 1,82 - 1,735 = 0.$$

En la viga de estructura *1-3* actúan las fuerzas transversales

$$\frac{P}{2} - \frac{14{,}86 + 1{,}55}{6} - \frac{3{,}553}{2} = 3{,}92 - 2{,}735 - 1{,}185 = 0.$$

En la viga de estructura *2-4* actúan las fuerzas

$$\frac{3{,}555}{3} + \frac{1{,}735 - 1{,}135}{4} - \frac{2{,}67}{2} = 1{,}185 + 0{,}15 - 1{,}355 = 0.$$

Ejemplo 14.6. Se da un pórtico de dos tramos. Las dimensiones del pórtico y los coeficientes de rigidez de los elementos se muestran en la fig. 14.10*a*. Calcular los coeficientes de influencia,

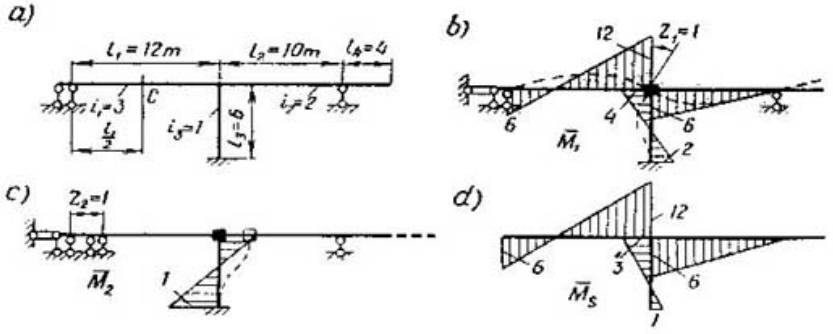


Fig. 14.10

construir las líneas de influencia de las incógnitas y, también, las del momento flector y de la fuerza transversal en la sección *C*, en la parte media del tramo izquierdo, empleando el método de los desplazamientos.

Resolución

El pórtico es de doble hiperestaticidad cinemática. Como incógnitas son tomados el ángulo de giro Z_1 del nudo y el desplazamiento horizontal Z_2 de la viga de estructura. Construimos los diagramas de los momentos $\bar{M}_1$ y $\bar{M}_2$ debidos a las incógnitas unitarias del sistema básico (fig. 14.10*b*, *c*). Las ecuaciones canónicas del método de desplazamientos tienen la forma:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{1P} = 0;$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{2P} = 0.$$

Calculamos los coeficientes de las incógnitas. Del equilibrio del nudo tenemos que, por el diagrama de $\bar{M}_1$, $r_{11} = 12 + 6 + 4 = 22$; y por el de $\bar{M}_2$, $r_{12} = r_{21} = -1$; del equilibrio de la viga de estructura obtenemos que $r_{22} = \frac{I}{3}$.

Para el control construimos el diagrama unitario sumante de $\bar{M}_S$ (fig. 14.10*d*) y considerando que $EJ_k = i_k l_k$, calculamos:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_S^2}{EJ_k}\, ds = \sum \int \frac{\bar{M}_S^2}{i_k l_k}\, ds = \frac{l_1}{6 \cdot 3l_1} 2\,(6^2 + 12^2 - 6 \cdot 12) +$$

$$+ \frac{6 \cdot 6 \cdot l_2}{3 \cdot 2 \cdot l_2} + \frac{l_3}{6 \cdot l_3} 2\,(3^2 + 1^2 - 3 \cdot 1) = 20\frac{1}{3}.$$

Esta suma deberá igualarse a la suma de los coeficientes de las incógnitas $\sum r_{ki} = 22 - 1 - 1 + \frac{1}{3} = 20\frac{1}{3}$, lo cual atestigua que sus cálculos son correctos.

Para hallar los números de influencia β_{1i}, en las ecuaciones canónicas se adopta que $r_{1P} = 1$ y que todos los demás términos de carga son $r_{kP} = 0$. Entonces, $Z_1 = \beta_{11}$ y $Z_2 = \beta_{21}$ y las ecuaciones canónicas, teniendo en cuenta los valores numéricos de los coeficientes r_{hi}, toman la forma:

$$22\beta_{11} - 1 \cdot \beta_{21} + 1 = 0;$$

$$-1 \cdot \beta_{11} + \frac{1}{3}\beta_{21} + 0 = 0.$$

Resolviéndolas, por ejemplo, por medio de determinantes, hallamos que

$$\beta_{11} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 22 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{19}{3}} = -\frac{1}{19};$$

$$\beta_{21} = -\frac{\begin{vmatrix} 22 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\frac{19}{3}} = -\frac{3}{19}.$$

Para comprobar las expresiones, colocamos los números de influencia obtenidos en la ecuación canónica:

$$22\left(-\frac{1}{19}\right) - 1\left(-\frac{3}{19}\right) + 1 = 0; \qquad -1\left(-\frac{1}{19}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{19}\right) = 0$$

y nos aseguramos de que su cálculo es correcto.

Análogamente se pueden hallar β_{22} y β_{12}, tomando $r_{2P} = 1$ y $r_{1P} = 0$. Pero, en nuestro ejemplo, no es necesario hacer esto, dado que la reacción de fuerza r_{2P} que entra en la ecuación (14.5), en el caso de carga vertical, es igual a cero y las incógnitas se expresan solamente por medio de la reacción de momento r_{1P}:

$$Z_1 = \beta_{11} r_{1P}; \qquad Z_2 = \beta_{21} r_{1P}.$$

En este caso, $\beta_{21} = \beta_{12}$ ya fue calculado.

Componemos las ecuaciones de las ordenadas de las líneas de influencia de las incógnitas en función de la coordenada adimensional $u = \frac{z}{l}$, determinante de la posición del peso $P = 1$ en el tramo.

El peso se halla en el primer tramo. Dado que este tramo es una viga con los extremos empotrados, para la reacción de carga $r_{1P} = r_b$ empleamos la fórmula (14.2) y obtenemos las ecuaciones de las líneas de influencia de las incógnitas

$$Z_1 = \beta_{11} l_1 f_4(u) = -\frac{12}{19} f_4(u); \quad Z_2 = \beta_{21} l_1 f_4(u) = -\frac{36}{19} f_4(u).$$

El peso se halla en el segundo tramo. En este tramo, el apoyo izquierdo es empotrado y el derecho, articulado, por eso, para la reacción de carga $r_{1P} = r_a$ es necesario emplear la fórmula (14.4) y, entonces, las ecuaciones para las incógnitas serán:

$$Z_1 = -\beta_{11} l_2 f_6(u) = \frac{10}{19} f_6(u); \quad Z_2 = -\beta_{21} l_2 f_6(u) = \frac{30}{19} f_6(u).$$

Los valores de las funciones $f_4(u)$ y $f_6(u)$ los tomamos de la tabla 14.1 y calculamos las ordenadas de las líneas de influencia de las incógnitas para las secciones elegidas en los tramos. El orden de cálculo se ve en la tabla 14.2.

Tabla 14.2

Peso	$u = \frac{z}{l}$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
En el 1er tramo	$f_4(u) = (1-u)u^2$	0,009	0,063	0,125	0,147	0,081
	$Z_1 = -\frac{12}{19} f_4(u)$	−0,0057	−0,0398	−0,0789	−0,0928	−0,0511
	$Z_2 = \frac{36}{19} f_4(u)$	−0,017	−0,119	−0,237	−0,278	−0,153
En el 2º tramo	$f_6(u) = \frac{u}{2}(1-u)(2-u)$	0,0855	0,1785	0,1875	0,1365	0,0495
	$Z_1 = \frac{10}{19} f_6(u)$	0,0450	0,0940	0,0987	0,0718	0,0260
	$Z_2 = \frac{30}{19} f_6(u)$	0,135	0,284	0,296	0,215	0,078

El peso se encuentra en el voladizo. La línea de influencia de la incógnita en la parte voladiza se representa con una recta que, en la sección de apoyo (comienzo del voladizo), es tangente a su línea de influencia formada en la parte de tramo delante del voladizo. El ángulo de inclinación de la tangente es determinado

como la derivada de la incógnita en la parte voladiza, tomada en la sección del apoyo. En el extremo del voladizo de longitud l_k, la ordenada de la línea de influencia de la incógnita es igual a:

$$Z_{1k} = l_k \left(\frac{dZ_i}{dz}\right) \quad \text{para} \quad z = l_2.$$

Empleando esta fórmula, obtenemos que

$$Z_{1k} = -l_k \cdot \beta_{11} l_2 \left[\frac{df_6(u)}{dz}\right]_{\text{para } z=l_2} = -l_k \beta_{11} l_2 \frac{d}{du}\left[\frac{u}{2}(1-u) \times \right.$$

$$\left. \times (2-u)\right] \frac{du}{dz} = -l_k \beta_{11} l_2 \left(-\frac{1}{2l_2}\right) = -4\frac{1}{19} \cdot \frac{1}{2} = -0{,}105;$$

$$Z_{2k} = -l_k \beta_{12} l_2 \left[\frac{df_6(u)}{dz}\right]_{\text{para } z=l_2} = -4\frac{3}{19} \cdot \frac{1}{2} = -0{,}316.$$

Por las ordenadas halladas se construyó la línea de influencia de la incógnita Z_1 (fig. 14.11*a*). La de la incógnita Z_2 tiene la misma forma, aunque con otros valores de las ordenadas (tabla 14.2).

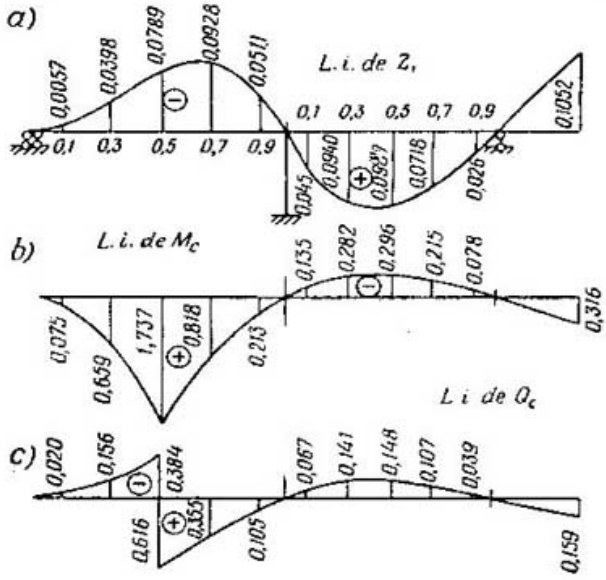


Fig. 14.11

Ahora pasamos a la construcción de las líneas de influencia de las fuerzas internas por las fórmulas (14.7). Para la línea de influencia del momento flector, al principio componemos la ecuación de la l. i. de M_C^0, para el primer tramo solamente, en que está la sección C, empleando las fórmulas (14.8) y (14.2) como para una viga con ambos extremos empotrados:

Tabla 14.3

$u = \frac{z}{l}$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	Voladizo
$-12f_3(u)$	0	−0,972	−1,764	−1,500	−0,756	−0,168	0							
$6\varphi_1(u)$	6,0	5,830	−4,704	3,000	1,296	0,168	0							
$-1(6-12u)$	−6,0	−4,800	−2,400	0										
M_C^0	0	0,058	0,540	1,500	0,540	0,060								
$-3Z_1$	0	0,017	0,119	0,237	0,278	0,153	0	−0,135	−0,282	−0,296	−0,215	−0,078	0	0,316
M_C	0	0,075	0,659	1,737	0,818	0,213	0	−0,135	−0,282	−0,296	−0,215	−0,078	0	0,316
$\varphi_1(u) - 1$	0	−0,028	−0,216	−0,500										
$\varphi_1(u)$				0,500	0,216	0,028								
$-\frac{3}{2}Z_1$	0	0,008	0,060	0,116	0,139	0,77	0	−0,067	−0,141	−0,148	−0,107	−0,039	0	0,159
Q_C	0	−0,020	−0,156	−0,384 0,616	0,355	0,105	0	−0,067	−0,141	−0,148	−0,107	−0,030	0	0,159

cuando el peso se halla a la izquierda de la sección C

$$\text{l. i. de } M_C^0 = -l_1 f_3(u) + a\varphi_1(u) - 1(a - ul_1) =$$
$$= -12 f_3(u) + 6\varphi_1(u) - (6 - 12u);$$

cuando el peso se halla a la derecha de la sección C

$$\text{l. i. de } M_C^0 = -12 f_3(u) + 6\varphi_1(u).$$

El cálculo de las ordenadas lo efectuamos en la tabla 14.3. Luego, en la sección C, de los diagramas $\bar{M}_1$ y $\bar{M}_2$ tomamos las ordenadas $\bar{M}_{C1} = -3$ y $\bar{M}_{C2} = 0$ y en la tabla 14.3 escribimos los valores de $-3(Z_1)$. Sumándolas a la l. i. de M_C^0, obtenemos las ordenadas de la l. i. de M_C (tabla 14.3).

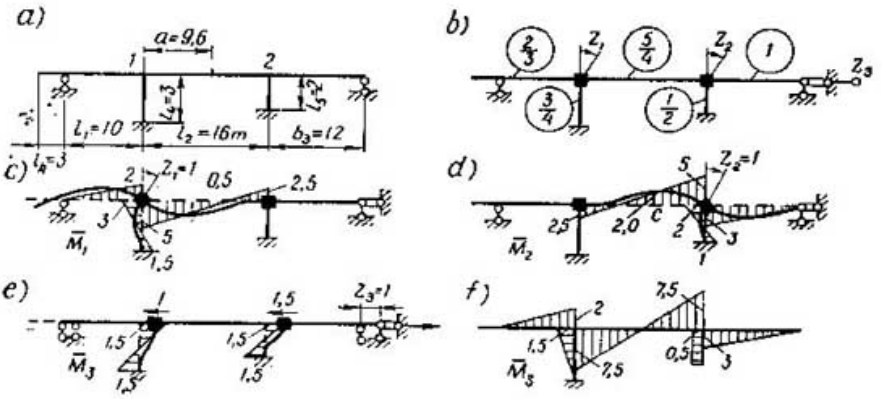


Fig. 14.12

Análogamente, tomando en cuenta los valores de (14.8) y (14.2) por la fórmula (14.7) componemos la ecuación de las ordenadas de la línea de influencia de la fuerza transversal en la sección C:

cuando el peso está a la izquierda, l. i. de $Q_C = \varphi_1(u) -$
$$- 1 - \frac{3}{2}(\text{l. i. de } Z_1);$$

cuando el peso está a la derecha, l. i. de
$$Q_C = \varphi_1(u) - \frac{3}{2}(\text{l. i. de } Z_1).$$

Aquí, $\bar{Q}_{C1}$ se determinó por el diagrama de $\bar{M}_1$ como $\frac{dM}{dz} = \frac{-12-6}{12} = -\frac{3}{2}$ y, $Q_{C2} = 0$. Por las ordenadas halladas (tabla 14.3) se construyeron las líneas de influencia de M_C y Q_C (fig. 14.11*b*, *c*).

Ejemplo 14.7. Efectuar el cálculo estático a la carga rodante del pórtico representado en la fig. 14.12*a*, por el método de desplazamientos, construyendo las líneas de influencia de las incógnitas y de las fuerzas internas en la sección *C*.

Resolución

El sistema básico está representado en la fig. 14.12*b*; los desplazamientos angulares Z_1 y Z_2 de los nudos y sus desplazamientos horizontales Z_3 son tomados como incógnitas. Tomando en cuenta las rigideces lineales (que se muestran dentro de círculos) y empleando los diagramas de la fig. 14.1, construimos los diagramas unitarios de $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ y $\bar{M}_3$ (fig. 14.12*c*—*e*). Por estos diagramas determinamos las reacciones unitarias (los coeficientes de las incógnitas de las ecuaciones canónicas).

Por el equilibrio del nudo *1* en los estados $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ y $\bar{M}_3$ hallamos que

$$r_{11} = 5 + 3 + 2 = 10; \quad r_{12} = r_{21} = 2{,}5; \quad r_{13} = r_{31} = -1{,}5.$$

Por el equilibrio del nudo *2* en los estados $\bar{M}_2$ y $\bar{M}_3$,

$$r_{22} = 3 + 2 + 5 = 10; \quad r_{23} = r_{32} = -1{,}5.$$

Por el equilibrio de la viga de estructura en el estado $\bar{M}_3$,

$$r_{33} = \frac{12i_4}{l_4^2} + \frac{12i_5}{l_5^2} = \frac{12 \cdot 3}{4 \cdot 3^2} + \frac{12 \cdot 1}{2 \cdot 2^2} = 1 + 1{,}5 = 2{,}5.$$

Para efectuar control, construimos el diagrama unitario sumante de $\bar{M}_S$ y calculamos

$$\sum \int \frac{\bar{M}_S^2}{EI}\, ds = \sum \int \frac{\bar{M}_S^2}{li}\, ds = \frac{2^2 \cdot 3}{3 \cdot 2} + \frac{1{,}5^2 \cdot 4}{3 \cdot 3} + \\ + 2\,\frac{7{,}5^2 \cdot 4}{3 \cdot 25} + \frac{0{,}5^2 \cdot 2}{1} + \frac{3^2}{3 \cdot 1} = 21{,}5.$$

El mismo resultado nos da también

$$\sum r_{ik} = 10 + 2 \cdot 2{,}5 - 2 \cdot 1{,}5 + 10 - 2 \cdot 1{,}5 + 2{,}5 = 21{,}5.$$

Las ecuaciones canónicas con los coeficientes numéricos tienen la forma:

$$10Z_1 + 2{,}5Z_2 - 1{,}5Z_3 + r_{1P} = 0; \qquad (1)$$

$$2{,}5Z_1 + 10Z_2 - 1{,}5Z_3 + r_{2P} = 0; \qquad (2)$$

$$-1{,}5Z_1 + 1{,}5Z_2 + 2{,}5Z_3 + r_{3P} = 0. \qquad (3)$$

Pasamos al cálculo de los coeficientes de influencia. Utilizamos el procedimiento de Gauss. El ciclo directo se da en la tabla 14.4.

Tabla 14.4

Determinación de los coeficientes de influencia por Gauss. Ciclo directo

Nº de la ecuación canónica y el coeficiente α	El coeficiente r de las incógnitas			Suma de los coeficientes S
	Z_1	Z_2	Z_3	
(1)	10	2,5	−1,5	11
$\alpha_{1k} = -\frac{r_{1k}}{r_{11}}$	−1	−0,25	0,15	—
(2)	2,5	10	−1,5	11
α_{12} (1)	−2,5	−0,625	0,375	−2,75
$(2^I) = (2) + \alpha_{12}$ (1)	•	9,375	−1,125	8,25
$\alpha_{2k} = -\frac{r^I_{2k}}{r^I_{22}}$	•	−1	0,12	—
(3)	−1,5	−1,5	2,5	−0,5
$+ \alpha_{13}$ (1)	1,5	0,375	−0,225	1,65
α_{22} (2′)	●	1,125	−0,135	0,99
(3″)	●	●	2,14	2,14

Ciclo inverso

1ª. operación. Adoptando $r_{3P} = 1$ y $r_{2P} = r_{1P} = 0$, de la tabla 14.4 obtenemos un sistema de ecuaciones incompletas, donde las incógnitas Z_k son iguales a los coeficientes de influencia:

$$r^{II}_{33}\beta_{33} = -1; \qquad (3^{II})$$

$$r^{I}_{22}\beta_{23} + r^{I}_{23}\beta_{33} = 0; \qquad (2^I)$$

$$r_{11}\beta_{13} + r_{12}\beta_{23} + r_{13}\beta_{33} = 0. \qquad (1)$$

Considerando que

$$\frac{r^I_{23}}{r^I_{22}} = -\alpha_{23}, \qquad \frac{r_{12}}{r_{11}} = -\alpha_{12}, \qquad \frac{r_{13}}{r_{13}} = -\alpha_{13},$$

y colocando sus valores numéricos tomados de la tabla 14.4, tenemos que

$$\beta_{33} = -\frac{1}{2,14} = -0,467; \qquad \beta_{23} = \alpha_{23}\beta_{33} = -0,12 \cdot 0,467 = -0,0561;$$

$$\beta_{13} = \alpha_{12}\beta_{23} + \alpha_{13}\beta_{33} = 0,25 \cdot 0,0561 - 0,15 \cdot 0,467 = -0,0561.$$

Para efectuar el control, en la ecuación canónica (3) sustituimos las incógnitas Z_k por los coeficientes de influencia hallados β_{k3}:

$$1{,}5 \cdot 0{,}0561 + 1{,}5 \cdot 0{,}0561 - 2{,}5 \cdot 0{,}467 = -1.$$

2ª operación. Ahora tomamos $r_{2P} = 1$ y $r_{3P} = r_{1P} = 0$ y por la tabla 14.4, escribimos las ecuaciones:

$$r^1_{22}\beta_{22} + r^1_{23}\beta_{32} = -1; \qquad (2^1)$$

$$r_{11}\beta_{12} + r_{12}\beta_{22} + r_{13}\beta_{32} = 0 \qquad (1)$$

con los coeficientes de influencia β_{k2} en lugar de las incógnitas Z_k. Nuevamente, teniendo en cuenta los valores de los coeficientes α y el hecho de que $\beta_{32} = \beta_{23}$ ya fue hallado, obtenemos que

$$\beta_{22} = -\frac{1}{r^1_{22}} + \alpha_{23}\beta_{32} = -\frac{1}{9{,}375} - 0{,}12 \cdot 0{,}0561 = -0{,}1134;$$

$$\beta_{12} = \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32} = 0{,}25 \cdot 0{,}1134 - 0{,}15 \cdot 0{,}0561 = 0{,}0199.$$

El control lo efectuamos por sustitución en la ecuación (2):

$$2{,}5 \cdot 0{,}0199 - 10 \cdot 0{,}1134 + 1{,}5 \cdot 0{,}0561 = -1.$$

3ra operación. Suponiendo que $r_{1P} = 1$ y $r_{2P} = r_{3P} = 0$, por la ecuación (1)

$$r_{11}\beta_{11} + r_{12}\beta_{21} + r_{13}\beta_{31} = -1$$

hallamos que

$$\beta_{11} = -\frac{1}{r_{11}} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31} =$$

$$= -\frac{1}{10} - 0{,}25 \cdot 0{,}0199 - 0{,}15 \cdot 0{,}0561 = -0{,}1134.$$

El control lo efectuamos con la sustitución inversa en la ecuación (1).

Ahora, las líneas de influencia de las incógnitas Z_k se pueden expresar por medio de los coeficientes de influencia y las flechas por la fórmula (14.6). Componemos las ecuacicones de las ordenadas del diagrama de flechas, en el sistema básico, debidas a las incógnitas unitarias. En este caso, tomando en cuenta que las flechas debidas a la incógnita Z_1 aperecerán solamente en los tramos primero y segundo, las debidas a Z_2, en el segundo y tercero y que las flechas δ_{P3} de todos los tramos de la viga de estructura en el sistema básico, debidas a las Z_3, son iguales a cero (fig. 14.12), así como también la reacción de fuerza r_{3P} debida a la carga vertical $P = 1$:

$$\delta_{P3} = -r_{3P} = 0.$$

Para calcular las ordenadas de las flechas del primer tramo (el extremo izquierdo está articulado y el derecho, empotrado)

utilizamos las fórmulas (14.3):

$$\delta_{p1} = -r_{1p} = -r_b = -l_1 f_5(u); \quad \delta_{p2} = 0.$$

Para obtener las flechas del voladizo multiplicamos el valor de la derivada de la flecha del primer tramo, en la sección del apoyo izquierdo (para $z = 0$), por la coordenada de la sección. En el extremo del voladizo izquierdo tenemos:

$$\delta_{p1} = \frac{d}{dz} - [l_1 f_5(u)](-l_k) =$$

$$= l_k l_1 \frac{d}{du}\left[\frac{u}{2}(1-u^2)\right]\frac{du}{dz}_{\text{para } z=0} = \frac{1}{2} l_k = 1{,}5.$$

Componemos las ecuaciones para las flechas del segundo tramo (ambos extremos están empotrados) por las fórmulas (14.2):

$$\delta_{p1} = -r_{1p} = -r_a = l_2 f_3(u);$$
$$\delta_{p2} = -r_{2p} = -r_b = -l_2 f_4(u);$$

para las flechas del tercer tramo (el extremo izquierdo está empotrado y el derecho, articulado), por las fórmulas (14.4):

$$\delta_{p1} = 0; \quad \delta_{p2} = -r_{2p} = -r_a = l_3 f_6(u).$$

Por las ecuaciones compuestas por medio de la tabla 14.1, al principio, calculamos las ordenadas del diagrama de las flechas δ_{p1} y δ_{p2}. Por ejemplo, las flechas del segundo tramo serán: para $u = 0{,}2$

$$\delta_{p1} = l_2 f_3(u) = 16 \cdot 0{,}128 = 2{,}048;$$
$$\delta_{p2} = -l_2 f_4(u) = -16 \cdot 0{,}032 = -0{,}512;$$

para $u = 0{,}4$

$$\delta_{p1} = 16 \cdot 0{,}144 = 2{,}304;$$
$$\delta_{p2} = -16 \cdot 0{,}096 = -1{,}536, \text{ etc.}$$

Luego, por las fórmulas (14.6), para nuestro ejemplo

$$Z_1 = -\beta_{11}\delta_{p1} - \beta_{12}\delta_{p2}; \quad Z_2 = -\beta_{21}\delta_{p1} - \beta_{22}\delta_{p2};$$
$$Z_3 = -\beta_{31}\delta_{p1} - \beta_{32}\delta_{p2},$$

calculamos las ordenadas de las líneas de influencia de las incógnitas. Por ejemplo, en cuanto al segundo tramo:
para $u = 0{,}2$

$$Z_1 = 0{,}1134 \cdot 2{,}048 + 0{,}0199 \cdot 0{,}512 = 0{,}2423;$$
$$Z_2 = 0{,}0199 \cdot 2{,}048 - 0{,}1134 \cdot 0{,}512 = -0{,}0989;$$
$$Z_3 = 0{,}0561\,(2{,}048 - 0{,}512) = 0{,}086;$$

para $u = 0{,}4$

$$Z_1 = 0{,}1134 \cdot 2{,}304 + 0{,}0199 \cdot 1{,}536 = 0{,}2919;$$
$$Z_2 = -0{,}0199 \cdot 2{,}304 - 0{,}1134 \cdot 1{,}536 = -0{,}2201;$$
$$Z_3 = 0{,}0561\,(2{,}304 - 1{,}536) = 0{,}043, \text{ etc.}$$

Estos cálculos se dan en la tabla 14.5.

Teniendo incógnitas, pasamos al cálculo de las ordenadas de las líneas de influencia de M y Q, en la sección dada, por las fórmulas (14.7). Comenzaremos por el momento flector. Para la l. i. de M_C^0 utilizamos la fórmula (14.9). Colocando en ella $a = 9{,}4$ m y $l_2 = 16$ m, obtenemos la expresión

$$M_C^0 = M_C^{\text{vig}} - 0{,}4\delta_{P1} + 0{,}6\delta_{P2},$$

que válida solamente para el segundo tramo, donde se encuentra la sección C. Cuando el peso está a la izquierda de ésta, $M_C^{\text{vig}} = (l_2 - a)\,u$, cuando está a la derecha, $M_C^{\text{vig}} = a\,(1 - u)$.

La ordenada de la l. i. de M_C^0, por ejemplo, es igual a: para $u = 0{,}2$

$$M_C^0 = (16 - 9{,}6)\,0{,}2 - 0{,}4 \cdot 2{,}048 - 0{,}6 \cdot 0{,}512 = 0{,}155;$$

para $u = 0{,}4$

$$M_C^0 = (16 - 9{,}6)\,0{,}4 - 0{,}4 \cdot 2{,}304 - 0{,}6 \cdot 1{,}536 = 0{,}716, \text{ etc.}$$

El cálculo de las ordenadas restantes de M_C^0 se expone en la tabla 14.5.

Prosiguiendo, para la sección C, hallamos los valores $\bar{M}_{C1} = 0{,}5$; $\bar{M}_{C2} = -2{,}0$ y $\bar{M}_{C3} = 0$ por el diagrama de $\bar{M}$ (fig. 14.12) y por la fórmula (14.7), calculamos las ordenadas de la l. i. de M_C, expresadas por medio de las incógnitas. Pero estas ordenadas se pueden determinar sin el cálculo previo de las ordenadas de las líneas de influencia de las incógnitas. Para esto, en la fórmula (14.7) colocamos los valores de las incógnitas por la fórmula (14.6):

$$M_C = M_C^0 - \bar{M}_{C1}(\beta_{11}\delta_{P1} + \beta_{12}\delta_{P2}) - \bar{M}_{C2}(\beta_{21}\delta_{P1} + \beta_{22}\delta_{P2}),$$

calculamos los coeficientes numéricos de las flechas:

$$\bar{M}_{C1}\beta_{11} + \bar{M}_{C2}\beta_{21} = -0{,}5 \cdot 0{,}1134 - 2{,}0 \cdot 0{,}0199 = -0{,}0965;$$
$$\bar{M}_{C1}\beta_{12} + \bar{M}_{C2}\beta_{22} = 0{,}5 \cdot 0{,}0199 + 2{,}0 \cdot 0{,}1134 = 0{,}2367$$

y obtenemos la ecuación de las ordenadas de la l. i. de M_C en forma de:

$$M_C = M_C^0 + 0{,}0965\delta_{P1} - 0{,}2367\delta_{P2}.$$

Cálculo de las ordenadas

$u = \frac{z}{l}$	Voladizo	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,2
δ_{P1}	1,5	0	−0,960	−1,680	−1,920	−1,440	0	2,048
δ_{P2}							0	−0,512
+ $-\beta_{11}\delta_{P1} = 0,1134\delta_{P1}$	0,170	0	−0,109	−0,190	−0,218	−0,163	0	0,232
+ $-\beta_{22}\delta_{P2} = -0,0199\delta_{P2}$							0	0,010
Z_1	0,170	0	−0,109	−0,190	−0,218	0,163	0	0,242
+ $-\beta_{21}\delta_{P1} = -0,0199\delta_{P1}$	−0,030	0	0,019	0,033	0,038	−0,029	0	−0,041
+ $-\beta_{22}\delta_{P2} = 0,1134\delta_{P2}$							0	−0,058
Z_2	−0,030	0	0,019	0,033	0,038	0,029	0	−0,099
$Z_3 = 0,0561\,(\delta_{P1} + \delta_{P2})$	0,084	0	−0,054	−0,094	−0,107	−0,081	0	0,086
M_C^{vig}							0	1,280
+ $-0,4\delta_{P1}$							0	−0,818
$0,6\delta_{P2}$							0	−0,307
M_C^0							0	0,155
$+ 0,0965\delta_{P1}$	0,145	0	−0,093	−0,162	−0,186	−0,139	0	0,197
$-0,2367\delta_{P2}$							0	0,121
M_C	0,145	0	−0,093	−0,162	−0,186	−0,139	0	0,473
Q_C^{vig}							0	−0,200
+ $\frac{1}{16}\,(\delta_{P1} + \delta_{P2})$							0	0,096
Q_C^0							0	−0,104
+ $-0\,0438\,(\delta_{P1} + \delta_{P2})$	−0,066	0	0,042	0,073	0,084	0,063	0	−0,067
Q_C	−0,066	0	0,042	0,073	0,084	0,063	0	−0,171

Tabla 14.5

de las líneas de influencia

0,4	0,6	0,8	2,0	0,2	0,4	0,6	0,8	3,0
2,304	1,536	0,512	0					
—1,536	—2,304	—2,048	0	1,728	2,304	2,016	1,152	0
0,261	0,174	0,058						
0,031	0,046	0,041	0	—0 034	—0,046	—0,040	—0,023	0
0,292	0,220	0,099	0	—0,034	—0,046	—0,040	—0,023	0
—0,046	—0,031	—0,010	0					
—0,174	—0,261	—0,232	0	0,196	0,261	0,229	0,131	0
—0,220	—0,292	—0,242	0	0,196	0,261	0,229	0,131	0
0,043	—0,043	—0,086	0	0,097	0,129	0,113	0,064	0
2,560	3,840	1,920	0					
—0,922	—0,614	—0,205	0					
—0,922	—1,384	—1,229	0					
0,716	1,842	0,486	0					
0,223	0,148	0,049	0					
0,363	0,546	0,484	0	—0,409	—0,546	—0,477	—0,272	0
1,302	2,536	1,019	0	—0,409	—0,546	—0,477	—0,272	0
—0,400	−0,600 / 0,400	0,200	0					
—0,048	—0,048	—0,096	0					
—0,352	−0,648 / 0,352	0,104	0					
—0,033	0,033	0,067	0	—0,076	—0,099	—0,088	—0,051	0
—0,385	−0,615 / 0,385	0,171	0	—0,076	—0,099	—0,088	—0,051	0

Por ejemplo, para el primer tramo ($M_C^0 = 0$ y $\delta_{P1} = 0$); para $u = 0{,}2$.

$$M_C = -0{,}0965 \cdot 0{,}960 = -0{,}0926;$$

para $u = 0{,}4$

$$M_C = -0{,}0965 \cdot 1{,}68 = -0{,}1623, \text{ etc.};$$

para el segundo tramo:
en la sección $u = 0{,}2$

$$M_C = 0{,}155 + 0{,}0965 \cdot 2{,}048 + 0{,}2367 \cdot 0{,}512 = 0{,}473;$$

en la sección $u = 0{,}4$

$$M_C = 0{,}716 + 0{,}0965 \cdot 2{,}304 + 0{,}2367 \cdot 1{,}536 = 1{,}302, \text{ etc.}$$

Calculadas de tal modo, las ordenadas de la l. i. de M_C se dan en la tabla 14.5.

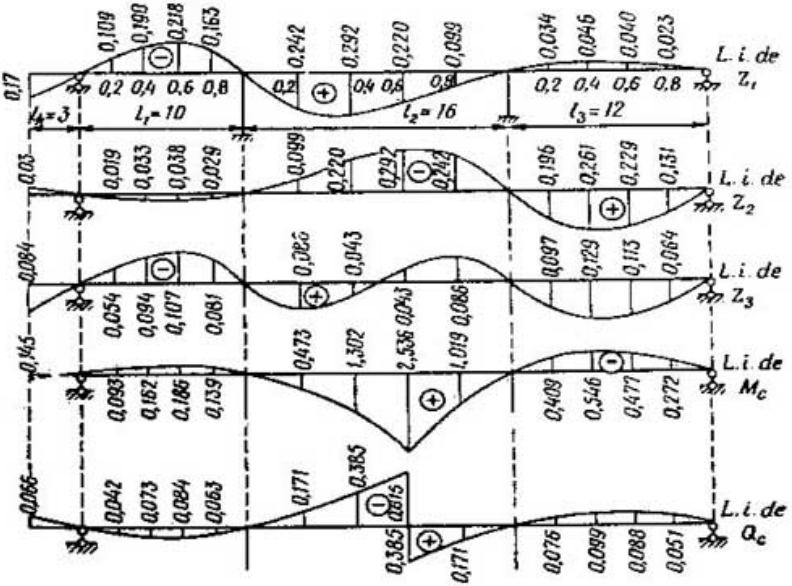


Fig. 14.13

Por la fórmula (14.7) calculamos análogamente las ordenadas de la l. i. de Q_C. Al principio, para el segundo tramo, allí donde se encuentra la sección C, por la fórmula (14.9) determinamos que

$$Q_C^0 = Q_C^{\text{viga}} + \frac{\delta_{P1} + \delta_{P2}}{l}.$$

Cuando el peso está a la izquierda,

$$Q_C^{\text{vig}} = V_a^{\text{vig}} - 1 = \frac{l_2 - z}{l_2} - 1 = -u.$$

Cuando el peso está a la derecha

$$Q_C^{\text{vig}} = V_a^{\text{vig}} = \frac{l_2 - z}{l_2} = 1 - u.$$

El cálculo de las ordenadas de Q_C^0 se explica por la tabla 14.5. Después, por medio de las fórmulas (14.6) y (14.7), expresamos Q_C en función de las flechas:

$$Q_C = Q_C^0 - (\beta_{11}\delta_{P1} + \beta_{12}\delta_{P2})\,\bar{Q}_{C1} - (\beta_{21}\delta_{P1} + \beta_{22}\delta_{P2})\,Q_C.$$

Por los diagramas de $\bar{M}$ (fig. 14.12) hallamos que

$$\bar{Q}_{C1} = \frac{d\bar{M}}{dz} = \frac{-2{,}5 - 5}{l_2} = -\frac{7{,}5}{16};$$

$$\bar{Q}_{C2} = \frac{-5 - 2{,}5}{16} = -\frac{7{,}5}{16}; \quad \bar{Q}_{C3} = 0$$

y calculamos los coeficientes de las flechas

$$\beta_{11}\bar{Q}_{C1} + \beta_{21}\bar{Q}_{C2} = (0{,}1134 - 0{,}0119)\,\frac{7{,}5}{16} = 0{,}0438 = \beta_{12}\bar{Q}_{C1} + \beta_{22}\bar{Q}_{C2}.$$

Gracias a que los coeficientes de δ_{P1} y δ_{P2} resultaron iguales, obtenemos la ecuación simple

$$\text{l. i. de } Q_C = Q_C^0 - 0{,}0438\,(\delta_{P1} + \delta_{P2}),$$

por la que hallamos las ordenadas de la l. i. de Q_C (tabla 14.5). Por ejemplo, en la sección $u = 0{,}2$ del segundo tramo

$$Q_C = -0{,}104 - 0{,}0438\,(2{,}048 - 0{,}512) = -0{,}171, \text{ etc.}$$

En la fig. 14.13 fueron construidas la líneas de influencia por las ordenadas halladas.

CAPÍTULO 15 * CALCULO DE SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS POR LOS METODOS MIXTO Y COMBINADO

§ 15.1. METODO MIXTO (de A. A. GVOZDIEV). Se llama método mixto de cálculo de los sistemas hiperestáticos a un método, cuando una parte de las incógnitas representa las reacciones X_i en los vínculos eliminados y la otra, los desplazamientos Z_i de los vínculos agregados. El sistema básico se forma eliminando vínculos, así como en el método de fuerzas, en aquella parte del sistema que se puede calcular con más facilidad por el método de fuerzas y, agregando vínculos, así como en el método de

desplazamientos, en aquella, que se puede calcular con más facilidad por el método de desplazamientos.

El método mixto posee ecuaciones canónicas de dos tipos: las del método de fuerzas, el número de las cuales es igual a la cantidad de vínculos eliminados y las del método de desplazamientos, el número de las cuales es igual a la cantidad de vínculos agregados. Las ecuaciones de ambos tipos contienen, simultáneamente, las incógnitas X_i y Z_i. En la forma general, el sistema de ecuacionese canónicas es:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \dot{\delta}_{1i}Z_i + \ldots + \dot{\delta}_{1n}Z_n + \Delta_{1P} = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\dot{r}_{n1}X_1 + \dot{r}_{n2}X_2 + \ldots + r_{ni}Z_i + \ldots + r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0.$$

Las ecuaciones canónicas del método de fuerzas contienen dos tipos de desplazamientos unitarios: los δ_{ik}, debidos a las fuerzas unitarias aplicadas por la dirección de los vínculos eliminados, y los $\dot{\delta}_{ik}$, debidos a los desplazamientos unitarios de los vínculos agregados. Las ecuaciones canónicas del método de desplazamientos contienen dos tipos de reacciones: las reacciones en los vínculos agregados, debidas a los desplazamientos unitarios de los vínculos agregados r_{ik} y las reacciones en los vínculos agregados, debidas a las fuerzas unitarias aplicadas por la dirección de los vínculos eliminados, $\dot{r}_{ik}$.

Los desplazamientos δ_{ik} y las reacciones r_{ik} se determinan por las reglas habituales, aceptadas en los métodos de fuerzas y de desplazamientos. Las reacciones $\dot{r}_{ik}$ pueden ser determinadas de las condiciones de equilibrio, igual que en el método de desplazamientos. Los desplazamientos $\dot{\delta}_{ik}$ se determinan por consideraciones geométricas o sobre la base de los teoremas de reciprocidad $\dot{\delta}_{ik} = -r_{ki}$.

Los términos de carga Δ_{iP} y R_{iP} se determinan igual que en los métodos de fuerzas y de desplazamientos.

El diagrama de momentos, en el sistema dado, se construye sobre la base de la siguiente expresión:

$$M = \bar{M}_1X_1 + \bar{M}_2X_2 + \ldots + \bar{M}_iZ_i + \ldots + \bar{M}_nZ_n + M_P.$$

El cálculo de las magnitudes de los desplazamientos δ_{ik} y las reacciones r_{ik}, en el caso de barras rectas, se controla multiplicando por sí mismos los diagramas unitarios sumantes de los momentos flectores construidos por separado para las incógnitas del método de fuerzas y de desplazamientos que integran las ecuaciones canónicas del método mixto.

El cálculo de las magnitudes de los desplazamientos $\dot{\delta}_{ik}$ y de las reacciones $\dot{r}_{ik}$ no puede ser verificada con la multiplicación de los diagramas y, por eso, es indispensable determinar $\dot{\delta}_{ik}$ partiendo de las consideraciones geométricas, y verificarlas por el teorema de la reciprocidad.

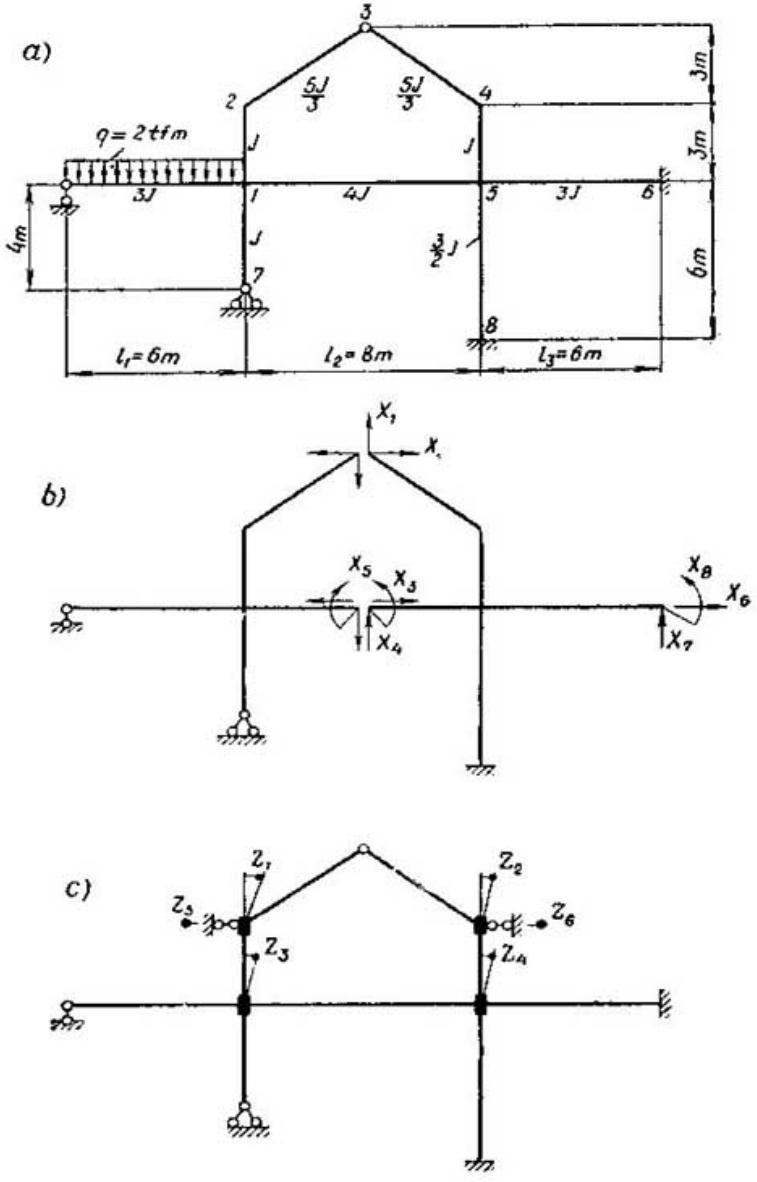

a)
3
2
5J/3
5J/3
4
3m
q = 2tf/m
J
J
3m
3J
1
4J
5
3J
6
4m
J
3/2 J
6m
7
8
l1 = 6m
l2 = 8m
l3 = 6m
b)
X1
X2
X5
X3
X8
X6
X4
X7
c)
Z1
Z2
Z5
Z6
Z3
Z4

Fig. 15.1

El diagrama de los momentos flectores, en el sistema dado, puede ser verificado multiplicándolo por el diagrama unitario sumante de los momentos de cualquier sistema básico del método de fuerzas. El resultado de la multiplicación, en el caso de cálculo a la carga, deberá ser igual a cero.

En general, criterio de cálculo correcto son: la ausencia de desplazamientos en la dirección de las reacciones incógnitas X_i y la igualdad a cero de las reacciones en los lugares de aplicación de los desplazamientos incógnitos Z_i.

Ejemplo 15.1. Construir el diagrama de los momentos flectores para el pórtico representado en la fig. 15.1*a*.

Resolución

El sistema a examinar, al ser calculado por el método de fuerzas, es ocho veces hiperestático. El grado de movilidad de los nudos, en el caso de un cálculo por el método de desplazamientos, es igual a seis. El examen de los sistemas básicos de los métodos de fuerzas y desplazamientos (fig. 15.1*b*, *c*) da posibilidad de ver que el contorno inferior encierra 6 incógnitas del método de fuerzas y el superior, solamente dos. El sistema básico del método de desplazamientos, en el contorno inferior, tiene dos incógnitas y, en el superior, cuatro. Durante el propio cálculo de este pórtico por el método combinado es racional tomar un sistema básico de manera que en el contorno superior sean tomadas las incógnitas del método de fuerzas y, en el inferior, las del método de desplazamientos (fig. 15.2*a*).

En la forma general, el sistema de ecuaciones canónicas del método mixto, para el pórtico dado, será:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dot{\delta}_{13}Z_3 + \dot{\delta}_{14}Z_4 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dot{\delta}_{23}Z_3 + \dot{\delta}_{24}Z_4 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\dot{r}_{31}X_1 + \dot{r}_{32}X_2 + r_{33}Z_3 + r_{34}Z_4 + R_{3P} = 0;$$

$$\dot{r}_{41}X_1 + \dot{r}_{42}X_2 + r_{43}Z_3 + r_{44}Z_4 + R_{4P} = 0.$$

Las ecuaciones primera y segunda (ecuaciones de desplazamientos) expresan condiciones, por las cuales la suma de los desplazamientos en las direcciones de X_1 y X_2, debidos a la acción de X_1, X_2, Z_3, Z_4 y de la carga, es igual a cero, por cuanto en el sistema dado tales desplazamientos son imposibles. Las ecuaciones tercera y cuarta (ecuaciones de las reacciones) expresan condiciones, por las cuales las reacciones en los vínculos agregados debidas a la acción de X_1, X_2, Z_3, Z_4 y de la carga, son iguales a cero, dado que, en realidad, tales vínculos no existen.

Para la determinación de los desplazamientos unitarios y de carga y de las reacciones se construyeron los diagramas unitarios y de carga de los momentos flectores en el sistema básico (fig. 15.2*b*—*f*).

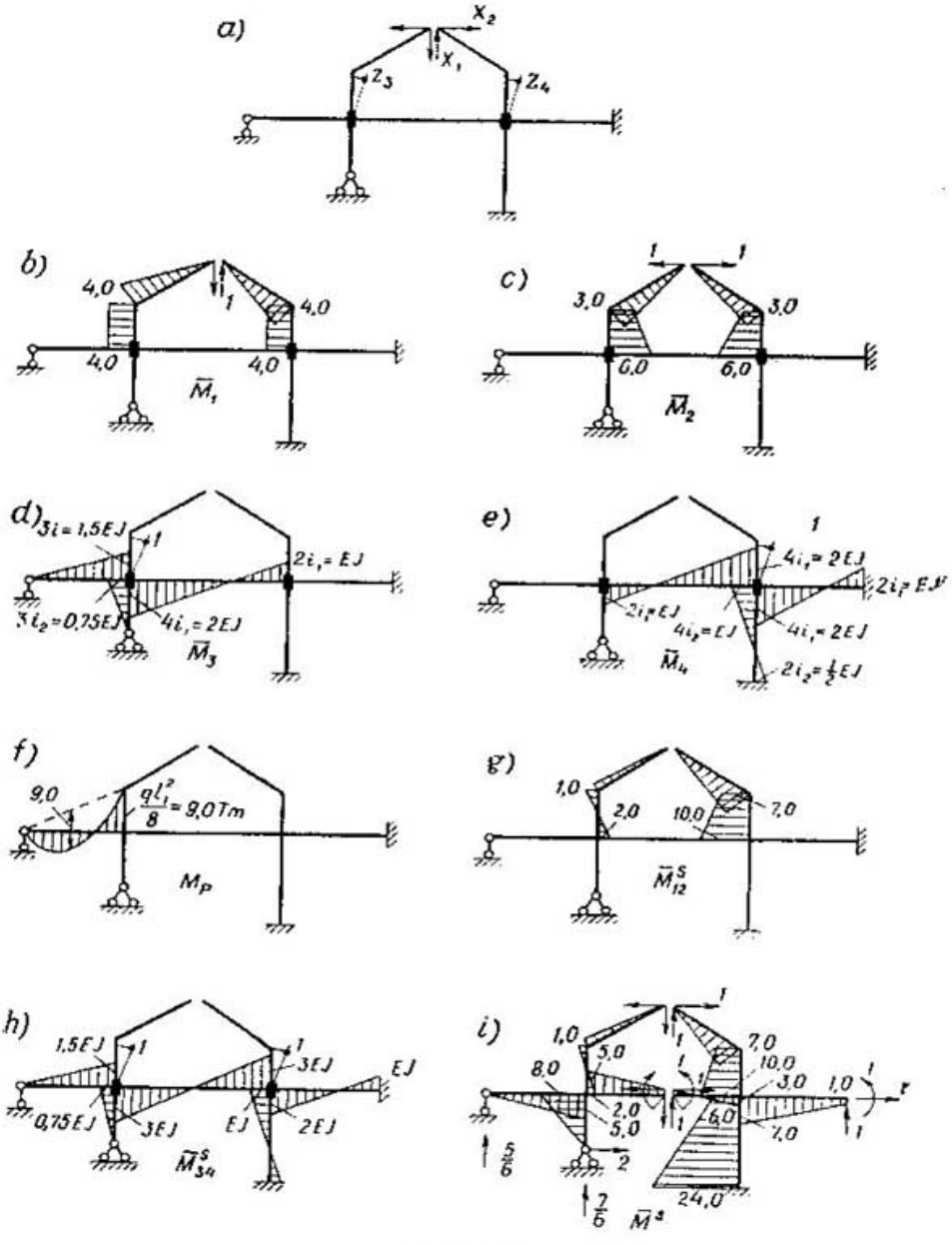

a)
X_2
X_1
Z_3
Z_4
b)
4,0
1
4,0
4,0
4,0
$\bar{M}_1$
c)
1
1
3,0
3,0
6,0
6,0
$\bar{M}_2$
d)
$3i = 1,5EJ$
1
$2i_1 = EJ$
$3i_2 = 0,75EJ$
$4i_1 = 2EJ$
$\bar{M}_3$
e)
1
$4i_1 = 2EJ$
$2i_1 = EJ$
$2i_1 = EJ$
$4i_2 = EJ$
$4i_1 = 2EJ$
$\bar{M}_4$
$2i_2 = \frac{1}{2}EJ$
f)
9,0
$\frac{ql_1^2}{8} = 9,0Tm$
M_P
g)
1,0
2,0
10,0
7,0
$\bar{M}_{12}^S$
h)
1,5EJ
1
1
3EJ
EJ
0,75EJ
3EJ
EJ
2EJ
$\bar{M}_{34}^S$
i)
1
1,0
5,0
8,0
2,0
5,0
1
1
1
7,0
10,0
3,0
1,0
1
1
6,0
7,0
1
$\frac{5}{6}$
2
$\frac{7}{6}$
24,0
$\bar{M}^s$

Fig. 15.2

Los desplazamientos δ_{11}, δ_{12} y δ_{22} se determinan por la multiplicación de los respectivos diagramas de los momentos flectores

$$EJ\delta_{11} = 2\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}5\cdot 4\frac{2}{3}4 + 4\cdot 3\cdot 4\right) = 128;$$

$$EJ\delta_{22} = 144;$$

$$EJ\delta_{12} = EJ\delta_{21} = 0.$$

Las reacciones r_{33}, r_{44}, r_{34} y también las $\dot{r}_{31}$, $\dot{r}_{41}$, $\dot{r}_{32}$ y $\dot{r}_{42}$ se determinaron del examen del equilibrio de los respectivos nudos:

$$r_{33} = \frac{3EJ}{2} + \frac{3EJ}{4} + 2EJ = 4{,}25EJ;$$

$$r_{44} = 5EJ; \quad r_{34} = r_{43} = EJ;$$

$$\dot{r}_{31} = -4; \quad \dot{r}_{41} = -4; \quad \dot{r}_{32} = 6; \quad \dot{r}_{42} = -6.$$

Los desplazamientos $\dot{\delta}_{13}$, $\dot{\delta}_{14}$, $\dot{\delta}_{23}$ y $\dot{\delta}_{24}$ se determinaron por el teorema de reciprocidad ($\dot{\delta}_{ik} = -r_{ki}$):

$$\dot{\delta}_{13} = 4; \quad \dot{\delta}_{14} = 4;$$

$$\dot{\delta}_{23} = -6; \quad \dot{\delta}_{24} = 6.$$

Los mismos valores de estos desplazamientos también se obtienen de consideraciones geométricas.

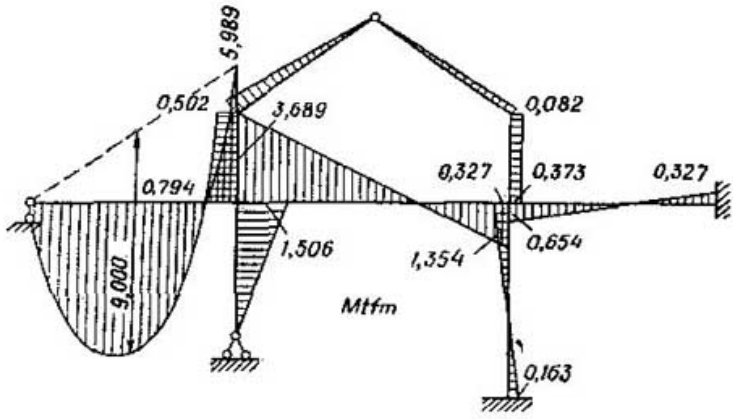


Fig. 15.3

Los desplazamientos de carga y las reacciones son iguales a: $\Delta_{1P} = 0$; $\Delta_{2P} = 0$; $R_{3P} = 9{,}0$ tfm; $R_{4P} = 0$.

El cálculo de los valores de los desplazamientos y las reacciones unitarios se verifica multiplicando los diagramas unitarios sumantes de los momentos flectores (fig. 15.2*g*, *h*). La verificación no se da.

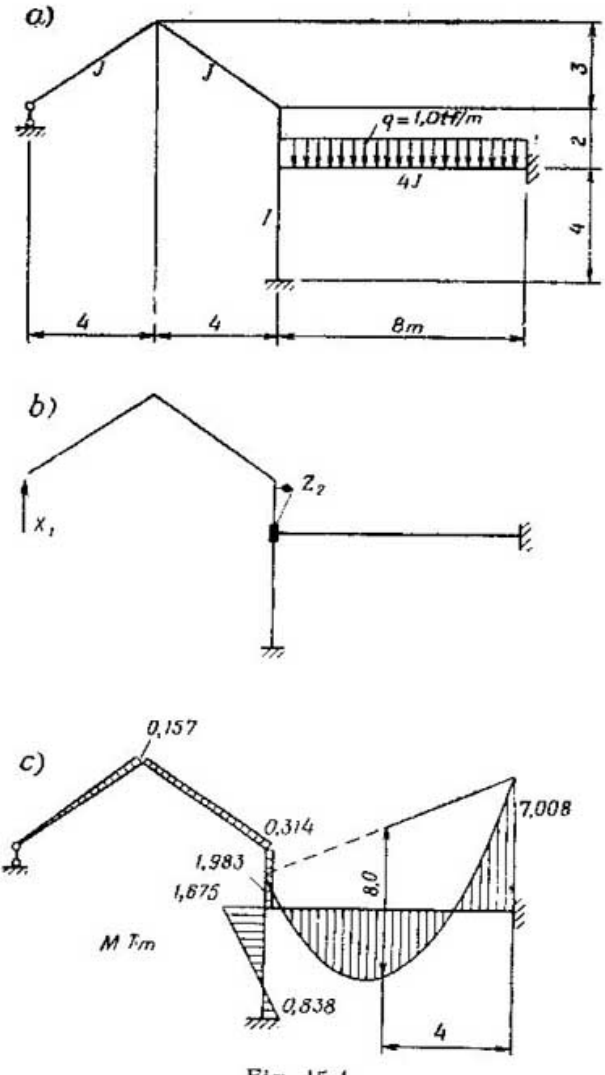


Fig. 15.4

El sistema de ecuaciones canónicas en forma numérica se escribe así:

$$\frac{128,0}{EJ} X_1 + 0,0X_2 + 4,0Z_3 + 4,0Z_4 = 0;$$

$$0,0X_1 + \frac{144,0}{EJ} X_2 + (-6,0) Z_3 + 6,0Z_4 = 0;$$

$$(-4,0) X_1 + 6,0X_2 + 4,25EJZ_3 + EJZ_4 + 9,0 = 0;$$

$$(-4,0) X_1 + (-6,0) X_2 + EJZ_3 + 5,0EJZ_4 = 0.$$

Es cómodo resolver este sistema adoptando el algoritmo reducido de Gauss.

Es indispensable cambiar los signos de todos los sumandos en las ecuaciones primera y segunda o tercera y cuarta, para que los coeficientes ubicados simétricamente con respecto a la diagonal principal sean iguales.

La resolución del sistema de ecuaciones por Gauss da los siguientes valores de las incógnitas (la resolución detallada ha sido omitida):

$$X_1 = 0{,}05253 \text{ tf}; \quad X_2 = -0{,}09728 \text{ tf};$$

$$Z_3 = -2{,}200775 \frac{1}{EJ}; \quad Z_4 = 0{,}32683 \frac{1}{EJ}.$$

La sustitución de las incógnitas por los valores obtenidos en las ecuaciones iniciales da identidades, lo cual atestigua que la resolución del sistema de ecuaciones es correcta.

El diagrama de los momentos flectores en el sistema dado (fig. 15.3) se construyó por la expresión

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 Z_3 + \bar{M}_4 Z_4 + M_P.$$

Todos los nudos del pórtico se encuentran en equilibrio y

$$\sum \int \frac{\bar{M}_S M}{EJ} ds = 0.$$

Aquí, $\bar{M}_S$ es el momento unitario sumante en cualquier sistema básico del método de fuerzas (el diagrama de $\bar{M}_S$ se da en la fig. 15.2*i*).

Problema 15.2. Construir el diagrama de momentos del pórtico representado en la fig. 15.4*a*.

Indicación. Conviene examinar los sistemas básicos de los métodos de fuerzas y desplazamientos y también del método mixto. Luego de cerciorarnos de que de todos los sistemas básicos examinados, el del método mixto contiene el menor número de incógnitas, se los aplica para la resolución del pórtico.

Como respuesta, en la fig. 15.4*b*, *c* se dan el sistema básico del método mixto y el diagrama de los momentos flectores en el sistema dado.

§ 15.2. EL METODO COMBINADO (APLICABLE AL CALCULO DE PORTICOS SIMETRICOS). En los sistemas simétricos, la carga siempre puede ser descompuesta en simétrica y antisimétrica. El método de cálculo combinado de los sistemas simétricos consiste en aplicar por separado los métodos de fuerzas y desplazamientos para el cálculo de los pórticos a esta clase de cargas.

El cálculo a la carga simétrica se efectúa por el método de desplazamientos y a la antisimétrica, por el de fuerzas. La cantidad total de incógnitas en el método combinado es comúnmente

menor que la cantidad de incógnitas que se obtienen al calcular el sistema únicamente por el método de fuerzas o por el de desplazamientos, así como por el método mixto.

Durante el cálculo por el método combinado se conservan todas las particularidades y métodos de control que son propios a los métodos de fuerzas y desplazamientos.

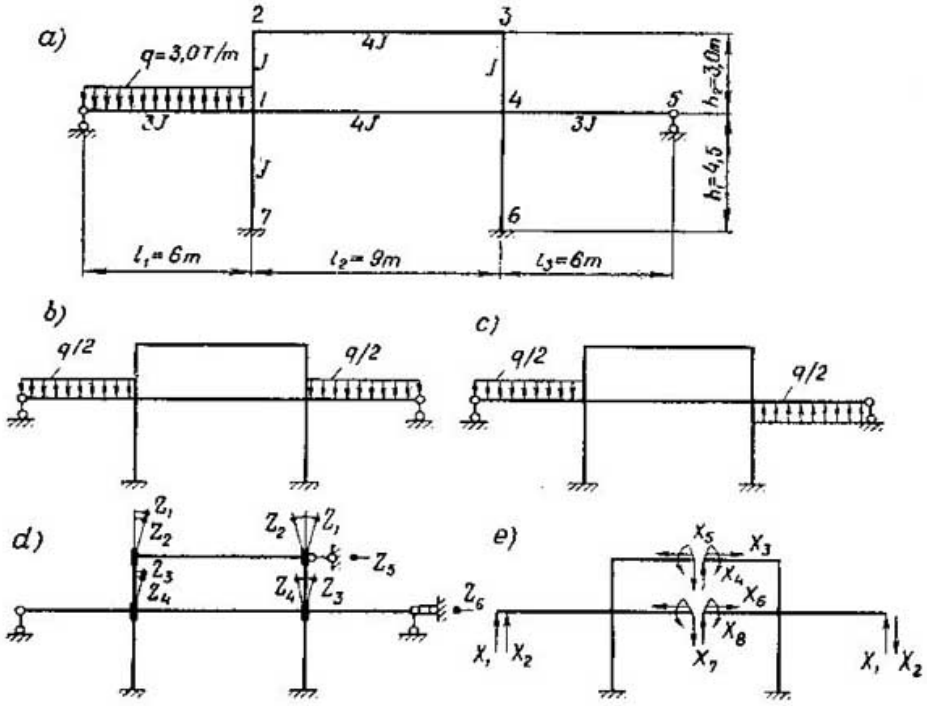


Fig. 15.5

Ejemplo 15.3. Se exige construir el diagrama de los momentos flectores para un pórtico simétrico (fig. 15.5*a*).

Resolución

El pórtico a examinar es simétrico con respecto al eje vertical, que pasa por los centros de las vigas de estructura. La descomposición de la carga en simétrica y antisimétrica se muestra en la fig. 15.5*b*, *c*.

Al calcular el sistema dado por el método de desplazamientos, el número de incógnitas, en el caso general, será igual a seis (v. el sistema básico del método de desplazamientos, fig. 15.5*d*). Si la

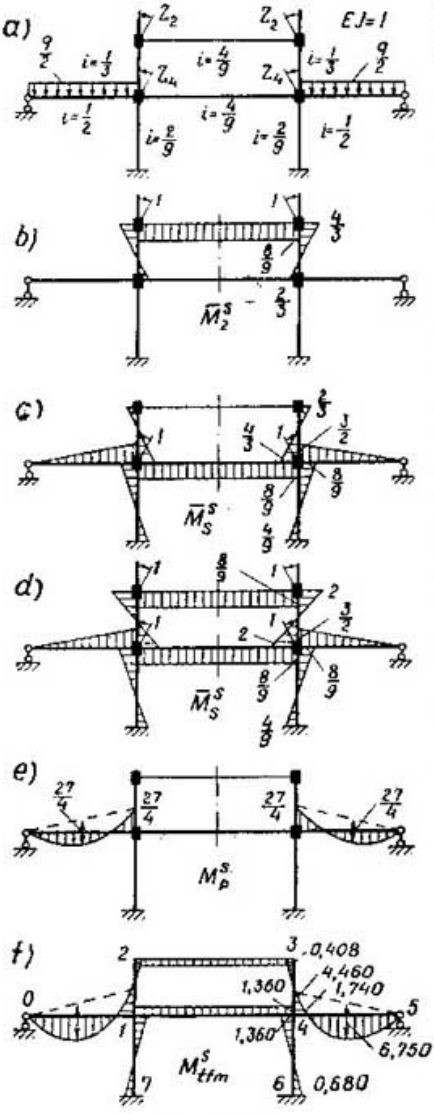


Fig. 15.6

carga es solamente simétrica, las incógnitas antisimétricas se convierten en cero y el número de incógnitas será igual a dos (las Z_2 y Z_4).

Al calcular por el método de fuerzas, el número de incógnitas será igual a ocho (véase el sistema básico del método de fuerzas, fig. 15.5*e*). En el caso de carga antisimétrica todas las incógnitas simétricas se convierten en cero y el número de incógnitas será igual a tres (las X_2, X_4 y X_7).

El número total de incógnitas, por el método mixto, es igual a seis para la carga simétrica y a tres, para la antisimétrica.

De tal modo, el cálculo del sistema dado a la carga simétrica se efectúa, de manera más fácil, por el método de desplazamientos y, a la carga antisimétrica por el de fuerzas.

Cálculo a la carga simétrica. Para este caso, el sistema básico se da en la fig. 15.6*a*. El sistema de ecuaciones canónicas, en la forma general, será:

$$r_{22}Z_2 + r_{24}Z_4 + R_{2P} = 0;$$

$$r_{42}Z_2 + r_{44}Z_4 + R_{4P} = 0.$$

En la fig. 15.6*b*, *c* y *e* se dan los diagramas de los momentos flectores debidos a los desplazamientos pares y a la carga. La determinación de las reacciones unitarias y de carga de los momentos flectores y examinando el equilibrio de los nudos. Si tomamos que $EJ = 1$, obtenemos los siguientes valores de las reacciones:

$$r_{22} = \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{8}{9} + \frac{4}{3} = \frac{40}{9}; \quad r_{44} = \frac{83}{9};$$

$$r_{24} = r_{42} = \frac{4}{3}; \quad R_{2P} = 0; \quad R_{4P} = \frac{27}{2}.$$

El sistema de ecuaciones en forma numérica es:

$$\frac{40}{9} Z_2 + \frac{4}{3} Z_4 = 0;$$

$$\frac{4}{3} Z_2 + \frac{83}{9} Z_4 + \frac{27}{2} = 0.$$

Resolviendo el sistema, vamos a tener que $Z_2 = 0{,}46$ y $Z_4 = -1{,}53$.

La solución del sistema de ecuaciones se deberá verificar sustituyendo las incógnitas de las ecuaciones iniciales por sus valores hallados y transformando a éstas en identidades.

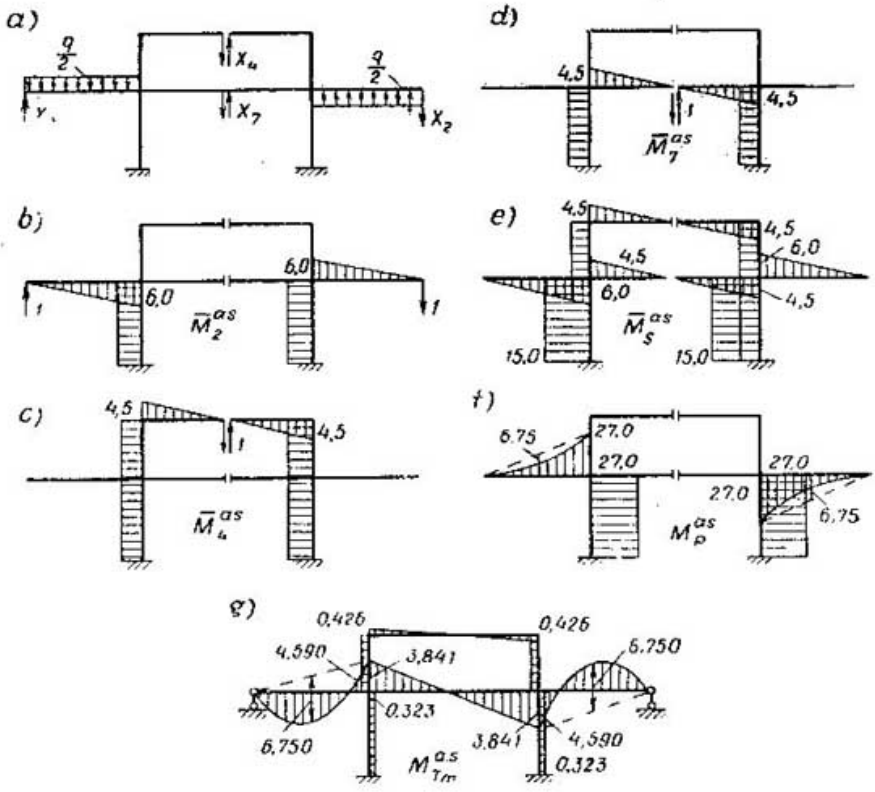


Fig. 15.7

El diagrama de los momentos flectores en el sistema dado, debido a la acción de la carga simétrica, se construyó por la expresión $M^s = \overline{M}_2^s Z_2 + \overline{M}_4^s Z_4 + M_P^s$ y se da en la fig. 15.6*f*. El equilibrio de los nudos del pórtico atestigua que la construcción del diagrama es correcta. También es posible la verificación por la

expresión

$$\sum \int \frac{\overline{M}_S^s M^s}{EI}\, ds + \sum R_{kP} = 0$$

(el diagrama de $\overline{M}_S^s$ v. en la fig. 15.6*d*).

Cálculo a la carga antisimétrica. El sistema básico se da en la fig. 15.7*a*.

El sistema de ecuaciones canónicas en forma general se escribe así:

$$\delta_{22}X_2 + \delta_{24}X_4 + \delta_{27}X_7 + \Delta_{2P} = 0;$$
$$\delta_{42}X_2 + \delta_{44}X_4 + \delta_{47}X_7 + \Delta_{4P} = 0;$$
$$\delta_{72}X_2 + \delta_{74}X_4 + \delta_{77}X_7 + \Delta_{7P} = 0.$$

La determinación de los desplazamientos unitarios y de carga se efectuó multiplicando los diagramas unitarios y de carga de los momentos flectores (fig. 15.7*b*—*d*, *f*):

$$EJ\delta_{22} = 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}6{,}0\cdot 6{,}0\,\frac{2}{3}6{,}0 + 4{,}5\cdot 6{,}0\cdot 6{,}0\right) = 372{,}00;$$

$$EJ\delta_{44} = 318{,}00; \quad EJ\delta_{77} = 197{,}44;$$
$$EJ\delta_{24} = EJ\delta_{42} = 243{,}00;$$
$$EJ\delta_{27} = EJ\delta_{72} = 243{,}00;$$
$$EJ\delta_{47} = EJ\delta_{74} = 182{,}25;$$
$$EJ\Delta_{2P} = -1620{,}00;$$
$$EJ\Delta_{4P} = -1093{,}50;$$
$$EJ\Delta_{7P} = -1093{,}50.$$

El cálculo de los desplazamientos unitarios se verifica por la expresión

$$\sum \int \frac{\overline{M}_S^{as}\overline{M}_S^{as}}{EJ}\, ds = \delta_{ss} = \sum (\delta_{il} + 2\delta_{ik}),$$

y los de carga, por

$$\sum \int \frac{\overline{M}_S^{as} M_P^{as}}{EJ}\, ds = \Delta_{SP} = \sum \Delta_{iP}$$

(el diagrama de $\overline{M}_S^{as}$ véase en la fig. 15.7*e*).

El sistema de ecuaciones canónicas en forma numérica se escribe así:

$$372{,}00\,X_2 + 243{,}00\,X_4 + 243{,}00\,X_7 - 1620{,}00 = 0;$$
$$243{,}00\,X_2 + 318{,}94\,X_4 + 182{,}25\,X_7 - 1093{,}50 = 0;$$
$$243{,}00\,X_2 + 182{,}25\,X_4 + 197{,}44\,X_7 - 1093{,}50 = 0.$$

Es racional efectuar la resolución del sistema de ecuaciones por el algoritmo reducido de Gauss o por medio de determinantes.

La resolución detallada, efectuada por medio de determinantes, no se expone.

Los valores de las incógnitas serán: $X_2 = 3{,}73510$ tf; $X_4 = -0{,}09485$ tf; $X_7 = 0{,}85364$ tf.

La sustitución de los valores hallados de las incógnitas en las ecuaciones iniciales las convierten en identidades, lo que atestigua que la solución del sistema de ecuaciones es correcta.

El diagrama de los momentos flectores debidos a la carga antisimétrica, construido por la expresión $M^{as} = \overline{M}_2^{as} X_2 + \overline{M}_4^{as} X_4 + \overline{M}_7^{as} X_7 + M_P^{as}$, se da en la fig. 15.7g.

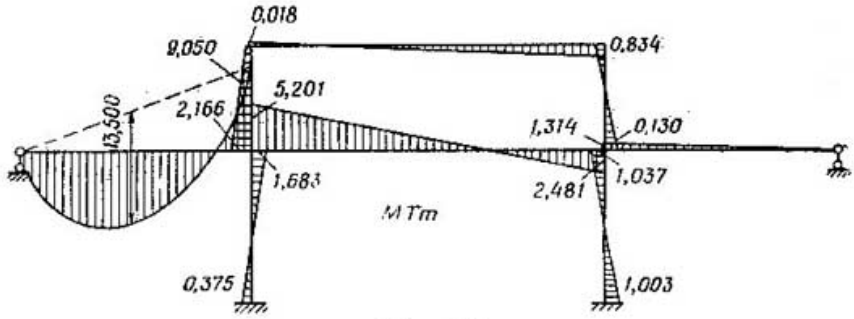


Fig. 15.8

La verificación de este diagrama se efectuó por el procedimiento utilizado en el método de fuerzas $\sum \int \frac{\overline{M}_S^{as} M_S^{as}}{EI} ds = 0$. Por el diagrama se ve también que todos los nudos del pórtico se hallan en equilibrio.

El diagrama de los momentos flectores en el sistema dado (fig. 15.8) se obtiene con la suma de M^s y M^{as}.

CAPITULO 16 * CALCULO DE PORTICOS PLANOS POR EL METODO DE DISTRIBUCION DE MOMENTOS (METODO DE G. KANI)

Los métodos de distribución se basan en que, después de haber determinado los momentos iniciales en el sistema básico y establecido que las condiciones de equilibrio o continuidad de las deformaciones no se cumplen, se efectúa la distribución de las fuerzas o deformaciones no equilibradas y su transmisión a los nudos contiguos. Esta distribución se cumple en un determinado

orden, con aproximaciones sucesivas, sin la composición y resolución de las ecuaciones, como norma.

Con el método de aproximaciones sucesivas (iteración) se pueden obtener resultados con el grado de exactitud que se desee. A los métodos iterativos se refieren los métodos de M. Bernadski, J. Kross, G. Kani, etc.

El método de G. Kani [1]) es más cómodo en el caso de un cálculo a la carga vertical y horizontal de pórticos de muchos pisos con nudos fijos y móviles, dado que da la posibilidad de controlar fácilmente la corrección del cálculo.

El objeto del cálculo estático de pórticos es la determinación de los momentos de apoyo, o sea, los momentos en los extremos de las barras. Si el momento de apoyo actúa en el sentido de las agujas del reloj, es considerado positivo. Adoptamos una regla análoga de signos para los momentos nodales y ángulos de giro.

Designamos los nudos del sistema de barras con 1, 2, ..., i, ..., k, ..., m, etc.

Al momento de apoyo de la barra i—k en el extremo i (o en el k) lo designamos por M_{ik} (o M_{ki}), donde la primera letra del subíndice indica el extremo de la barra al cual está aplicado el momento.

Los momentos de apoyo de la barra i-k originados por la carga dada, suponiendo que el empotramiento es completo en ambos extremos de la barra, se llaman *momentos de apoyo del empotramiento* y se designan con $\overline{M}_{ik}$ o $\overline{M}_{ki}$, $i = \frac{J}{l}$ es la rigidez lineal.

El cálculo de un pórtico se efectúa suponiendo una fijación completa de sus nudos contra el giro y desplazamiento (estado básico). De tal modo, cada barra del pórtico es examinada como viga empotrada en los dos extremos.

Las fuerzas y momentos externos ficticios, que impiden el giro y desplazamiento de los nudos, se llaman *fuerzas y momentos reactivos*. Después de la determinación de los momentos de apoyo del empotramiento en el estado básico, las fuerzas y momentos reactivos en cada nudo pueden ser calculados por la condición de equilibrio.

El momento reactivo $\overline{M}_i$ para el nudo i es igual a: $\overline{M}_i = \sum_{(i)} \overline{M}_{ik}$.

Si en el sistema examinado hay barras con un extremo articulado, entonces, después de la determinación de los momentos de apoyo del empotramiento, debidos a la carga ubicada en este extremo, la rigidez lineal de estas barras se toma igual a: $i' = \frac{3}{4} i$ (i es la rigidez lineal verdadera de la barra), y todo el cálculo consiguiente efectúa como para una barra común empotrada, y el

[1]) G. Kani. Cálculo de pórticos de muchos pisos. Traduc. del alemán. Gosstroyizdat, 1963.

momento definitivo de apoyo en la sección, donde en realidad hay una articulación, se toma igual a cero.

§ 16.1. CÁLCULO DE PÓRTICOS CON NUDOS FIJOS. Si los nudos de un pórtico no son fijados contra la rotación, entonces, al aplicar la carga externa, el nudo gira un determinado ángulo (el extremo i de la barra i-k, uno φ_i y, el extremo k, uno φ_k). La deformación de la barra debida a la carga y rotación de los extremos (fig. 16.1) puede representarse como la suma de tres estados, y el momento de apayo de la barra, como la suma de los momentos de apoyo en cada extremo de la barra, que corresponden a estos estados:

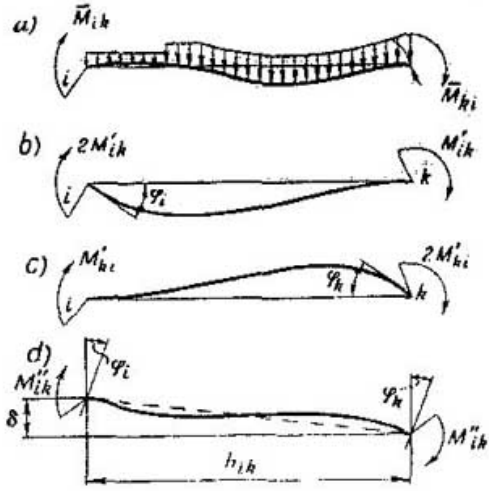


Fig. 16.1

1) a la deformación de la barra i-k, debida a la carga externa dada (fig. 16.1*a*), en el caso en que ambos extremos de la barra están empotrados y no tienen desplazamientos (corresponde a $\bar{M}_{ik}$);

2) a la deformación debida al giro del extremo i en el ángulo φ_i (fig. 16.1*b*), en el caso de empotramiento del extremo k contra el giro y ausencia de desplazamientos de ambos extremos (corresponde a $2M'_{ik}$);

3) a la deformación debida al giro del extremo k en el ángulo φ_k (fig. 16.1*c*), cuando el extremo i queda empotrado contra el giro y no hay desplazamiento de ambos extremos (corresponde a M'_{ki}).

Los extremos de las barras adyacentes al nudo examinado serán llamados adyacentes y, los otros extremos de estas barras, opuestos.

El momento de apoyo M_{ik} del extremo i de la barra i-k será:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki}.$$

Para cualquier nudo $\sum_{(i)} M_{ik} = 0$.

Por consiguiente,

$$\sum_{(i)} \bar{M}_{ik} + \sum_{(i)} 2M'_{ik} + \sum_{(i)} M'_{ki} = 0,$$

pero,

$$\overline{M}_i = \sum_{(i)} \overline{M}_{ik}; \quad \overline{M}_i + \sum_{(i)} M'_{ki} = -2 \sum_{(i)} M'_{ik},$$

donde $\overline{M}_i$ es el momento reactivo en el nudo i.

De tal modo, la suma del momento positivo $\overline{M}_i$ y de todos los momentos debidos al giro de los extremos opuestos de las barras $\sum_{(i)} M'_{ki}$ es igual a la suma de los momentos debidos a la rotación de los extremos adyacentes de las barras del nudo i.

Si la suma de los momentos que originan el giro de todas las barras del nudo es conocida, los momentos debidos a este giro, para la barra, pueden ser determinados por medio de una distribución de esta suma, proporcional a las rigideces lineales de las barras.

Para la determinación de M'_{ik} se aplica el método de aproximaciones sucesivas, suponiendo que en la primera aproximación los momentos M'_{ki}, por los extremos opuestos de las barras, son iguales a cero.

En adelante, se compone la suma del momento reactivo y de todas las mágnitudes aproximadas de los momentos debidos al giro de los extremos opuestos de las barras y se efectúa su distribución.

Los momentos debidos al giro se calculan por medio del coeficiente de giro μ_{ik}:

$$M'_{ik} = \mu_{ik}\left(\overline{M}_i + \sum_{(i)} M'_{ki}\right),$$

$$\text{donde } \mu_{ik} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{i_{ik}}{\sum_{(i)} i_{ik}}; \quad \sum_{(i)} \mu_{ik} = -\frac{1}{2} \text{ (control).}$$

La rigidez de las barras, uno de cuyos extremos tiene fijación articulada, en el caso de determinación de los coeficientes de giro, se toma multiplicada por el coeficiente $^3/_4$ (v. el anterior $i' = \frac{3}{4} i$).

Los valores definitivos de los momentos de apoyo pueden ser obtenidos como la suma de los momentos de apoyo del empotramiento $\overline{M}_{ik}$ y los momentos debidos al giro de los extremos adyacente y opuesto de las barras.

Para la barra i-k, en el nudo i,

$$M_{ik} = \overline{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki}.$$

§ 16.2. CÁLCULO DE PÓRTICOS, CUYOS NUDOS TIENEN DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL. Si durante la deformación de los nudos los extremos de las barras no sólo giran sino que se desplazan uno con respecto al otro, entonces, además de las partes componentes de la deformación y de sus respectivos momentos de apoyo en los extremos de la barra lo que fue expuesto anterior-

mente, se agrega la deformación originada por el desplazamiento de los extremos en la magnitud δ sin el giro complementario de las secciones de apoyo, y surge el respectivo momento de apoyo debido al desplazamiento M''_{ik} (fig. 16.1*d*).

De tal manera, el momento de apoyo completo del extremo i, para la barra ik, será:

$$M_{ik} = \overline{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ik} + M''_{ik}.$$

Para cada nudo $\sum_i M_{ik} = 0$.

Por consiguiente,

$$\sum_i \overline{M}_{ik} + 2\sum_i M'_{ik} + \sum_i M'_{ki} + \sum_i M''_{ik} = 0$$

o bien,

$$\overline{M}_i + \sum (M'_{ki} + M''_{ik}) = -2\sum_i M'_{ik}.$$

Los momentos de apoyo debidos al giro y desplazamiento se calculan igualmente, por medio de los coeficientes de giro:

$$M'_{ik} = \mu_{ik}\left[\overline{M}_i + \sum_i (M'_{ki} + M''_{ik})\right].$$

Los momentos debidos al desplazamiento se determinan sobre la base de que la suma de todas las fuerzas transversales del piso es $\sum_r Q_{ik} = 0$ (para la carga vertical) y de que, en el caso de haber carga horizontal, $\sum_r Q_{ik} = \sum_{i=1}^{(r)} H_i$, donde $\sum_{i=1}^{(r)} H_i$ es la suma de todas las fuerzas horizontales que están aplicadas a los nudos situados más arriba del piso r.

En el caso de carga horizontal a la expresión $Q_r = \sum_{i=1}^{(r)} \overline{H}_i \left(\sum_{i=1}^{(r)} \overline{H}_i\right.$ es la suma de todas las fuerzas reactivas, aplicadas al piso superior) la vamos a llamar fuerza transversal del piso.

En el caso de carga vertical, los momentos debidos al desplazamiento son:

$$M''_{ik} = \nu_{ik}\left[\sum_{(r)} c_{ik}(M'_{ik} + M'_{ki})\right].$$

En el caso de carga horizontal,

$$M''_{ik} = \nu_{ik}\left[\overline{M}_r + \sum_{(r)} c_{ik}(M'_{ik} + M'_{ki})\right],$$

donde $c_{ik} = \frac{h_r}{h_{ik}}$ es el coeficiente de paso del pie o pilar;

h_r, la altura del piso (lo más frecuente, es la altura de los pilares, que se encuentran en el piso);

h_{ik}, la altura del pilar dado; y

$\overline{M}_r = \frac{Q_r h_r}{3}$, el momento de piso debido a las fuerzas horizontales.

El coeficiente de desplazamiento es $\nu_{ik} = -\frac{\frac{3}{2} c_{ik} i_{ik}}{\sum_r m c_{ik}^2 i_{ik}}$.

Si los pilares tienen sus extremos, uno con el apoyo articulado y el otro empotrado, entonces, $m = \frac{3}{4}$, la altura h_{ik} se toma con el coeficiente $\frac{3}{2}$ e i_{ik} con el $\frac{3}{4}$.

Para los pilares con los dos extremos empotrados, $m = 1$ y los coeficientes de h_{ik} e i_{ik} son iguales a la unidad.

El control de los coeficientes del desplazamiento es

$$\sum_{(r)} m c_{ik} \nu_{ik} = -\frac{3}{2}.$$

§ 163. CONTROL DE LOS MOMENTOS DE APOYO

a) En el caso de nudos fijos

Verificación de las condiciones de equilibrio

Condición I. En cada nudo i, la suma de todos los momentos de apoyo M_{ik} de las barras que concurren al nudo deberá ser igual a cero: $\sum_{(i)} \overline{M}_{ik} = 0$.

Habiendo momento externo, $M_i \sum_{(i)} M_{ik} = M_i$.

Verificación de las condiciones de continuidad de las deformaciones.

Condición II. En cada nudo i, los ángulos de giro de todas las barras, rígidamente fijadas al nudo, deberán ser iguales a

$$\varphi_{ik} = \varphi_{ik}^0 + \frac{M_{ik}}{3Ei_{ik}} - \frac{M_{ki}}{6Ei_{ik}},$$

donde φ_{ik}^0 es el ángulo de giro originado por la carga en la barra i-k, en la suposición de un esquema articulado del apoyo.

Los ángulos de giro aumentados $3E$ veces son:

$$T_{ik} = T_{ik}^0 + \frac{M_{ik}}{i_{ik}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{ki}}{i_{ik}},$$

donde

$$T_{ik} = 3E\varphi_{ik}; \quad T_{ik}^0 = 3E\varphi_{ik}^0, \text{ etc.}$$

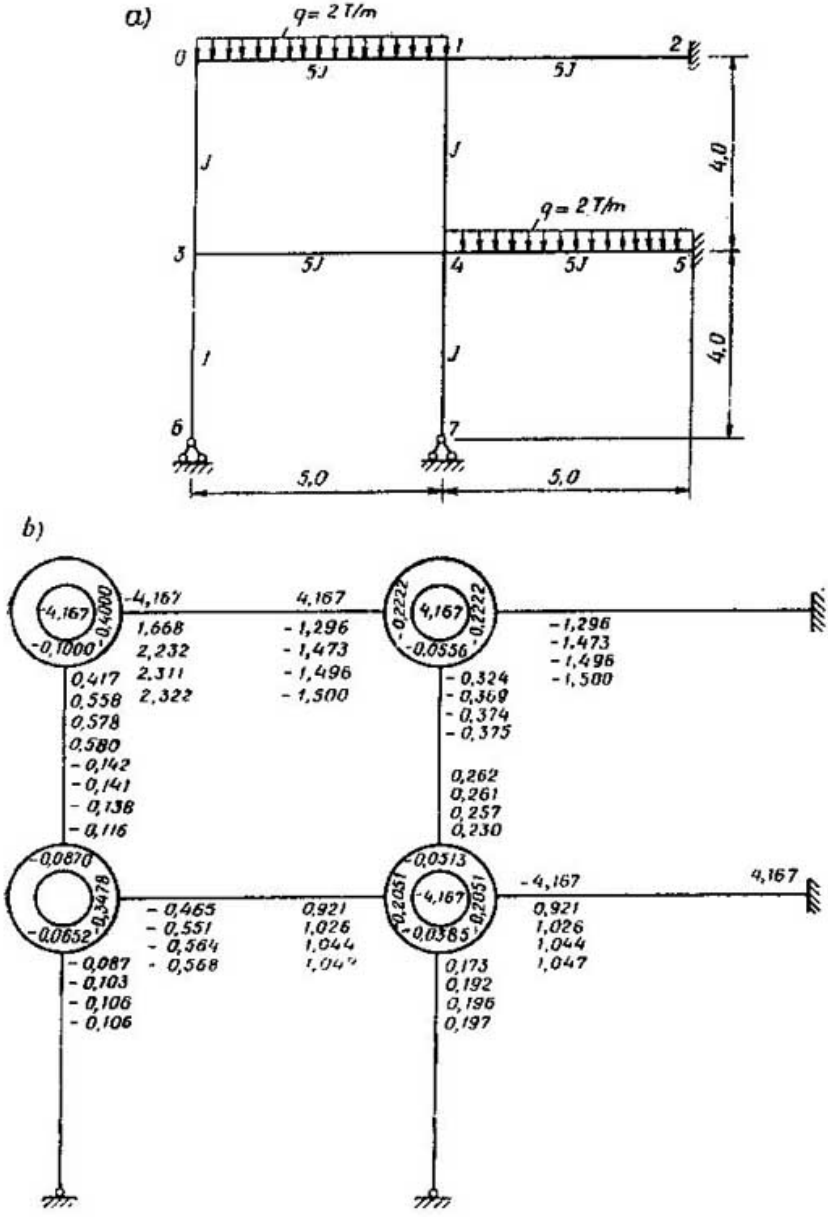

a)
q= 2 T/m
0
1
2
5J
5J
J
J
4,0
q= 2 T/m
3
5J
4
5J
5
J
J
4,0
6
7
5,0
5,0
b)
-4,167
0,4000
-0,1000
1,668
2,232
2,311
2,322
0,417
0,558
0,578
0,580
-0,142
-0,141
-0,138
-0,116
4,167
-1,296
-1,473
-1,496
-1,500
-0,2222
4,167
-0,2222
-0,0556
-0,324
-0,369
-0,374
-0,375
0,262
0,261
0,257
0,230
-1,296
-1,473
-1,496
-1,500
-0,0870
-0,0652
-0,3478
-0,087
-0,103
-0,106
-0,106
-0,465
-0,551
-0,564
-0,568
0,921
1,026
1,044
-0,0313
-0,2051
-4,167
-0,2051
-0,0385
0,173
0,192
0,196
0,197
-4,167
4,167
0,921
1,026
1,044
1,047

Fig. 16.2

b) En el caso de nudos desplazables

Verificación de las condiciones de equilibrio

Condición I. Lo mismo que en el caso de nudos fijos.

Condición Ia. En cada piso r, en la sección horizontal trazada por los pilares del piso, la suma de todas las fuerzas transversales de los pilares deberá ser igual a la suma de todas las componentes horizontales de la carga, aplicada más arriba del piso: $\sum_{(r)} Q_{ik} = \sum_{i=1}^{r} H_{ik}$.

Verificación de las condiciones de continuidad de las deformaciones

Condición II. Lo mismo que en el caso de nudos fijos:

$$T_{ik} = D_{ik} + T_{ik}^{0} + \frac{M_{ik}}{i_{ik}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{ik}}{i_{ik}},$$

donde $D_{ik} = -\frac{M''_{ik}}{2i_{ik}}$ es el ángulo de giro debido al desplazamiento (incrementado $3E$ veces en relación con el verdadero).

Condición IIa. En cada piso r, para todos los pilares, las magnitudes $D_{ik}h_{ik}$ deberán ser iguales entre sí.

Ejemplo 16.1. Se exige construir el diagrama de los momentos para el pórtico representado en la fig. 16.2*a*.

Resolución

El pórtico a examinar no tiene movilidad horizontal de los nudos. Calculamos la rigidez lineal de las barras, considerando que $EJ = 1$ (EJ se puede tomar igual a cualquier número, porque es necesario solamente saber la relación entre las rigideces de las barras sueltas):

$$i_{01} = \frac{5EJ}{5} = 1{,}0; \quad i_{12} = 1{,}0; \quad i_{03} = 0{,}25; \quad i_{34} = 1{,}0;$$

$$i_{14} = 0{,}25; \quad i_{45} = 1{,}0; \quad i_{36} = 0{,}25; \quad i_{47} = 0{,}25.$$

Calculamos los coeficientes de giro por las rigideces lineales:

$$\mu_{ik} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{i_{ik}}{\sum_{(i)} i_{ik}};$$

$$\mu_{01} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}0}{0{,}25 + 1{,}0} = -0{,}4000; \quad \mu_{03} = -0{,}1000;$$

$$\mu_{10} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}0}{0{,}25 + 1{,}0 + 1{,}0} = -0{,}2222; \quad \mu_{12} = -0{,}2222;$$

$$\mu_{14} = 0{,}0566;$$

$$\mu_{34} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}0}{0{,}25 + \frac{3}{4} 0{,}25 + 1\,0} = -3478;$$

$$\mu_{36} = -0{,}0652; \quad \mu_{30} = -0{,}0870;$$

$$\mu_{43} = -0{,}2051; \quad \mu_{41} = -0{,}0513; \quad \mu_{45} = 0{,}2051; \quad \mu_{47} = -0{,}0385.$$

Calculamos los valores de los momentos del empotramiento por los extremos de las barras cargadas *0-1* y *4-5*.

Considerando la regla de los signos para los momentos del empotramiento, obtenemos:

$$\overline{M}_{01} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{2 \cdot 5^2}{12} = -4{,}167 \text{ tfm}; \quad \overline{M}_{10} = 4{,}167 \text{ tfm}$$

$$M_{45} = -4{,}167 \text{ tfm}; \quad \overline{M}_{54} = 4{,}167 \text{ tfm}.$$

Los resultados de la distribución de los momentos debidos al giro de los nudos se anotan en el esquema del pórtico (se puede también en forma de tabla). El esquema del pórtico se representa de modo que haya suficiente lugar para anotar los momentos de apoyo obtenidos en el proceso de la iteración. Previamente, en el esquema del pórtico (fig. 16.2*b*), dentro de los círculos externos, con los centros en los nudos, se escriben los valores de los coeficientes de giro y, dentro de los círculos internos, las magnitudes de los momentos reactivos $M_i = \sum_{(i)} \overline{M}_{ik}$. Los valores de los momentos del empotramiento $\overline{M}_{ik}$ se escriben en el esquema del pórtico, por arriba de la viga de estructura y cerca del nudo respectivo. Los resultados de la distribución de los momentos se anotan en columna, para las vigas de estructura, de arriba abajo, por debajo de la viga de estructura, para los pilares, en la dirección desde los nudos, a lo largo de los pilares, a la derecha. La distribución de los momentos se puede comenzar desde cualquier nudo y efectuarla en cualquier sucesión.

Comenzamos la distribución de los momentos por el nudo *0*. Expresamos el momento debido al giro del nudo *0* por medio del momento reactivo y de los momentos debidos al giro de los extremos opuestos de las barras que concurren en el nudo.

Para la primera aproximación, el momento debido al giro del nudo *0* es igual a —4,167 tfm. (Los momentos debidos al giro de los extremos opuestos son iguales a cero). Distribuimos el momento obtenido en concordancia con las magnitudes de los coeficientes de giro:

$$M'_{01} = -0{,}4000\,(-4{,}167) = 1{,}668 \text{ tfm};$$

$$M'_{03} = -0{,}1000\,(-4{,}167) = 0{,}417 \text{ tfm}$$

y los escribimos en el esquema, cerca de las barras respectivas.

Pasamos al nudo 1. El momento debido al giro del nudo, expresado por medio del momento reactivo y el momento debido al giro de los extremos opuestos de las barras, es:

$$\overline{M}_1 + \sum_{(1)} M'_{k1} = 4.167 + 1,668 = 5,835 \text{ tfm}.$$

Repartimos este momento:

$$M'_{10} = -0,2222 \cdot 5,835 = -1,296 \text{ tfm};$$
$$M'_{14} = -0,0566 \cdot 5,835 = -0,324 \text{ tfm};$$
$$M'_{12} = -0,2222 \cdot 5,835 = -1,296 \text{ tfm}$$

y los anotamos en el esquema.

Para el nudo *4*, el momento debido al giro del nudo es igual a

$$-4,167 + (-0,324) = -4,491 \text{ tfm}.$$

Repartimos este momento:

$$M'_{41} = -0,0513\,(-4,491) = 0,230 \text{ tfm};$$
$$M'_{45} = -0,2051\,(-4,491) = 0,921 \text{ tfm};$$
$$M'_{47} = -0,0385\,(-4,491) = 0,173 \text{ tfm};$$
$$M'_{43} = -0,2051\,(-4,491) = 0,921 \text{ tfm}.$$

y los anotamos en el esquema del pórtico.

Para el nudo *3*, el momento debido al giro del nudo es igual a: $0,921 + 0,417 = 1,338$ tfm.

Efectuamos la repartición:

$$M'_{30} = -0,0870 \cdot 1,338 = -0,116 \text{ tfm};$$
$$M'_{34} = -0,3478 \cdot 1,338 = -0,465 \text{ tfm};$$
$$M'_{36} = -0,0652 \cdot 1,338 = -0,087 \text{ tfm}.$$

Los resultados de la distribución los anotamos en el esquema.

Pasamos a la segunda aproximación. Nuevamente regresamos al nudo *0*. El momento debido al giro del nudo es igual a:

$$\overline{M}_0 + \sum_{(0)} M'_{k0} = -4,167 - 1,296 - 0,116 = -5,579 \text{ tfm}.$$

Repartimos este momento:

$$M'_{01} = -0,4000\,(-5,579) = 2,232 \text{ tfm};$$
$$M'_{03} = -0,1000\,(-5,579) = 0,558 \text{ tfm};$$

y anotamos los resultados de la distribución en el esquema.

Luego pasamos al nudo *1*, después al nudo *4*, etc., análogamente a lo expuesto con anterioridad. Los resultados de la distribución de los momentos por cuatro aproximaciones se dan en la fig. 16.2*b*.

Por los valores de los momentos debidos al giro, obtenidos en la última aproximación, se calculan los valores de los momentos

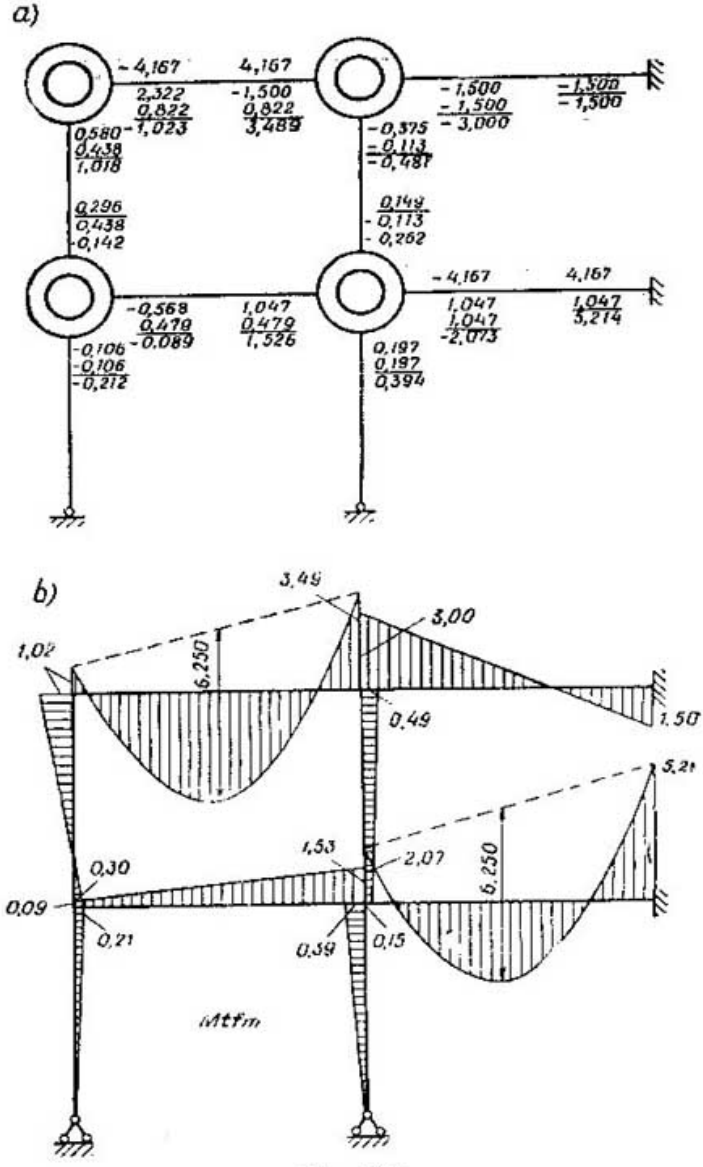

a)
- 4,167
4,167
2,322
0,822
- 1,023
- 1,500
0,822
3,489
- 1,500
- 1,500
- 3,000
- 1,500
- 1,500
0,580
0,438
1,018
- 0,375
- 0,113
- 0,487
0,296
0,438
- 0,142
0,149
- 0,113
- 0,262
- 4,167
4,167
- 0,568
0,479
- 0,089
1,047
0,479
1,526
1,047
1,047
- 2,073
1,047
3,214
- 0,106
- 0,106
- 0,212
0,197
0,197
0,394
b)
3,49
3,00
1,02
6,250
0,49
1,50
5,21
4,53
2,07
6,250
0,30
0,09
0,21
0,39
0,15
Mtfm

Fig. 16.3

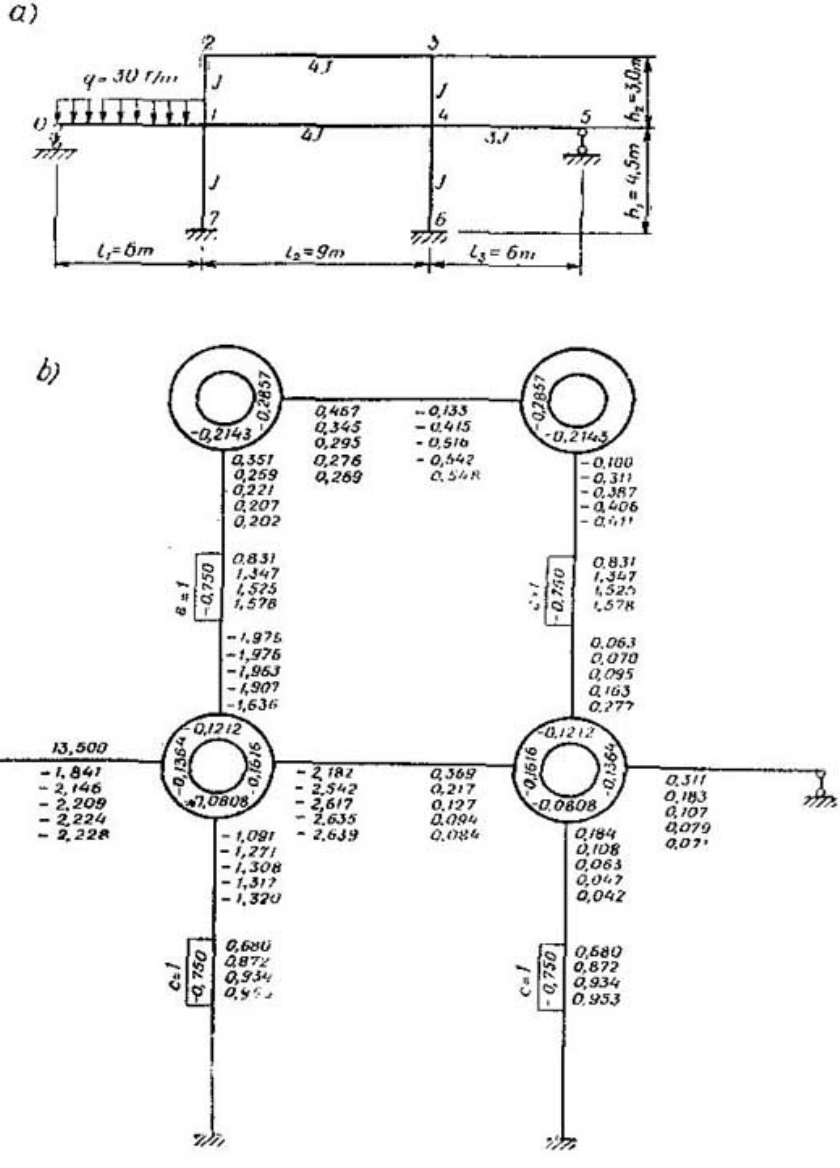

a)
q = 30 t/m
J
4J
3J
h2 = 3,0m
h1 = 4,5m
l1 = 6m
l2 = 9m
l3 = 6m
b)
13,500
-1,841
-2,146
-2,209
-2,224
-2,228
0,467
0,345
0,295
0,276
0,269
-0,133
-0,415
-0,516
-0,542
-0,548
0,351
0,259
0,221
0,207
0,202
-0,100
-0,311
-0,387
-0,406
-0,411
0,831
1,347
1,525
1,578
-1,975
-1,976
-1,963
-1,907
-1,636
0,063
0,070
0,095
0,163
0,277
-2,182
-2,542
-2,617
-2,635
-2,639
0,369
0,217
0,127
0,094
0,084
0,311
0,183
0,107
0,079
0,071
-1,091
-1,271
-1,308
-1,317
-1,320
0,184
0,108
0,063
0,047
0,042
0,680
0,872
0,934
0,953
-0,750
-0,2857
-0,2143
-0,1212
-0,1364
-0,1616
-0,0808

Fig. 16.4

de apoyo:

$$M_{ik} = \overline{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki}.$$

El cálculo de los momentos de apoyo se realiza en el mismo esquema de pórtico al igual que el cálculo de los momentos componentes; en este caso, la vía más simple para la obtención de un resultado definitivo es la siguiente:

1) en cada extremo de la barra se anotan los valores de los momentos de apoyo debidos al empotramiento y los valores definitivos de los momentos debidos al giro (M'_{ik} y M'_{ki});

2) para cada barra se compone la suma $M'_{ik} + M'_{ki}$; los números obtenidos se anotan en ambos extremos de la barra;

3) en cada extremo de la barra se suman los números obtenidos.

En la fig. 16.3*a* se da el cálculo de los momentos de apoyo y en la 16.3*b*, los diagramas de los momentos flectores para el pórtico dado. De los diagramas de los momentos se desprende que todos los nudos del pórtico se hallan en equilibrio.

La verificación de las condiciones de continuidad de las deformaciones muestra que en cada nudo los ángulos de giro de todas las barras rígidamente unidas al nudo son iguales.

Por ejemplo, en el nudo *0*:

$$T_{01} = T^0_{01} + \frac{M_{01}}{i_{01}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{10}}{i_{01}},$$

donde $T^0_{01} = 3E\varphi^0_{01} = \frac{ql^2}{8i_{01}}$ (ya que $\varphi^0_{01} = \frac{ql^2}{24E\frac{J_{01}}{l}} = \frac{ql^2}{24Ei_{01}}$, como para la viga que tiene fijación articulada de los extremos y la carga uniformemente repartida):

$$T_{01} = \frac{2 \cdot 5^2}{8 \cdot 1{,}0} + \frac{1{,}023}{1{,}0} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3{,}489}{1{,}0} = 3{,}440;$$

$$T_{03} = \frac{M_{03}}{i_{03}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{30}}{i_{03}} = \frac{1{,}018}{0{,}25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}296}{0{,}25} = 3{,}440;$$

$$T_{01} = T_{03}.$$

Ejemplo 16.2. Construir el diagrama de los momentos flectores para un pórtico (fig. 16.4*a*).

Resolución

El pórtico a examinar posee movilidad horizontal de los nudos.

Calculamos las rígideces lineales de las barras del pórtico, adoptando que $EJ = 1$:

$$i_{01} = \frac{3EJ}{6{,}0} = 0{,}5000; \quad i_{14} = 0{,}4444; \quad i_{15} = 0{,}5000; \quad i_{17} = 0{,}2222.$$

$$i_{46} = 0{,}2222; \quad i_{23} = 0{,}4444; \quad i_{12} = 0{,}3333; \quad \text{e} \quad i_{34} = 0{,}3333.$$

Por las rigideces lineales calculamos los coeficientes de giro:

$$\mu_{ik} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{i_{ik}}{\sum_{(i)} i_{ik}};$$

$$\mu_{10} = \mu_{45} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}5000\,\frac{3}{4}}{0{,}5000\,\frac{3}{4} + 0{,}4444 + 0{,}3333 + 0{,}2222} = -0{,}1364;$$

$$\mu_{12} = \mu_{43} = -0{,}1212; \quad \mu_{14} = \mu_{41} = -0{,}1616;$$

$$\mu_{17} = \mu_{46} = -0{,}0808;$$

$$\mu_{21} = \mu_{34} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}3333}{0{,}3333 + 0{,}4444} = -0{,}2143;$$

$$\mu_{23} = \mu_{32} = -0{,}2857.$$

Calculamos los coeficientes de desplazamiento:

$$\nu_{ik} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{c_{ik} i_{ik}}{\sum_{(r)} m c_{ik}^2 i_{ik}}; \quad c_{ik} = \frac{h_r}{h_{ik}}.$$

Como altura de los pisos tomamos la altura de los pilares; entonces,

$$c_{12} = c_{43} = c_{17} = c_{46} = 1{,}0;$$

$$\nu_{12} = \nu_{43} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1{,}0 \cdot 0{,}3333}{1{,}0 \cdot 1{,}0^2\,(0{,}3333 + 0{,}3333)} = -0{,}750;$$

$$\nu_{17} = \nu_{46} = -0{,}750.$$

Calculamos los valores de los momentos del empotramiento por los extremos de las barras cargadas:

$$\bar{M}_{0i} = 0; \quad \bar{M}_{10} = \frac{ql^2}{8} = \frac{3 \cdot 6^2}{8} = 13{,}500 \text{ tfm}.$$

En forma análoga al ejemplo 16.1, anotamos los valores calculados de los coeficientes de giro, de los momentos del empotramiento y de los momentos reactivos en el esquema del pórtico. Los valores de los coeficientes de paso de los pilares c_{ik} y de los coeficientes de desplazamientos ν_{ik} se anotan en el medio de la altura de los pilares.

Comenzamos el repartimiento de los momentos del nudo *1*.

En la primera aproximación, el momento debido al giro del nudo *1*, sujeto a ser repartido, es igual a:

$$\bar{M}_1 = \sum_{(i)} M'_{i1} = 13{,}500 + 0{,}0 = 13{,}500 \text{ tfm}.$$

Repartimos este momento en concordancia con los valores de los coeficientes de giro:

$$M'_{10} = -0{,}1364 \cdot 13{,}500 = -1{,}841 \text{ tfm};$$
$$M'_{12} = -0{,}1212 \cdot 13{,}500 = -1{,}636 \text{ tfm};$$
$$M'_{14} = -0{,}1616 \cdot 13{,}500 = -2{,}182 \text{ tfm};$$
$$M'_{17} = -0{,}0808 \cdot 13{,}500 = -1{,}091 \text{ tfm}$$

y los anotamos en el esquema del pórtico.

Prosiguiendo, determinamos el momento $\overline{M}_2 + \sum_2 M'_{k2} = -1{,}636$ tfm debido al giro del siguiente nudo *2* y efectuamos su repartición y la anotación de los resultados en el esquema del pórtico, etc., por los nudos *3* y *4* (análogamente al ejemplo 16.1).

Después de haber terminado con la primera aproximación determinamos los momentos debidos al desplazamiento de las vigas de estructura *2-3* y *1-4*, sujetos a ser repartidos:

$$\sum_{(r)} c_{ik}(M'_{ik} + M'_{ki}).$$

Debido al desplazamiento de la viga de estructura *2-3*

$$\sum_{(2\text{-}3)} c_{ik}(M'_{ik} + M'_{ki}) =$$
$$= 1{,}0\ (-1{,}636 + 0{,}351 - 0{,}100 + 0{,}227) = -1{,}108 \text{ tfm}.$$

Debido al desplazamiento de la viga de estructura *1-4*

$$\sum_{(1\text{-}4)} c_{ik}(M'_{ik} + M'_{ki}) = 1{,}0\,(-1{,}091 + 0{,}184) = -0{,}907 \text{ tfm}.$$

Repartimos los momentos debidos al desplazamiento de las vigas de estructura en concordancia con los coeficientes de desplazamiento:

$$M''_{12} = \nu_{12} \sum_{(2\text{-}3)} c'_{ik}(M'_{ik} + M'_{ki}) = -0{,}750\,(-1{,}108) = 0{,}831 \text{ tfm}.$$

Análogamente,

$$M''_{34} = 0{,}831 \text{ tfm};$$
$$M''_{17} = \nu_{17} \sum_{(1\text{-}4)} c_{ik}(M'_{ik} + M'_{ki}) = -0{,}750\,(-0{,}907) = 0{,}680 \text{ tfm};$$
$$M''_{46} = 0{,}680 \text{ tfm}.$$

Los resultados de la repartición de los momentos debidos al desplazamiento de las vigas de estructura se anotan en el medio de la altura de los pilares. Al hacer las aproximaciones sucesivas, ya está sujeta a repartición la suma de los momentos debidos al giro de los nudos y a los desplazamientos de las vigas de estructura.

Para la segunda aproximación, referente al nudo *1*, el momento sujeto a repartición es:

$$\bar{M}_1 + \sum_{(1)} (M'_{k1} + M''_{1k}) =$$

$$= 13{,}500 + 0{,}351 + 0{,}369 + 0{,}831 + 0{,}680 = 15{,}731 \text{ tfm}.$$

Repartimos este momento:

$$M'_{10} = -0{,}1364 \cdot 15{,}731 = -2{,}146 \text{ tfm};$$

$$M'_{12} = -0{,}1212 \cdot 15{,}731 = -1{,}907 \text{ tfm};$$

$$M'_{14} = -0{,}1616 \cdot 15{,}731 = -2{,}542 \text{ tfm};$$

$$M'_{17} = -0{,}0808 \cdot 15{,}731 = -1{,}271 \text{ tfm}.$$

Los resultados de la repartición se anotan en esquema del pórtico.

Operaciones análogas se efectúan para los nudos *2*, *3* y *4*.

Después de terminar la segunda aproximación, se calculan nuevamente los momentos debidos al desplazamiento de las vigas de estructura, etc. Los resultados de la repartición de los momentos debidos al giro y al desplazamiento para las cinco aproximaciones, efectuadas durante el cálculo del pórtico dado, se dan en la fig. 16.4*b*.

Por los valores de los momentos debidos al giro y al desplazamiento obtenidos en la última aproximación, se calculan los valores de los momentos de apoyo $M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik}$. El cálculo de los momentos de apoyo se hace en el esquema del pórtico, en la siguiente sucesión:

1) en cada extremo de la barra se anotan los valores de los momentos de apoyo debidos al desplazamiento y los valores definitivos de los momentos debidos al giro (M'_{ik} y M'_{ki});

2) para cada barra se compone la suma ($M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik}$); los números obtenidos se anotan en ambos extremos de la barra;

3) en cada extremo de la barra se suman los números obtenidos;

4) los valores definitivos de los momentos debidos al desplazamiento de las vigas de estructura se anotan cerca del medio de los pilares.

En la fig. 16.5*a* se da el cálculo de los momentos de apoyo y, en la fig. 16.5*b*, el diagrama de los momentos en el sistema dado. De los diagramas de los momentos se deduce que, luego de redondear los valores de los momentos, todos los nudos del pórtico se hallan en equilibrio.

La condición de continuidad de las deformaciones también se cumple (hemos omitido la verificación).

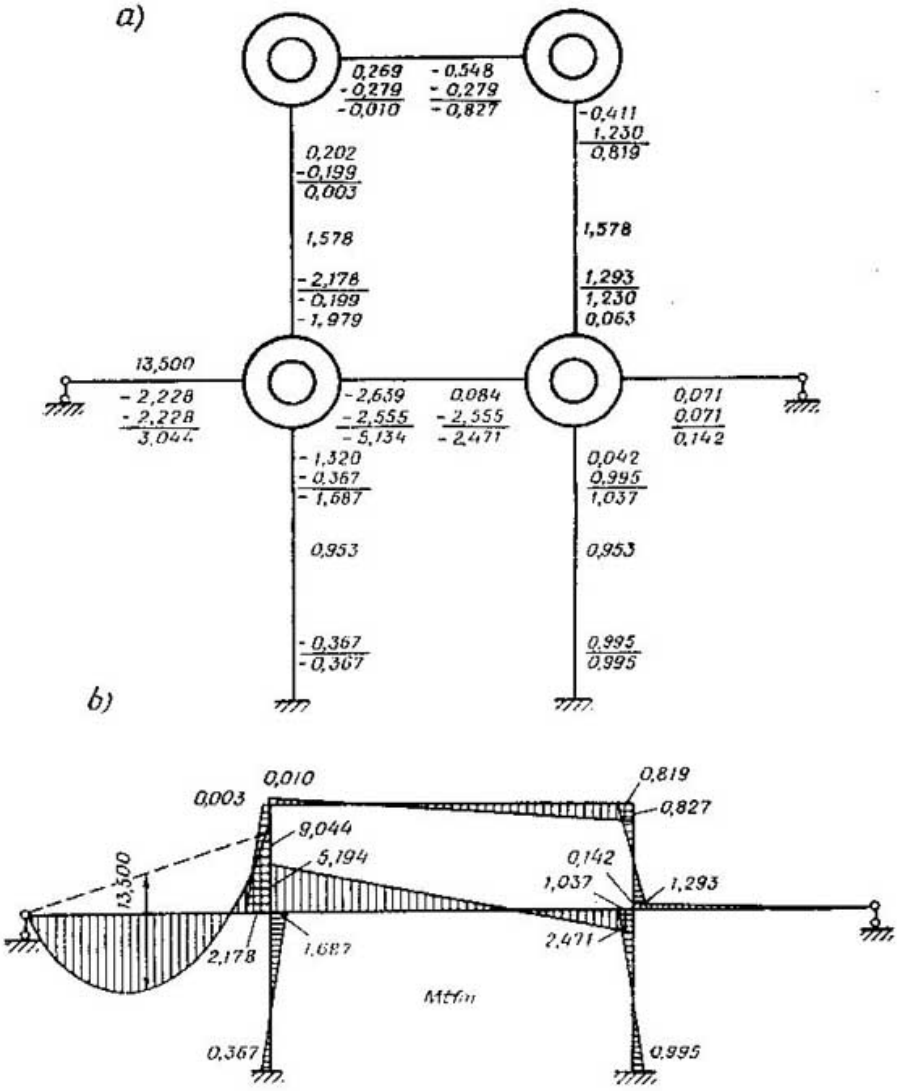

a)
0,269
- 0,279
- 0,010
- 0,548
- 0,279
- 0,827
- 0,411
1,230
0,819
0,202
- 0,199
0,003
1,578
1,578
- 2,178
- 0,199
- 1,979
1,293
1,230
0,063
13,500
- 2,228
- 2,228
3,044
- 2,639
- 2,555
- 5,134
0,084
- 2,555
- 2,471
0,071
0,071
0,142
- 1,320
- 0,367
- 1,687
0,042
0,995
1,037
0,953
0,953
- 0,367
- 0,367
0,995
0,995
b)
0,010
0,003
0,819
0,827
9,044
5,194
0,142
1,037
1,293
13,500
2,178
1,687
2,471
Mdin
0,367
0,995

Fig. 16.5

CAPÍTULO 17 * CARGAS LÍMITES DE LOS SISTEMAS HIPERESTÁTICOS [1])

Ejemplo 17.1. Determinar el parámetro P (Kgf) de la carga de cálculo o teórica para una viga continua (fig. 17.1*a*) de material plástico, en el caso de carga estática para una sola vez y un

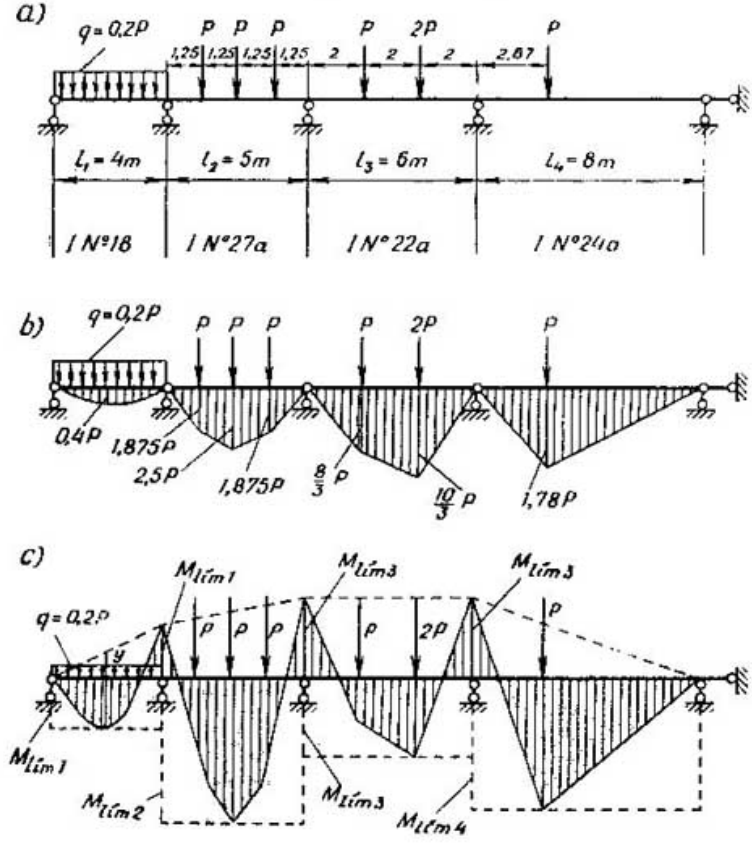


Fig. 17.1

crecimiento simultáneo proporcional de la carga en todos los tramos. La viga es laminada en doble T, con diferente capacidad portante en los distintos tramos. Los números de los perfiles en

[1]) Antes de comenzar el estudio del presente capítulo, conviene dominar la resolución de los ejemplos incluidos en el capítulo 21 del libro de texto de V. A. Kiseliov. Mecánica de construcción, tomo II. Editorial Mir, Moscú, 1972, págs. 271—309.

doble T se indican en los tramos de la viga. La resistencia teórica del material, tomando en cuenta el coeficiente de condiciones de trabajo, es $\delta_t = mR = 2500$ kgf/cm². La influencia de las fuerzas transversales sobre el valor de la carga teórica se desprecia.

Resolución

1. Determinamos los momentos plásticos de resistencia W_{pl} en cada tramo por la fórmula

$$W_{pl} = 2S_x, \qquad (17.1)$$

donde S_x es el momento estático de la semisección del perfil en doble T, con respecto al eje central perpendicular al plano de flexión.

Para calcular W_{pl} es conveniente utilizar las tablas GOST 8239—56 (Normas Estatales de la URSS) para las vigas en doble T laminadas que contienen los valores de S_x. Tenemos:

$$W_{pl1} = 2 \cdot 83{,}7 = 167{,}4 \text{ cm}^3; \quad W_{pl3} = 2 \cdot 141 = 282 \text{ cm}^3,$$
$$W_{pl2} = 2 \cdot 229 = 458 \text{ cm}^3; \quad W_{pl4} = 2 \cdot 178 = 356 \text{ cm}^3.$$

2. Determinamos los momentos límites de apoyo y los de tramo, para cada tramo, por la fórmula

$$M_{lim} = W_{pl} mR.$$

Tenemos:

$$M_{lim\,1} = 167{,}4 \cdot 2500 = 418\,500 \text{ Kgfcm} = 4{,}185 \text{ tfm};$$
$$M_{lim\,2} = 458 \cdot 2500 = 1\,145\,000 \text{ Kgfcm} = 11{,}45 \text{ tfm};$$
$$M_{lim\,3} = 282 \cdot 2500 = 705\,000 \text{ Kgfcm} = 7{,}05 \text{ tfm};$$
$$M_{lim\,4} = 356 \cdot 2500 = 890\,000 \text{ Kgfcm} = 8{,}9 \text{ tfm}.$$

3. En cada tramo, construimos los diagramas de los momentos, así como en una viga con los apoyos extremos articulados, debidos a las cargas teóricas de estos tramos. Los diagramas indicados de los momentos se dan en la fig. 17,1*b*. Las ordenadas de estos diagramas son funciones del parámetro de carga P.

Las operaciones 4,5 y 6 se muestran en la fig. 17.1*c*. Estas operaciones consisten en lo siguiente.

4. Trazamos desde el lado inferior de la viga los momentos límites hallados para cada tramo (p. 2) y trazamos en punteado líneas paralelas a la viga.

5. En cada apoyo, por arriba, trazamos el menor de los dos momentos límites lindantes con el apoyo dado y uniéndolos en punteado obtenemos la línea de los momentos de apoyo.

En nuestro caso, sobre el primer apoyo trazamos $M_{lim\,1}$, sobre los apoyos segundo y tercero, $M_{lim\,3}$. En este caso se sobreentiende que los momentos de apoyo en las articulaciones sobre el apoyo en

cero (el izquierdo) y sobre el apoyo cuarto (el derecho) son iguales a cero.

6. En cada tramo, de cada línea de momentos de apoyo "colgamos" los diagramas de los momentos flectores de las vigas simplemente apoyadas, obtenidos en el p. 3, de modo que estos diagramas, por abajo, toquen las líneas de los momentos límites.

De tal manera, el diagrama de los momentos, dado en la fig. 17.1*c*, representa el diagrama límite de momentos, en el caso del esquema de carga dado de la viga continua.

7. Teniendo en cuenta este diagrama de los momentos y admitiendo que cada tramo se destruye por separado, determinamos los parámetros de la carga límite en los tramos, guiándonos, en este caso, por consideraciones geométricas.

En el caso de destrucción del primer tramo tomamos aproximadamente que la articulación plástica en este tramo está ubicada en el medio del mismo (con exactitud, a $0{,}414\,l_1$) [1]). Entonces,

$$M_{\text{lím }1} + \frac{M_{\text{lím }1}}{2} = \frac{ql_1^2}{8} = 0{,}4P_1$$

ó

$$4{,}185 + \frac{4{,}185}{2} = 0{,}4P_1.$$

De aquí, $P_1 = 15{,}69$ tf.

En el caso de destrucción del segundo tramo:

$$M_{\text{lím }2} + \frac{M_{\text{lím }1} + M_{\text{lím }3}}{2} = 2{,}5P_2$$

u

$$11{,}45 + \frac{4{,}185 + 7{,}05}{2} = 2{,}5P_2.$$

De aquí, $P_2 = 6{,}83$ tf.

En el caso de destrucción del tercer tramo:

$$M_{\text{lím }3} + M_{\text{lím }3} = \frac{10}{3} P_3$$

ó $2 \cdot 7{,}05 = \frac{10}{3} P_3$.

De aquí, $P_3 = 4{,}23$ tf.

En el caso de destrucción del cuarto tramo:

$$M_{\text{lím }4} + \frac{2}{3} M_{\text{lím }3} = 1{,}78P_4$$

$$\text{u } 8{,}9 + \frac{2}{3} 7{,}05 = 1{,}78P_4.$$

De aquí, $P_4 = 7{,}67$ tf.

8 Elegimos el menor valor de P de todos los obtenidos. Este valor resultó la respuesta para el tercer tramo. De tal modo, $P = 4{,}23$ tf $= 4230$ Kgf.

---

[1]) Véase la respuesta al problema 17,4 para $n = 2$.

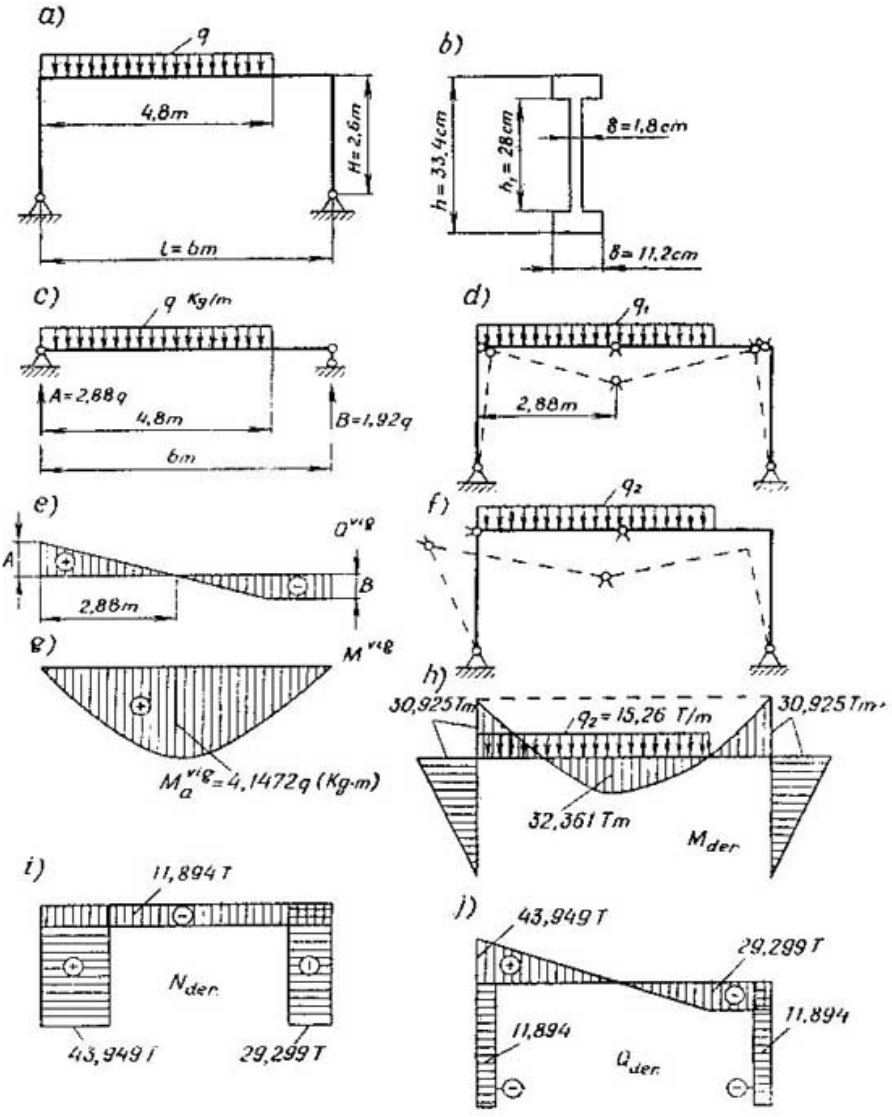

a)
q
4,8m
H=2,6m
l=6m
b)
h=33,4cm
h₁=28cm
δ=1,8cm
δ=11,2cm
c)
q Kg/m
A=2,88q
4,8m
B=1,92q
6m
d)
q₁
2,88m
e)
Q^vig
A
B
2,88m
f)
q₂
g)
M^vig
M_a^vig=4,1472q (Kg·m)
h)
30,925Tm
q₂=15,26 T/m
30,925Tm
32,361 Tm
M_der
i)
11,894 T
N_der
43,949 T
29,299 T
j)
43,949 T
29,299 T
11,894
11,894
Q_der

Fig. 17.2

Por consiguiente, en el caso de un aumento simultáneo proporcional de la carga en todos los tramos, el tercer tramo se destruye en cuanto se alcance $P = 4230$ Kgf. Los tramos restantes quedan no descargados. Pero, en este caso, la construcción en total queda inútil para un servicio normal.

Ejemplo 17.2. Determinar la intensidad de la carga teórica q aplicada a la viga de estructura del pórtico biarticulado (fig. 17.2*a*). Construir los diagramas de M, Q y N que corresponden a esta carga. El material del pórtico es plástico. La carga, para una sola vez, es estática. Las secciones de las vigas de estructura y los pilares son iguales. Tienen la forma en doble T, cuyas dimensiones se muestran en la fig. 17.2*b*. La resistencia teórica del material es $mR = 2500$ Kgf/cm^2. La influencia de las fuerzas transversales sobre la magnitud de la carga teórica se desprecia.

Resolución

1 Calculamos W_{pl}:

$$W_{pl} = \frac{1}{4}[b(h^2 - h_1^2) + \delta h_1^2] =$$

$$= \frac{1}{4}[11{,}2\,(33{,}4 + 28)\,(33{,}4 - 28) + 1{,}8 \cdot 28^2] = 1280 \text{ cm}^3.$$

2. Hallamos el diagrama de los momentos flectores en la viga de estructura, al igual que en una viga simplemente apoyada (fig. 17.2*c*). Este diagrama se presenta en la fig. 17.2*g*. La ordenada máxima del diagrama es $M_a^{v.g} = 414{,}729$ Kgfcm.

3. Determinamos la carga teórica para el pórtico. Aunque las secciones de las vigas de estructura y los pilares son iguales, empero, al determinar la carga teórica, tomamos en consideración no sólo los momentos flectores límites, sino también las fuerzas longitudinales límites que en la viga y los pilares son distintas. Por eso nos vemos obligados a confrontar dos variantes de destrucción: tres articulaciones plásticas solamante en la viga de estructura (fig. 17.2*d*) y una articulación plástica en la viga de estructura y otra en el pilar (fig. 17 2*f*).

a) Destrucción del pórtico por la primera variante.

Por cuanto la fuerza longitudinal en la viga de estructura es constante, los M_{lim} en las tres articulaciones plásticas son también iguales. Por eso, la articulación plástica en el tramo de la viga de estructura aparecerá allí, donde esté el mayor momento de viga, o sea, cuando $a = 2{,}88$ m. La condición de estado límite tiene la forma:

$$\frac{M_a^{v.g}}{2mR} + \frac{(M_a^{v.g})^2}{16H^2\delta_{v.\,estr}(mR)^2} = W_{pl}^{v.\,estr}. \qquad (17.3)$$

Aquí, H es la altura de los pilares; $\delta_{v.\,estr}$ es el espesor del alma de la viga en doble T. Los valores restantes son conocidos de lo expuesto anteriormente. Colocando en (17.3) las magnitudes indispensables, obtenemos:

$$\frac{414{,}72q_1}{2\cdot 2500}+\frac{414{,}72^2q_1^2}{16\cdot 260^2\cdot 1{,}8\cdot 2500^2}=1280.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtenemos:

$$q_1=\frac{4\cdot 260^2\cdot 1{,}8\cdot 2500}{414{,}72}\left(\sqrt{1+\frac{1280}{260^2\cdot 1{,}8}}-1\right)=$$

$$=\frac{4\cdot 67\,600\cdot 1{,}8\cdot 2500}{414{,}72}(\sqrt{1+0{,}01052}-1)=$$

$$=\frac{12\,168\cdot 10^5}{414{,}72}(1{,}00525-1)=15\,404\ \text{Kgf/m}.$$

Cabe señalar que es conveniente resolver esta ecuación por medio de aproximaciones sucesivas, ya que en la ecuación cuadrática (17.3), el segundo término del primer miembro, que toma en cuenta la influencia de la fuerza longitudinal, hace más exacto al primer término, el cual considera la influencia del momento flector y tiene, como norma, un valor dominante. En este caso, frecuentemente sucede que una sóla aproximación es suficiente. Así, representemos la ecuación obtenida en la siguiente forma:

$$q_1=\frac{2\cdot 1280\cdot 2500}{414{,}72}\left[1-\frac{414{,}72^2\cdot q_1^2}{1280\cdot 16\cdot 260^2\cdot 1{,}8\cdot 2500^2}\right].$$

Considerando que en el segundo miembro $q_1=0$, obtenemos $q_1=$ $=15\,432$ Kgf/m. Colocando este valor en el segundo miembro, vamos a tener que $q_1=15\,392$ Kgf/m. De tal modo, el resultado de la primera aproximación es casi igual al hallado por la resolución habitual de la ecuación cuadrática.

b) Ruptura por la segunda variante.

La condición de estado límite tiene el aspecto:

$$M_a^{vig}=\left[W_{pl}^{v.\,estr}-\frac{\left(W_{pl}^{pil}-\frac{V_{máx}^2}{4(mR)^2\delta_{pil}}\right)^2}{4H^2\delta_{v.\,estr}}\right]mR+$$

$$+\left(W_{pl}^{pil}-\frac{V_{máx}^2}{4(mR)^2\delta_{pil}}\right)mR, \qquad (17.4)$$

donde $V_{máx}$ es la mayor fuerza longitudinal en los pilares. Las magnitudes restantes ya tienen los valores conocidos.

En nuestro caso, $V_{máx}$ surge en el pilar izquierdo. Esta fuerza longitudinal es igual a la reacción A de una viga simplemente apoyada (fig. 17.2*c*):

$$V_{máx}=2{,}88q\ \text{Kgf}.$$

Sustituyendo los símbolos en (17.4) por los valores obtenemos:

$$414{,}72q_2 = \left\{ 1280 - \frac{\left[1280 - \frac{(2{,}88q_2)^2}{4 \cdot 2500^2 \cdot 1{,}8}\right]^2}{4 \cdot 260^2 \cdot 1{,}8} \right\} 2500 +$$

$$+ \left[1280 - \frac{(2{,}88q_2)^2}{4 \cdot 2500^2 \cdot 1{,}8}\right] 2500. \qquad (17.5)$$

Es conveniente resolver esta ecuación por aproximaciones sucesivas. Con este objeto, tiene sentido, en calidad de valor inicial de q_2 de colocar en el segundo miembro de la ecuación obtenida el valor de q_1 ó q_0 hallado, sin tomar en cuenta la fuerza longitudinal, por la siguiente fórmula:

$$M_a^{\text{vig}} = (W_{\text{pl}}^{\text{v. estr}} + W_{\text{pl}}^{\text{pil}})\, mR. \qquad (17.6)$$

Tenemos: $414{,}72\, q_0 = (1280 + 1280)2500$.
De aquí, $q_0 = 15\,432$ Kgf/m.

Colocando este número en el segundo miembro de la ecuación (17.5) obtenemos, con bastante exactitud, que $q_2 = 15\,260$ kgf/m.

De tal modo, la carga mínima se obtuvo por la segunda variante: $q = 15{,}26$ tf/m. La ruptura del pórtico ocurrirá por el esquema representado en la fig. 17.2*f*. La respuesta $q_2 < q_1$ es lógica, ya que en el caso dado la fuerza longitudinal en el pilar izquierdo será mayor que en la viga de estructura. Sobre esto se puede juzgar por el diagrama de N (fig. 17.2*i*). En el ejemplo dado, como esto ocurre frecuentemente, el cómputo de las fuerzas longitudinales no introdujo una corrección sustancial en el valor de q_0, hallado por la fórmula (17.6) sin este cómputo.

4. Construimos los diagramas de M, Q y N en el estado límite. Dado que la destrucción ocurre por la segunda variante, al principio calculamos el momento límite en el nudo del pórtico, cerca del pilar izquierdo, por la fórmula

$$M_{\text{lim}}^{\text{pil}} = \left[W_{\text{lim}}^{\text{pil}} - \frac{(N_{\text{lim}}^{\text{pil}})^2}{4\,(mR)^2\, \delta_{\text{pil}}} \right] mR, \qquad (17.7)$$

donde $N_{\text{lim}}^{\text{pil}} = V_{\text{máx}}$ es la reacción A.
Tenemos:

$$M_{\text{lim}}^{\text{pil}} = \left[1280 - \frac{(2{,}88 \cdot 15\,260)^2}{4 \cdot 2500^2 \cdot 1{,}8}\right] 2500 =$$

$$= (1280 - 42{,}92)\, 2500 = 3\,092\,500 \text{ Kgfcm} = 30{,}925 \text{ tfm}.$$

El momento máximo de viga (fig. 17.2*g*) es: $M_a^{\text{vig}} = 4{,}1472q = 414{,}72 \cdot 15\,260 = 6\,328\,627$ Kgfcm $= 63{,}286$ tfm.

Por las magnitudes de $M_{\text{lim}}^{\text{pil}}$ y M_a^{vig} se construyó el diagrama de los momentos M_{lim} debidos a la carga teórica (fig. 17.2*h*).

Para la verificación calculamos el momento máximo en el tramo de la viga de estructura por dos procedimientos:

1) $M_{\text{lim}}^{\text{v. estr}} = 63{,}286 - 30{,}925 = 32{,}361$ tfm;

2) $$M_{\text{lim}}^{\text{v. estr}} = \left[W_{\text{lim}}^{\text{v. estr}} - \frac{\left(N_{\text{lim}}^{\text{v. estr}}\right)^2}{4\,(mR)^2\,\delta_{\text{v. estr}}} \right] mR. \qquad (17.8)$$

La fuerza longitudinal en la viga de estructura es:

$$N_{\text{lim}}^{\text{v. estr}} = \frac{M_{\text{lim}}^{\text{pil}}}{H} = \frac{30{,}925}{2{,}6} = 11{,}894 \text{ tf.}$$

Considerando este valor, efectuamos el cálculo por (17.8):

$$M_{\text{lim}}^{\text{v. estr}} = \left[1280 - \frac{11\,894^2}{4 \cdot 2500^2 \cdot 1{,}8}\right] 2500 =$$

$$= (1280 - 3{,}14)\,2500 = 3\,192\,150 \text{ Kgfcm.}$$

La diferencia es: $\frac{(32{,}361 - 31{,}992)\,100}{0{,}5\,(32{,}361 + 31{,}992)} = 1{,}36\%$, lo cual es admisible.

El diagrama de las fuerzas transversales Q_{lim} (fig. 17.2*j*) se construyó por el diagrama de M_{lim} según el procedimiento corriente; en este caso se utilizó el diagrama de Q_{vig} (fig. 17.2*e*). Al construir los diagramas de las fuerzas axiles es N_{lim} (fig. 17.2*i*) se utilizaron los siguientes valores:

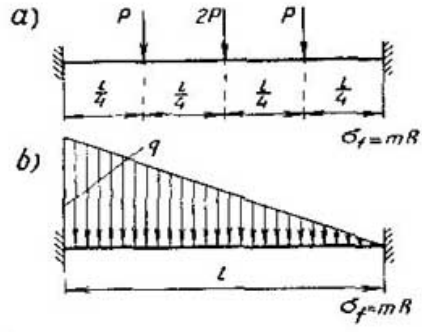


Fig. 17.3

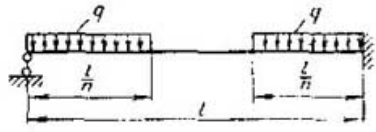


Fig. 17.4

1) para el pilar izquierdo, $N_{\text{lim (izq)}}^{\text{pil}} = \text{reacción } A = 2{,}88q = 2{,}88 \cdot 15{,}26 = 43{,}949$ tf;

2) para el pilar derecho, $N_{\text{lim der}}^{\text{pil}} = \text{reacción } B = 1{,}92q = 1{,}92 \cdot 15{,}26 = 29{,}299$ tf;

3) para la viga de estructura (véase más arriba) $N_{\text{lim}}^{\text{v. estr}} = 11{,}894$ tf.

Problema 17.3. Determinar W_{pl} en las vigas que tienen los dos extremos empotrados (fig. 17.3*a*, *b*).

Respuestas:

1. En el caso de carga mostrado en la fig. 17.3*a*:

$$W_{pl} = \frac{3Pl}{8mR}.$$

2. En el caso de carga mostrado en la fig. 17.3*b*;

$$W_{pl} = \frac{ql^2}{18mR\sqrt{3}}.$$

Problema 17.4. Determinar la posición de la articulación plástica en una viga con el extremo izquierdo sobre un apoyo articu-

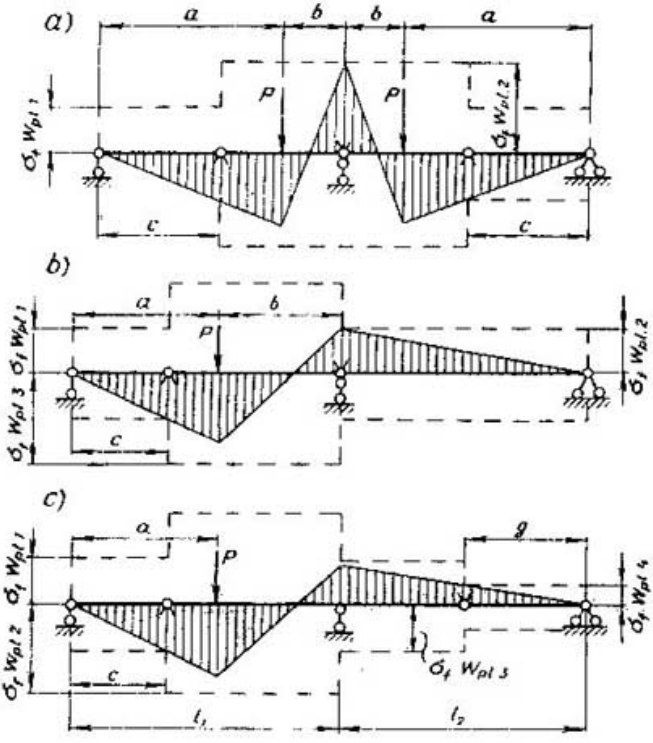


Fig. 17.5

lado y el derecho, empotrado, en el caso de la carga mostrada en la fig. 17.4.

Respuesta: $a = l\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right)$, donde $n \geqslant 2$.

Problema 17.5. Hallar las cargas límites en las vigas continuas de dos tramos, en los cuales los momentos resistentes W_{pl} son variables (fig. 17.5*a* — *c*). Los diagramas de los momentos

flectores límites en las vigas, construidos por la expresión

$$M_{lim} = \sigma_f W_{pl} = mRW_{pl}$$

se muestran en punteado en las figuras, a ambos lados de los ejes de las vigas. Los diagramas de los momentos límites, en el caso de los esquemas de carga dados, se muestran con líneas llenas.

Respuestas:

1. A los esquemas de la fig. 17.5*a*, *b*:

$$P = \frac{\sigma_{tf} W_{pl.\,2}}{b}\left[1 + \frac{W_{pl.\,1}(a+b)}{W_{pl.\,2}c}\right];$$

2. Al esquema de la fig. 17.5*c*:

$$P = \frac{\sigma_{tf} W_{pl.\,1} l_1}{c(l_1 - a)}\left(1 + \frac{W_{pl.\,4} c l_2}{W_{pl.\,1} g l_1}\right).$$

CAPITULO 18 * CALCULO DE SISTEMAS ESPACIALES HIPERESTATICOS

Ejemplo 18.1. En el pórtico mostrado en la fig. 18.1*a* — *c*, construir los diagramas de las fuerzas internas, debidas a la

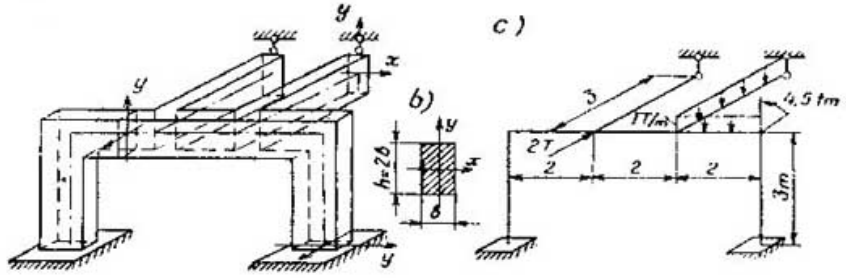


Fig. 18.1

carga dada, aplicando el método de fuerzas. La sección transversal de todas las barras es idéntica: un rectángulo cuya relación entre los lados es $\frac{h}{b} = 2$, $G = 0{,}4E$.

Resolución

El pórtico dado está unido a la tierra en dos lugares por medio de empotramiento y en dos, por medio de vínculos de barra, por consiguiente, el número de todos los vínculos que lo unen a la

tierra es $n = 6 + 6 + 1 + 1 = 14$. El sistema dado es $14 - 6 = 8$ veces hiperestático. Para la elección del sistema básico cortamos el sistema dado por el eje de simetría y eliminamos los vínculos de barra, o sea, los apoyos. En el lugar del corte (fig. 18.2), la fuerza longitudinal X_1, las dos fuerzas transversales X_5 y X_6, los dos momentos flectores X_2 y X_4 y el de torción X_7 serán las incógnitas superfluas.

Estas incógnitas, por su acción sobre el sistema, se descomponen en simétricas X_1, X_2 y X_4 y en antisimétricas X_5, X_6 y X_7. Se

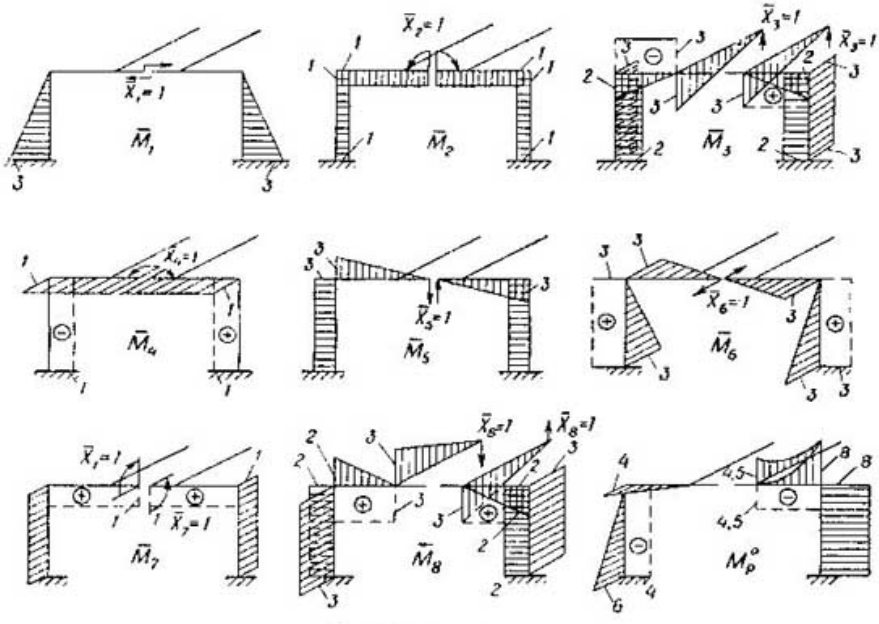


Fig. 18.2

considera que los momentos flectores actúan con respecto a los ejes principales de la sección, y que las fuerzas transversales están dirigidas también por los ajes principales. Las reacciones incógnitas de los vínculos de barra, de apoyo, eliminados, para simplificar el cálculo ulterior se han descompuesto también en componentes simétricas X_3 y antisimétricas X_8. En la fig. 18.2 se representan los diagramas de los momentos construidos en el sistema básico del método de fuerzas, debidos a las incógnitas superfluas tomadas iguales a la unidad. Los diagramas de los momentos flectores $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ y $\bar{M}_4$ son simétricos, los de torsión, antisimétricos. Los diagramas de los momentos flectores $\bar{M}_5$, $\bar{M}_6$, $\bar{M}_7$ y $\bar{M}_8$ son antisimétricos, los de torsión, simétricos. M_P^0 es el diagrama de los momentos flectores y de torsión en el sistema

básico, debidos a la carga dada. Todos los diagramas de los momentos flectores se construyeron por el lado de la fibra traccionada, los de los momentos torsores se muestran con línea punteada y no están sombreados.

Por cuanto en la resolución del problema dado se utiliza la simetría del sistema, las ecuaciones canónicas se descomponen en dos grupos. En uno entrarán solamente las incógnitas simétricas y, en el otro, las antisimétricas, ya que los desplazamientos debidos a las incógnitas simétricas, en la dirección de las antisimétricas y viceversa, son iguales a cero.

Ecuaciones canónicas:

a) con incógnitas simétricas

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0; \\ \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0; \end{cases}$$

b) con incógnitas antisimétricas

$$\begin{cases} \delta_{55}X_5 + \delta_{56}X_6 + \delta_{57}X_7 + \delta_{58}X_8 + \Delta_{5P} = 0; \\ \delta_{65}X_5 + \delta_{66}X_6 + \delta_{67}X_7 + \delta_{68}X_8 + \Delta_{6P} = 0; \\ \delta_{75}X_5 + \delta_{76}X_6 + \delta_{77}X_7 + \delta_{78}X_8 + \Delta_{7P} = 0; \\ \delta_{85}X_5 + \delta_{86}X_6 + \delta_{87}X_7 + \delta_{88}X_8 + \Delta_{8P} = 0. \end{cases}$$

Para el cálculo de los coeficientes de las ecuaciones canónicas se debe utilizar la fórmula de los desplazamientos

$$\delta_{km} = \sum \int \bar{M}_{xk} \frac{\bar{M}_{xm}}{EJ_x} + ds + \sum \int \bar{M}_{yk} \frac{\bar{M}_{ym}}{EJ_y} ds + \\ + \sum \int \bar{M}_{\text{tors } k} \frac{\bar{M}_{\text{tors. } m}}{GJ_{\text{tors.}}} ds, \qquad (18.1)$$

donde $\bar{M}_x$ y $\bar{M}_y$ son los momentos flectores con respecto a los ejes x e y; $\bar{M}_{\text{tors}}$ es el momento torsor.

Para el cálculo de los términos independientes, en la fórmula (18.1), $\bar{M}_m$ se sustituye por M_P^0.

Sobre la magnitud de las deformaciones, en un sistema especial, influyen no sólo el momento flector, sino también el torsor. Por cuanto todos los diagramas unitarios son lineales, para el cálculo de las integrales empleamos la regla de Vereschaguin. Dado que, en el caso de multiplicación de diagramas, se obtienen sumandos que tienen en el denominador las expresiones EJ_x, EJ_y y GJ_{tors} es indispensable reducirlos a una sola expresión cualquiera. En el caso dado, expresamos a todas ellas por medio de EJ_x.

Como se indica en la condición, $G = 0{,}4E$ y $\frac{h}{b} = 2$.

Los ejes principales de la sección se muestran en la fig. 18.1*b*. Los momentos de inercia axiles se escriben así:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^4}{24}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{h^4}{96}.$$

Según la teoría de la torsión de las barras de sección rectangular, $J_{tors} = \alpha b^3 h$.

Para $h/b = 2$; $\alpha = 0{,}229$, entonces, $J_{tors} = 0{,}229 \left(\frac{h}{2}\right)^3 h = 0{,}0286h^4$.

Expresando todas las rigideces por medio de EJ_x, obtenemos que

$$EJ_y = E\frac{h^4}{96} = E\frac{24J_x}{96} = 0{,}25EJ_x;$$

$$GJ_{tors} = 0{,}4E \cdot 0{,}0286 \cdot 24\, J_x = 0{,}274\, EJ_x.$$

El cálculo del coeficiente y los términos independientes es:

$$\delta_{11} = 2\frac{3\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,3\,\frac{1}{EJ_x} = \frac{18}{EJ_x};$$

$$\delta_{12} = -2\frac{3\cdot 3}{2}\,1\,\frac{1}{EJ_x} = -\frac{9}{EJ_x};$$

$$\delta_{13} = -2\frac{3\cdot 3}{2}\,2\,\frac{1}{EJ_x} = -\frac{18}{EJ_x};$$

$$\delta_{14} = 0;$$

$$\delta_{22} = 2\frac{1\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 1}{EJ_x} = \frac{12}{EJ_x};$$

$$\delta_{23} = 2\frac{1\cdot 3\cdot 2 + 0{,}5\cdot 2\cdot 2\cdot 1}{EJ_x} = \frac{16}{EJ_x};$$

$$\delta_{24} = 0;$$

$$\delta_{33} = 2\left(\frac{3\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,3\,\frac{1}{EJ_x} + \frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\,2\,\frac{1}{EJ_x} + 2\cdot 3\cdot 2\,\frac{1}{EJ_x} + 3\cdot 3\cdot 3\,\frac{1}{EJ_y} + 3\cdot 2\cdot 3\,\frac{1}{GJ_{tors}}\right) = \frac{394{,}6}{EJ_x};$$

$$\delta_{34} = 0;$$

$$\delta_{44} = 2\left(\frac{1\cdot 3\cdot 1}{EJ_y} + \frac{1\cdot 3\cdot 1}{GJ_{tors}}\right) = \frac{45{,}9}{EJ_x};$$

$$\delta_{55} = \frac{2}{EJ_x}\left(\frac{3\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,3 + 3\cdot 3\cdot 3\right) = \frac{72}{EJ_x};$$

$$\delta_{56} = 0; \quad \delta_{57} = 0;$$

$$\delta_{58} = \frac{2}{EJ_x}\left(\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{7}{3} + 2\cdot 3\cdot 3\right) = \frac{45{,}3}{EJ_x};$$

$$\delta_{66} = 2\left(\frac{3\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,3\cdot 2\,\frac{1}{EJ_y} + \frac{3\cdot 3\cdot 3}{GJ_{tors}}\right) = \frac{341{,}2}{EJ_x};$$

$$\delta_{67} = -2\frac{3\cdot 3\cdot 1}{2EJ_y} - \frac{36}{EJ_x};$$

$$\delta_{68} = -2\frac{3\cdot 3\cdot 3}{2EJ_y} = -\frac{108}{EJ_x};$$

$$\delta_{77} = 2\left(\frac{1\cdot 3\cdot 1}{EJ_y} + \frac{1\cdot 3\cdot 1}{GJ_{tors}}\right) = \frac{45{,}9}{EJ_x};$$

$$\delta_{78} = 2\left(\frac{1\cdot 3\cdot 3}{EJ_y} + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{GJ_{tors}}\right) = \frac{115{,}8}{EJ_x};$$

$$\delta_{88} = \delta_{33} = \frac{394{,}6}{EJ_x};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{3\cdot 3\cdot 8}{2EJ_x} + \frac{36}{EJ_x};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EJ_x}\left(-8\cdot 3\cdot 1 - \frac{8\cdot 2}{2}\,1 + \frac{0{,}5\cdot 2\cdot 2}{3}\,1\right) = -\frac{31{,}3}{EJ_x};$$

$$\Delta_{3P} = \frac{1}{EJ_x}\left(-\frac{1}{3}\,4{,}5\cdot 3\frac{3}{4}\,3 - \frac{8\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\,2 + \frac{2}{3}\,0{,}5\cdot 2\cdot 1 - 8\cdot 3\cdot 2\right) -$$
$$- \frac{3\cdot 2\cdot 4{,}5}{GJ_{tors}} - \frac{6\cdot 3\cdot 3}{2EJ_y} = -\frac{274{,}7}{EJ_x};$$

$$\Delta_{4P} = \frac{4\cdot 2\cdot 1}{2EJ_y} + \frac{4\cdot 3\cdot 1}{GJ_{tors}} = \frac{59{,}8}{EJ_x};$$

$$\Delta_{5P} = \frac{1}{EJ_x}\left(-8\cdot 3\cdot 3 - \frac{8\cdot 2}{7}\cdot\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\,0{,}5\cdot 2\cdot 2\right) = -\frac{89{,}3}{EJ_x};$$

$$\Delta_{6P} = \frac{1}{EJ_y}\left(-\frac{4\cdot 2}{2}\cdot\frac{7}{3} - \frac{3\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,6\right) - \frac{3\cdot 3\cdot 4}{GJ_{tors}} = -\frac{240{,}8}{EJ_x};$$

$$\Delta_{7P} = -\frac{4{,}5\cdot 2\cdot 1}{GJ_{tors}} + \frac{6\cdot 3\cdot 1}{2EJ_y} = \frac{3{,}1}{EJ_x};$$

$$\Delta_{8P} - \frac{6\cdot 3\cdot 3}{2EJ_y} + \frac{1}{EJ_x}\left(-\frac{1}{3}\,4{,}5\cdot 3\frac{3}{4}\,3 - \frac{8\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\,2 +\right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}\,0{,}5\cdot 2\cdot 1 - 8\cdot 3\cdot 2\right) - \frac{3\cdot 2\cdot 4{,}5}{GJ_{tors}} = -\frac{58{,}7}{EJ_x}.$$

La verificación de los coeficientes y de los términos independientes se efectúa, al igual que en los sistemas planos, por medio de la multiplicación del diagrama unitario sumante por sí mismo y por el diagrama de carga, considerando los momentos de torsión.

Los sistemas de ecuaciones en forma numérica son:

$$\begin{cases} 18X_1 - 9X_2 - 18X_3 + 36 = 0; \\ -9X_1 + 12X_2 + 16X_3 - 31{,}3 = 0; \\ -18X_1 + 16X_2 + 394{,}6X_3 - 274{,}7 = 0; \\ 45{,}9X_4 + 59{,}8 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 72X_5 + 45{,}3X_8 - 89{,}3 = 0; \\ 341{,}2X_6 - 36X_7 - 108X - 240{,}8 = 0; \\ -36X_6 + 45{,}9X_7 + 115{,}8X_8 + 3{,}1 = 0; \\ 45{,}3X_5 - 108X_6 + 115{,}8X_7 + 394{,}6X_8 - 58{,}7 = 0. \end{cases}$$

1/211 Зак. 606

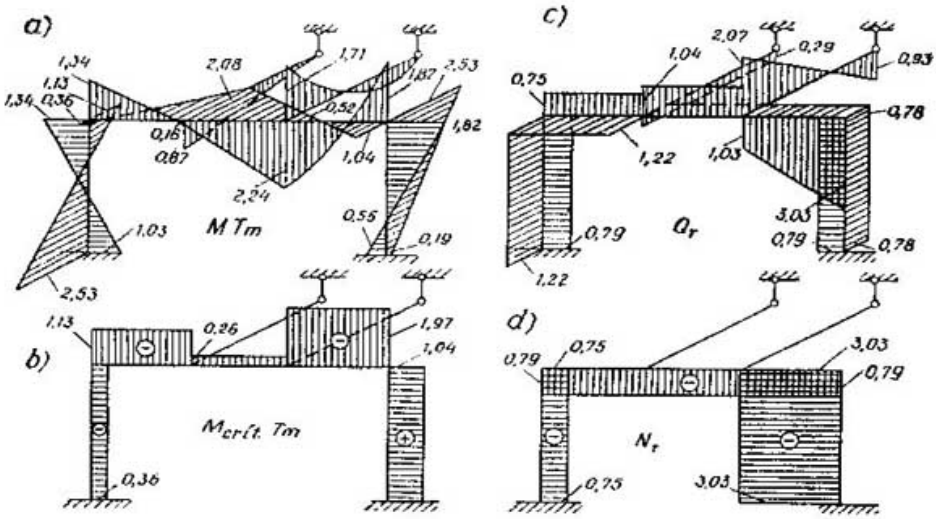


Fig. 18.3

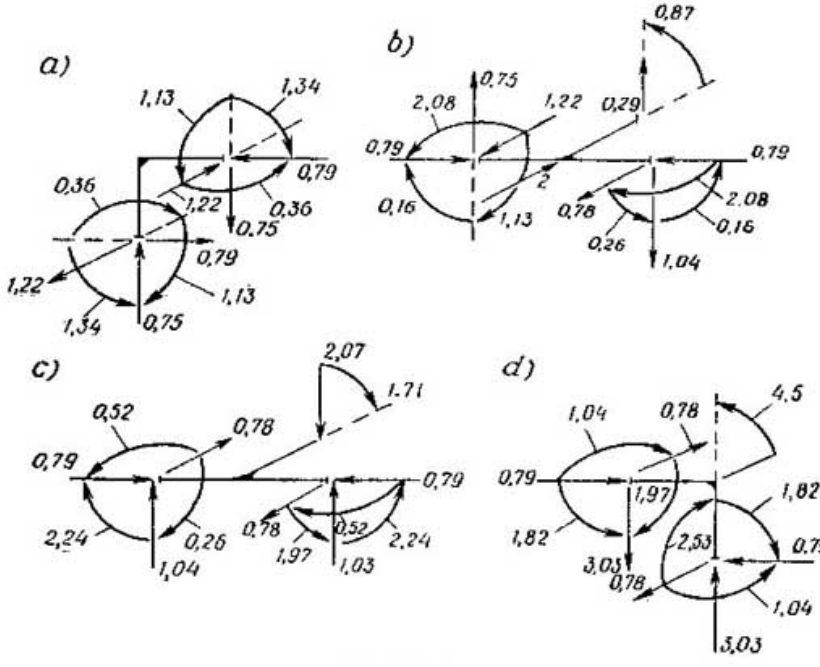


Fig. 18.4

De estas ecuaciones hallamos los valores numéricos de las incógnitas superfluas X (se recomienda resolver el sistema de ecuaciones empleando el procedimiento de Gauss):

$$X_1 = -0{,}79; \qquad X_5 = 1{,}04;$$
$$X_2 = 1{,}20; \qquad X_6 = 0{,}78;$$
$$X_3 = 0{,}61; \qquad X_7 = -0{,}26;$$
$$X_4 = -1{,}30; \qquad X_8 = 0{,}32.$$

Después del cálculo de las incógnitas superfluas construimos los diagramas de las fuerzas internas (fig. 18.3). La verificación de los diagramas de los momentos flectores y torsores se efectúa,

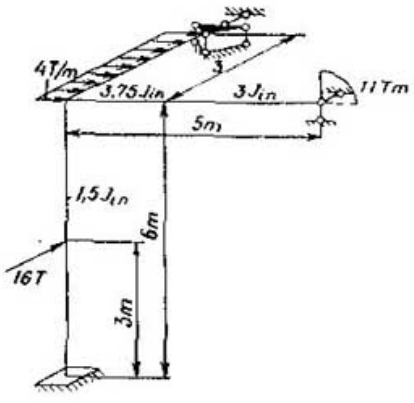


Fig. 18.5

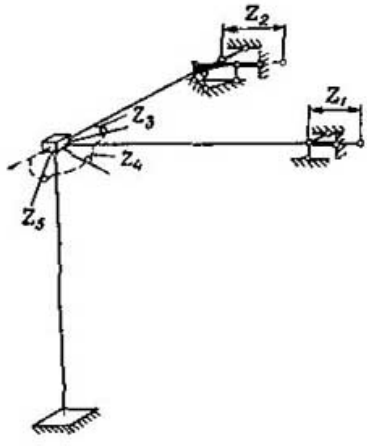


Fig. 18.6

también, del mismo modo que en los sistemas planos, con la multiplicación de ellos por los diagramas unitarios de los momentos construidos en cualquier sistema básico del método de fuerzas. El resultado deberá ser igual a cero.

Además, se puede examinar el equilibrio de cualquier parte cortada del pórtico. Así, en la fig. 18.4 se muestran los nudos recortados del pórtico con todas las fuerzas internas. No es difícil convencerse de que estos nudos se hallan en equilibrio.

Ejemplo 18.2. Construir en el pórtico, mostrado en la fig. 18.5, los diagramas de las fuerzas internas debidas a la carga dada, aplicando el método de desplazamientos. Las secciones transversales de las barras son círculos. Las magnitudes relativas de los momentos de inercia axiles de la sección se indican en el dibujo; $E = 2 \cdot 10^6$ Kg/cm^2; $G = 8 \cdot 10^5$ Kg/cm^2.

Resolución

El sistema dado es seis veces hiperestático. Para obtener el sistema básico del método de desplazamientos introducimos un vínculo de momento en el nudo rígido, que elimina un giro posible de este nudo con respecto a los tres ejes del sistema cartesiano de coordenadas y, dos vínculos lineales, que eliminan un desplazamiento posible de los extremos de las barras horizontales hacia la derecha. Se habría podido no introducir el vínculo N° 2, dado que en el plano horizontal esta barra es un voladizo, o sea, una parte del sistema isostático. Aquí, este vínculo se introdujo con fines metódicos. En calidad de incógnitas superfluas se toman los desplazamientos progresivos Z_1 y Z_2 a la derecha de los extremos de las barras horizontales y los ángulos de giro del nudo rígido, con respecto a tres direcciones recíprocamente perpendiculares. Z_3 en un plano horizontal, Z_4 en el plano vertical del dibujo y Z_5 también en el plano vertical, perpendicular al plano del dibujo. El sistema básico con las incógnitas superfluas se muestra en la fig. 18.6.

Los desplazamientos en los sistemas espaciales, a diferencia de los sistemas planos, pueden originar en las barras no sólo los momentos flectores sino también los de torsión. Durante la construcción de los diagramas de los momentos torsores es necesario tener en cuenta que el ángulo de torsión es

$$\varphi = \frac{M_{tors} l}{G J_{tors}}, \text{ de donde } M_{tors} = \varphi \frac{G J_{tors}}{l}.$$

$$\text{Si } \varphi = 1,$$

entonces $\overline{M}_{tors} = \frac{G J_{tors}}{l}$.

Si la sección es un círculo, como en nuestro caso, $J_{tors} = 2J_{fl}$. Entonces $\frac{G J_{tors}}{E J_{fl}} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 2 J_{fl}}{2 \cdot 10^6 \cdot J_{fl}} = 0{,}8$, donde J_{fl} es el momento de inercia para la flexión. En adelante, para el cálculo, en todos los casos se toma $EJ_{fl} = 1$ y $GJ_{tors} = 0{,}8$.

En la fig. 18.7*a* — *e*, se muestran los diagramas unitarios de los momentos, que son flectores y torsores, debidos a los desplazamientos unitarios. En la fig. 18.7*f* se da el diagrama de los momentos flectores debidos a la carga en el sistema básico. Con líneas punteadas se muestran los ejes de las barras en el estado deformado, debido al desplazamiento. Los diagramas de los momentos flectores se construyeron por el lado de la fibra traccionada. Los de los momentos torsores se trazaron con líneas de puntos, en los mismos dibujos.

Los coeficientes y términos independientes, que son las reacciones en los vínculos introducidos, se hallaron del equilibrio de las partes cortadas del pórtico (fig. 18.8). Las fuerzas transversales

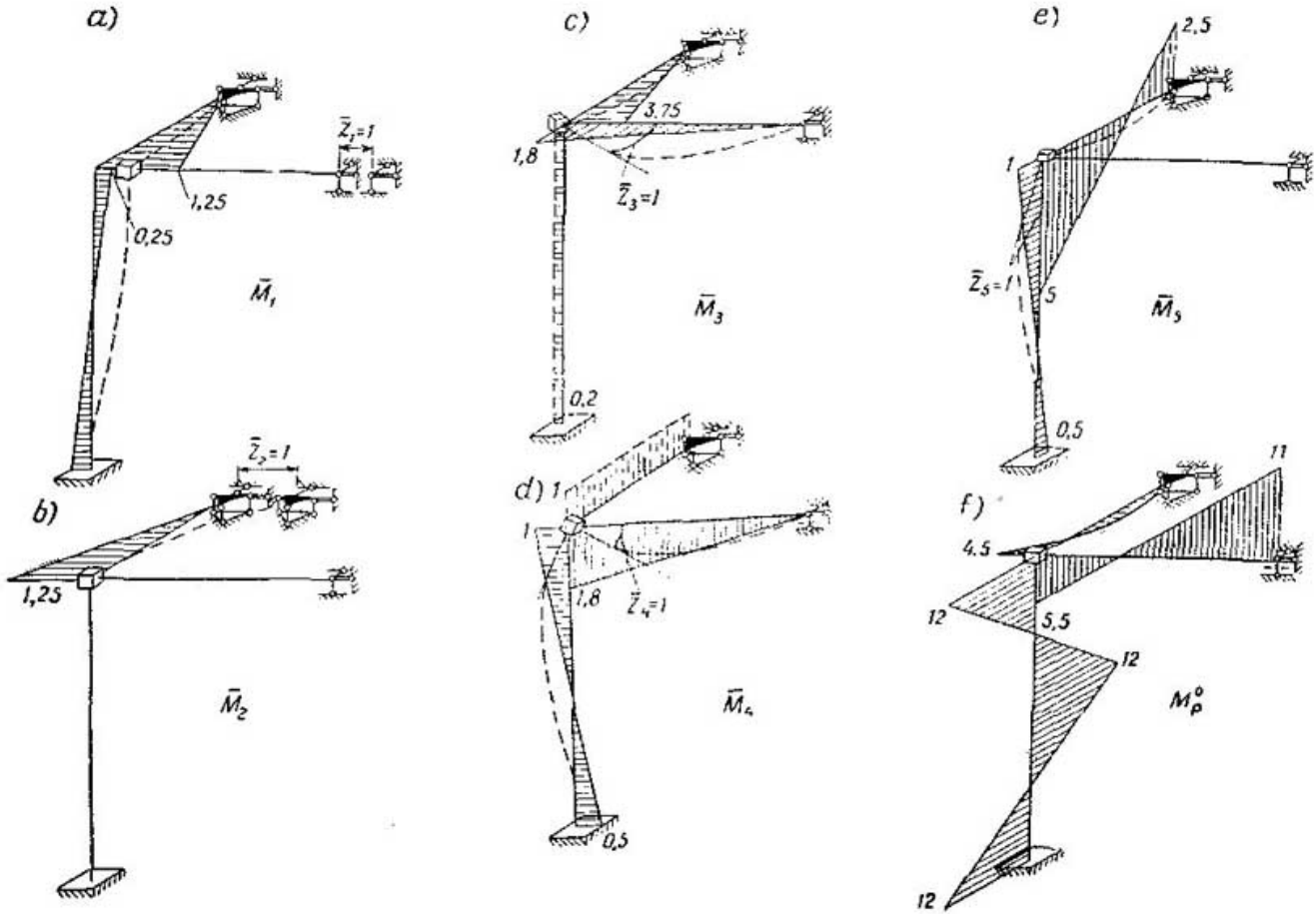

a)
$\bar{Z}_1=1$
1,25
0,25
$\bar{M}_1$
b)
$\bar{Z}_2=1$
1,25
$\bar{M}_2$
c)
3,75
1,8
$\bar{Z}_3=1$
$\bar{M}_3$
0,2
d)
1
1
1,8
$\bar{Z}_4=1$
$\bar{M}_4$
0,5
e)
2,5
1
$\bar{Z}_5=1$
5
$\bar{M}_5$
0,5
f)
11
4,5
12
5,5
12
M_p^0
12

Fig. 18.7.

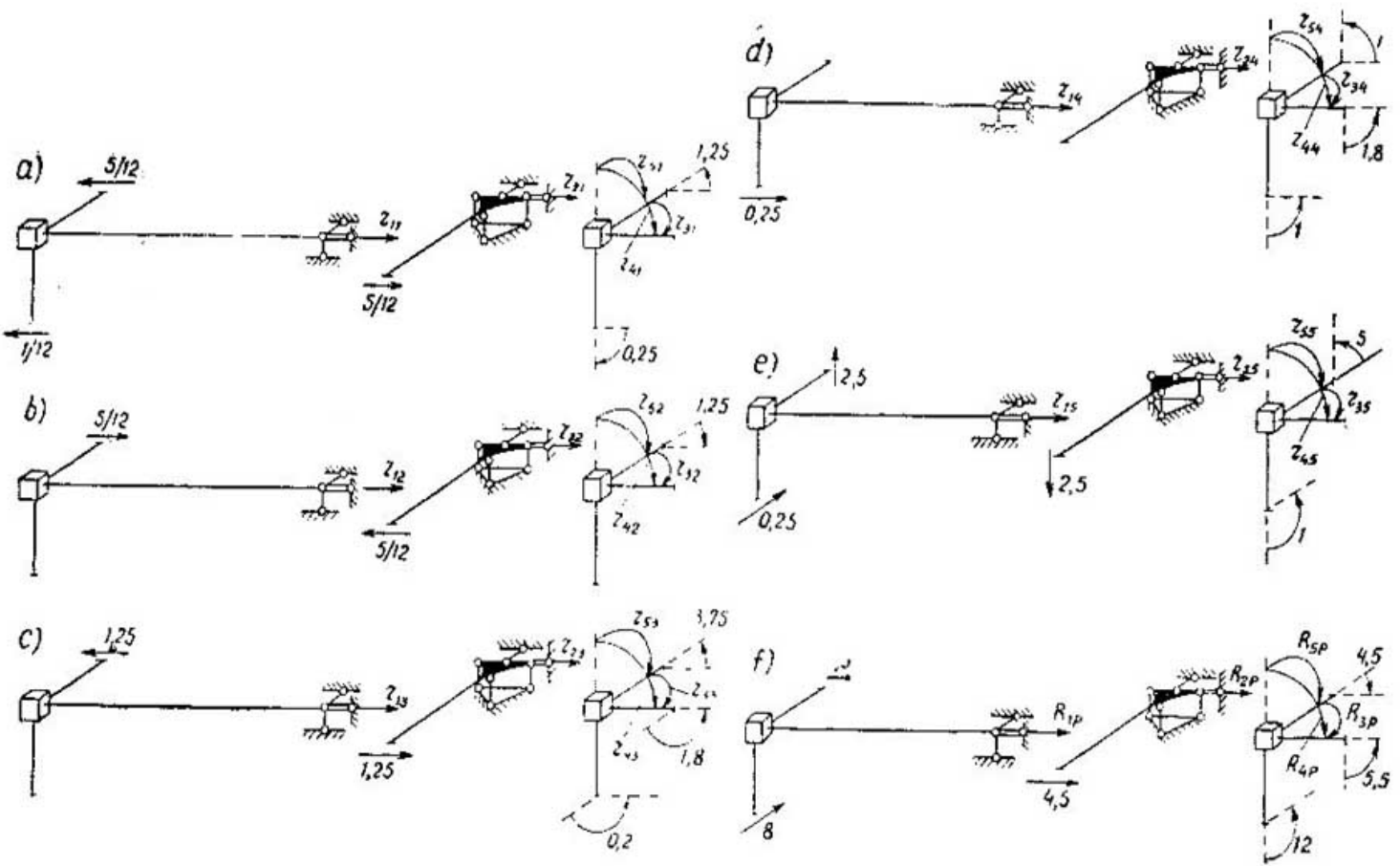

a)
5/12
1/12
5/12
1,25
0,25
b)
5/12
5/12
1,25
c)
1,25
1,25
3,75
1,8
0,2
d)
0,25
1,8
1
e)
2,5
0,25
2,5
5
1
f)
8
4,5
4,5
5,5
12

Fig. 18.8

se calcularon por la fórmula $Q = \frac{M_{der} - M_{izq}}{l}$, su dirección se toma también igual que en un sistema plano.

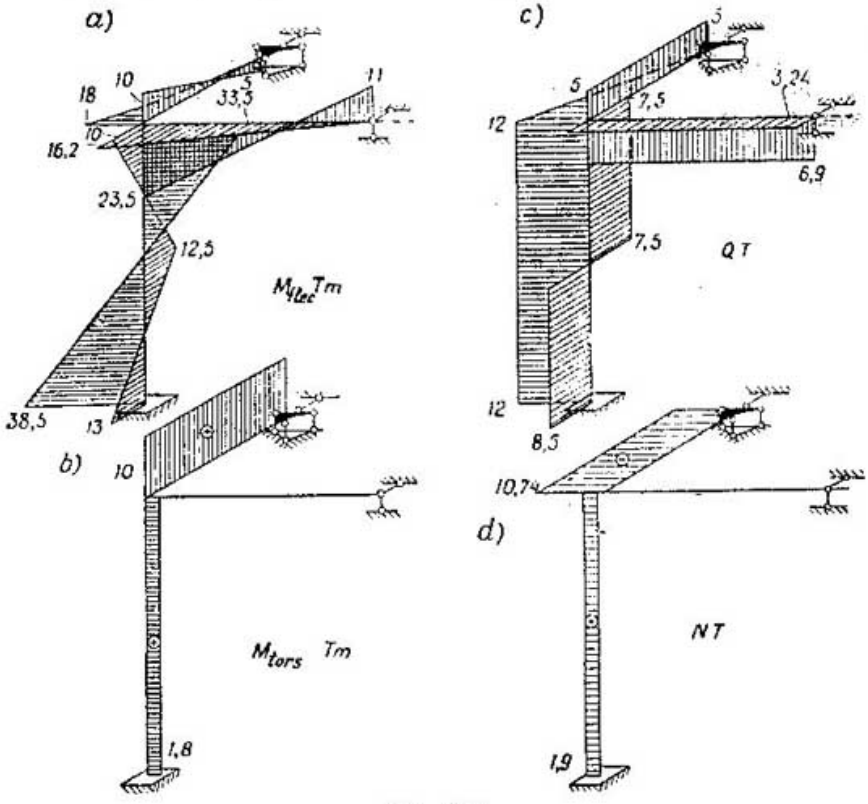


Fig. 18.9

Por el diagrama de $\bar{M}_1$ (fig. 18.18, *a*).

$r_{11} = 0{,}5$; $r_{21} = -\frac{5}{12}$; $r_{31} = 1{,}25$; $r_{41} = -0{,}25$; $r_{51} = 0$.

Por el diagrama de $\bar{M}_2$ (fig. 18.18, b):

$r_{12} = -\frac{5}{12}$; $r_{22} = \frac{5}{12}$; $r_{32} = -1{,}25$; $r_{42} = 0$, $r_{52} = 0$.

Por el diagrama de $\bar{M}_3$ (fig. 18.8, *c*):

$r_{13} = 1{,}25$; $r_{23} = -1{,}25$; $r_{33} = 5{,}75$; $r_{43} = 0$; $r_{53} = 0$.

Por el diagrama de $\bar{M}_4$ (fig. 18.8, *d*):

$r_{14} = -0{,}25$; $r_{24} = 0$; $r_{34} = 0$; $r_{44} = 3{,}8$; $r_{54} = 0$.

Por el diagrama de $\bar{M}_5$ (fig. 18.8, *e*):

$r_{15} = 0$; $r_{25} = 0$; $r_{35} = 0$; $r_{45} = 0$; $r_{55} = 6$.

Por el diagrama de M_p^0 (fig. 18.8, *f*):

$$R_{1P} = -7{,}5; \quad R_{2P} = -4{,}5; \quad R_{3P} = -4{,}5; \quad R_{4P} = 5{,}5; \quad R_{5P} = 12;$$

La verificación de los coeficientes y términos independientes se efectúa del mismo modo que en los sistemas planos, diferenciándose sólo por la consideración de los momentos torsores.

Componemos el sistema de ecuaciones canónicas en la forma general y en cifras:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + r_{14}Z_4 + r_{15}Z_5 + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + r_{24}Z_4 + r_{25}Z_5 + R_{2P} = 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + r_{34}Z_4 + r_{35}Z_5 + R_{3P} = 0; \\ r_{41}Z_1 + r_{42}Z_2 + r_{43}Z_3 + r_{44}Z_4 + r_{45}Z_5 + R_{4P} = 0; \\ r_{51}Z_1 + r_{52}Z_2 + r_{53}Z_3 + r_{54}Z_4 + r_{55}Z_5 + R_{5P} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}5Z_1 - \frac{5}{12}Z_2 + 1{,}25Z_3 - 0{,}25Z_1 - 7{,}5 = 0; \\ -\frac{5}{12}Z_1 + \frac{5}{12}Z_2 - 1{,}25Z_3 - 4{,}5 = 0; \\ 1{,}25Z_1 - 1{,}25Z_2 + 5{,}75Z_3 - 4{,}5 = 0; \\ -0{,}25Z_1 + 3{,}8Z_4 + 5{,}5 = 0; \\ 6Z_5 + 12 = 0. \end{cases}$$

Es más racional resolver el sistema de ecuaciones dado por el procedimiento de Gauss. Resuelto el sistema de ecuaciones, obtenemos los valores numéricos de las incógnitas:

$$Z_1 = 174; \quad Z_2 = 211{,}8; \quad Z_3 = 9;$$
$$Z_4 = 10; \quad Z_5 = -2;$$

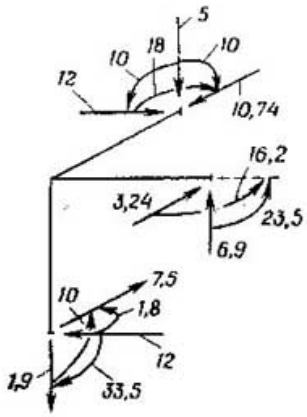


Fig. 18.10

Multiplicando los diagramas unitarios por los valores calculados y adicionándoles el diagrama de carga en el sistema básico, obtenemos los diagramas de los momentos flectores y torsores en el sistema dado (fig. 18.9*a* y *b*).

Empleando el diagrama de los momentos flectores y la fórmula $Q = \frac{dM}{dz}$ calculamos los valores de las fuerzas transversales en las barras y construimos el diagrama de Q (fig. 18.9*c*).

Los valores numéricos de las fuerzas longitudinales en las barras pueden ser calculados partiendo del equilibrio de un nudo rígido; el diagrama de N se muestra en la fig. 18.9*d*.

Para la verificación de los diagramas obtenidos se puede examinar el equilibrio de cualquier parte cortada del pórtico con las fuerzas internas M_{fl}, M_{tors}, Q y N, aplicadas en las secciones (véase por ejemplo, la fig. 18.10).

Además, se puede elegir un sistema básico del método de fuerzas, construir en éste los diagramas de los momentos flectores y torsores y multiplicarlos por los respectivos diagramas de M_{fl} y M_{tors} en el sistema dado. Como resultado de la multiplicación de los diagramas habremos de obtener cero.

CAPÍTULO 19 * FORMA MATRIZ DE LOS CÁLCULOS EN LA MECÁNICA DE CONSTRUCCIÓN

La forma matriz de los cálculos conduce a operaciones uniformes con las matrices, lo cual crea ciertas facilidades para la programación de los cálculos en las calculadoras numéricas (digitales) electrónicas (ETSVM).

1. Matrices de influencia

El objeto de la matriz de influencia de la magnitud S (de reacciones, momentos flectores, fuerzas transversales, etc.) es transformar la matriz columna (vector) de las cargas en vector de la magnitud S.

Suponemos que las fuerzas $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ están aplicadas en los puntos $0, 1, \ldots, n$ del sistema. La matriz de influencia es:

$$B_S = \begin{Vmatrix} \bar{S}_{00}\bar{S}_{01} & \ldots & \bar{S}_{0i} & \ldots & \bar{S}_{0n} \\ \bar{S}_{10}\bar{S}_{11} & \ldots & \bar{S}_{1i} & \ldots & \bar{S}_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{S}_{i0}\bar{S}_{i1} & \ldots & \bar{S}_{ii} & \ldots & \bar{S}_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{S}_{n0}\bar{S}_{n1} & \ldots & \bar{S}_{ni} & \ldots & \bar{S}_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (19.1)$$

Aquí, la i^{ma} columna son los valores de la magnitud S debidos a $P_i = 1$, aplicada en el punto i del sistema.

Si la matriz se compone para los momentos flectores, las fuerzas longitudinales o transversales, entonces la i^{ma} columna de la matriz se obtiene fácilmente por el diagrama respectivo debido a $P_i = 1$.

Si las fuerzas que actúan sobre el sistema son unidireccionales (por ejemplo, la vertical) la i^{ma} línea horizontal de la matriz puede ser escrita por la línea de influencia de S_i.

En los casos en que la magnitud S, habiendo fuerzas concentradas, puede tener dos valores, como, por ejemplo, las fuerzas longitudinal o transversal, entonces,

$$\bar{S}_{il} = \bar{S}_{il}^{\text{izq}} / \bar{S}_{il}^{\text{der}}. \tag{19.2}$$

La transformación del vector de carga P en vector de la magnitud S se efectúa según la expresión

$$\boldsymbol{S} = \bar{\boldsymbol{B}}_S \bar{\boldsymbol{P}}. \tag{19.3}$$

Ejemplo 19.1. Componer la matriz de influencia de los momentos flectores y determinar su vector debido a la carga (fig. 19.1).

En el caso general, cuando la viga está dividida en n partes iguales, la i^{ma} columna de la matriz de influencia de los momentos

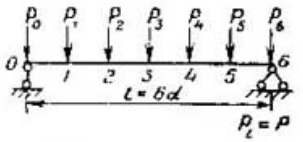


Fig. 19.1

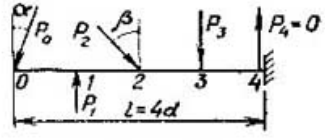


Fig. 19.2

flectores, habiendo las fuerzas verticales, se determina por las fórmulas

$$\bar{M}_{kl} = \frac{l}{n^2} k\,(n - i) \text{ para } k \leqslant i; \tag{19.4}$$

$$\bar{M}_{kl} = \frac{l}{n^2}(n - k) \text{ para } k \geqslant i. \tag{19.5}$$

En nuestro caso, $n = 6$.

Componemos la 4ª columna de la matriz:

$$\text{para } k \leqslant 4 \quad \bar{M}_{k4} = \frac{l}{6^2} k\,(6 - 4);$$

$$\text{para } k \geqslant 4 \quad \bar{M}_{k4} = \frac{l}{6^2} 4\,(6 - k).$$

La cuarta columna es $\frac{l}{36} |\{0\ 2\ 4\ 6\ 8\ 4\ 0\}|$.

Componemos también, análogamente, las restantes columnas. Por la expresión (19.3) tenemos:

$$\boldsymbol{B}_M \boldsymbol{P} = \frac{l}{36} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} P_0 = P \\ P_1 = P \\ P_2 = P \\ P_3 = P \\ P_4 = P \\ P_5 = P \\ P_6 = P \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 15Pl : 36 \\ 24Pl : 36 \\ 27Pl : 36 \\ 24Pl : 36 \\ 15Pl : 36 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Problema 19.2. Componer la matriz de influencia de los momentos flectores de la viga para $n = 5$.

Respuesta:

$$B_M = \frac{l}{25}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Problema 19.3. Componer las matrices de influencia de los momentos flectores y las fuerzas transversales (fig. 19.2).

Indicaciones: las columnas de la matriz se obtienen de los diagramas debidos a las fuerzas $P_i = 1$.

Respuestas:

$$B_M = \frac{l}{4}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3\cos\alpha & 2 & -1\cos\beta & 0 & 0 \\ -4\cos\alpha & 3 & -2\cos\beta & -1 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$B_Q = \begin{Vmatrix} 0/-\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & 0/1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & 1 & 0/-\cos\beta & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\beta & 0/-1 & 0 \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\beta & -1 & 0/1 \end{Vmatrix}$$

2. Matrices de desplazamientos

El cálculo aproximado de las integrales que entran en la fórmula de desplazamientos puede ser efectuado por la fórmula de Simpson, en caso de división de la parte l de la proyección de la viga sobre el eje z (fig. 19.3), en n partes iguales:

$$\Delta_{km} = \int \eta\, dz = \frac{d}{3}[\eta_0 + 4(\eta_1 + \eta_3 + \ldots \eta_{n-1}) + 2(\eta_2 + \eta_4 + \ldots + \eta_{n-2}) + \eta_n]. \qquad (19.6)$$

donde

$$\eta_i = \sum \frac{\bar{S}_{ik} S_{im}}{B_i \cos\alpha_i} = \sum \frac{\bar{S}_{ik} S_{im}}{B_i}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)_i^2}; \qquad (19.7)$$

$\bar{S}_{ik}$ y S_{im} son los esfuerzos respectivos (los momentos flectores, las fuerzas longitudinales o transversales) en el punto i, debidos a $P_k = 1$ y a la carga m;

B_i, la rigidez de la barra en el punto i, que corresponde al esfuerzo S_i;

y_i, la ordenada del eje de la barra.

Si la i^{ma} parte de la barra, cuyo origen se designa por $i-1$ y el extremo por i, con la proyección sobre el eje z igual a d_i, está dividida solamente en dos partes (fig. 19.4), entonces, en caso de tomar en cuenta *solamente* los momentos flectores, tenemos la fórmula

$$\Delta^i_{km} = \frac{d_i}{6EJ_*}\left[\bar{M}^{izq}_{ik} M^{izq}_{im} a^{izq}_i + 4\bar{M}^{med}_{ik} M^{med}_{im} a^{med}_i + \bar{M}^{der}_{ik} M^{der}_{im} a^{der}_i\right], \quad (19.8)$$

donde

$$a_i = EJ_* : E_i J_i \cos\alpha_i; \quad (19.9)$$

EJ_* es la rigidez de cualquier sección de la barra de un sistema tomada como básica.

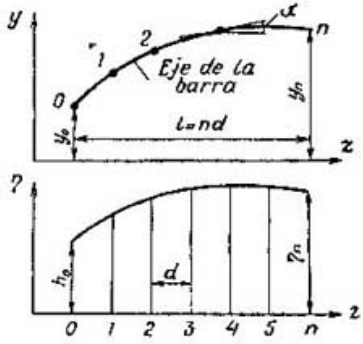


Fig. 19.3

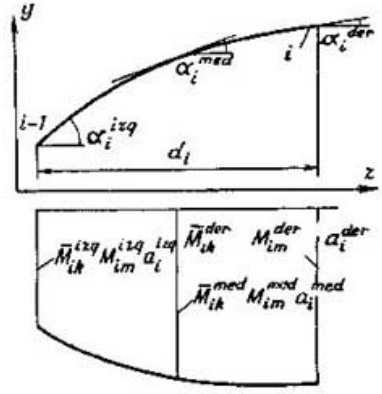


Fig. 19.4

Aquí, i es la numeración de una parte (y no de un punto).

Para las barras rectas, cuando el eje z coincide con el eje de la barra, $\alpha_i = 0$ y el $\cos\alpha_i = 1$.

Si $\bar{M}_{ik}$ es una función lineal y $\frac{M_{im}}{E_i J_i \cos\alpha_i}$ es lineal o una parábola de segundo orden, la fórmula (19.8) proporciona el valor exacto de la integral.

La fórmula (19.8) en la forma matriz es

$$\Delta^i_{km} = \bar{\boldsymbol{M}}'_{ik} \cdot \boldsymbol{A}_i \cdot \boldsymbol{M}_{im}, \quad (19.10)$$

donde

$$1)\ \bar{\boldsymbol{M}}'_{ik} = \left\| \bar{M}^{izq}_{ik} \bar{M}^{med}_{ik} \bar{M}^{der}_{ik} \right\| \quad (19.11)$$

es la matriz-línea de los momentos unitarios $\bar{M}_{ik}$ debidos a $P_k = 1$ en la i^{ma} parte (la columna transpuesta de la matriz de influencia

$B_{\overline{M}_2}$ en esta parte);

$$2)\ \boldsymbol{A}_i = \frac{d_i}{6EJ_*} \cdot \begin{Vmatrix} a_i^{izq} & 0 & 0 \\ 0 & 4a_i^{med} & 0 \\ 0 & 0 & a_i^{der} \end{Vmatrix} \tag{19.12}$$

es la matriz de ductilidad en la i^{ma} parte;

$$3)\ \boldsymbol{M}_{im} = \vec{\boldsymbol{M}}_{im} = \begin{Vmatrix} M_{im}^{izq} \\ M_{im}^{med} \\ M_{im}^{der} \end{Vmatrix} = [\{M_{im}^{izq} M_{im}^{med} M_{im}^{der}\}] \tag{19.13}$$

es la matriz-columna de los momentos M_{im} en la i^{ma} parte, debidos a la carga.

En (19.13) se indica la designación de la matriz de columna en las tres formas utilizadas aquí.

El desplazamiento completo, en el caso de n partes, es

$$\Delta_{km} \| \overline{M}'_{1k} \overline{M}'_{2k} \ldots \overline{M}'_{nk} \| \cdot \boldsymbol{A} \cdot | \{ \boldsymbol{M}_{1m} \boldsymbol{M}_{2m} \ldots \boldsymbol{M}_{nm} \} |, \tag{19.14}$$

donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \boldsymbol{A}_n \end{Vmatrix} \tag{19.15}$$

es la matriz cuasidiagonal de las matrices de ductibilidad de las barras o de sus partes.

Frecuentemente, en las barras rectas, los diagramas de $(\overline{M}_{ik})$ y (M_{im}) son lineales, y por eso para (19.14) y (19.15) tenemos:

$$1)\ \overline{\boldsymbol{M}}'_{ik} = \| \overline{M}_{ik}^{izq} \overline{M}_{ik}^{der} \|; \tag{19.16}$$

$$2)\ \boldsymbol{A}_i = \frac{d_i}{6EJ_*} \begin{Vmatrix} (a_i^{izq} + a_i^{med}) a_i^{med} \\ a_i^{med} (a_i^{med} + a_i^{der}) \end{Vmatrix}; \tag{19.17}$$

$$3)\ \boldsymbol{M}_{im} = \begin{Vmatrix} M_{im}^{izq} \\ M_{im}^{der} \end{Vmatrix} = | \{ M_{im}^{izq} M_{im}^{der} \} |. \tag{19.18}$$

Además, si la sección de la barra recta en la parte es constante, entonces, $a_i^{izq} = a_i^{med} = a_i^{der} = a_i$ y la matriz $\boldsymbol{A}_i$ será:

$$\boldsymbol{A}_i = \frac{d_i}{6EJ_*} \begin{Vmatrix} 2a_i & a_i \\ a_i & 2a_i \end{Vmatrix} = \frac{d_i}{6E_i J_i \cos \alpha_i} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}. \tag{19.19}$$

En aquellos casos cuando

$$M_i^{der} = M_{i+1}^{izq}, \tag{19.20}$$

la matriz A_{i+1} puede ser aplicada con el ángulo izquierdo superior, en el ángulo derecho inferior de la matriz A_i, donde los

valores $a_{\text{ángulos}}$ se obtienen sumando a_i^{der} y a_{i+1}^{izq}, o sea

$$a_{\text{ángulos}} = a_i^{\text{der}} + a_{i+1}^{\text{izq}}. \tag{19.21}$$

Para las barras rectas, cuando $\alpha = 0$, las líneas de la matriz de ductilidad (19.19) pueden ser compuestas como los ángulos de giro sobre los apoyos de una viga simplemente apoyada, debidos a los momentos iguales a la unidad y aplicados por turno a los apoyos izquierdo y derecho.

El cálculo de las deformaciones de alargamientos y desplazamientos, se efectúa sobre la base de las matrices mismas que se han compuesto para el cálculo de las deformaciones de flexión, por medio de respectivas sustituciones de simbolos:

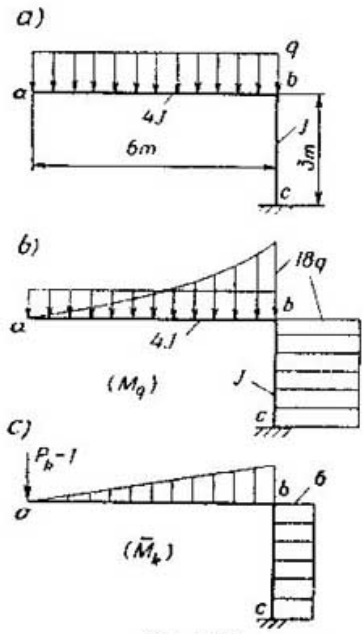


Fig 19.5

M_{ik}, M_{im} y a_i por $\bar{N}_{ik}$, N_{im} y $b_i = \frac{EF_*}{E_iF_i\cos\alpha_i}$ respectivamente (19.22)

$\bar{M}_{ik}$, M_{im} y a_i por $\bar{Q}_{ik}$, Q_{im} y $c_i = \mu\frac{EF_*}{G_iF_i\cos\alpha_i}$, respectivamente (19.23)

EJ_* por EF_*.

Si, como sucede frecuentemente para las barras rectas, $\bar{N}_{ik}$, N_{im} y b_i o $\bar{Q}_{ik}$, Q_{im} y c_i son constantes a todo lo largo de la barra o en una parte de ella, las matrices A_i serán respectivamente:

$$\boldsymbol{A}_i^N = \frac{d_ib_i}{EF_*} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{A}_i^Q = \frac{d_ic_i}{EF_*}. \tag{19.24}$$

La fórmula de los desplazamientos para las armaduras en el registro matriz es:

$$\Delta_{km} = \sum \bar{N}_{ik}\frac{N_{im}}{E_iF_i}l_i = \bar{\boldsymbol{N}}'_{ik}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{N}_{im}, \tag{19.25}$$

donde 1) $\bar{\boldsymbol{N}}'_{ik} = \|\bar{N}_{1k}\bar{N}_{2k}\ \ldots\ \bar{N}_{nk}\|$ (19.26)

es la matriz línea de los esfuerzos unitarios $\bar{N}_{ik}$ debidos a $P_k = 1$;

$$2)\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{EF_*}\begin{Vmatrix} l_1b_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & l_2b_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & l_nb_n \end{Vmatrix} \tag{19.27}$$

es la matriz de ductilidad;

aquí, $b_i = EF_* : E_iF_i$ ($\cos \alpha_i = 1$);

$$3)\ \boldsymbol{N}_{im} = \| \{N_{1m} N_{2m} \ldots N_{nm}\} \| \qquad (19.28)$$

es la matriz columna de los esfuerzos N_{im}.

Ejemplo 19.4. Determinar el desplazamiento vertical del punto a (fig. 19.5).

Los diagramas necesarios se dan en la fig. 19.5*b*, *c*.

Componemos las matrices de ductilidad.

Para la barra ab que tiene el diagrama de (M_q) curvilíneo, componemos la matriz $\mathbf{A}_{ab}$ por (19.12), tomando como EJ_* la rigidez de la barra vertical EJ.

Para la barra bc que tiene los diagramas de (Mq) y $(\bar{M}_k)$ lineales, componemos la matriz A_{bc} por (19.19):

$$\boldsymbol{A}_{ab} = \frac{6}{6EJ} \begin{Vmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{Vmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}_{bc} = \frac{3}{6EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Por la fórmula (19.14) y teniendo en cuenta (19.11), (19.13), (19.16) y (19.18) obtenemos:

$$\Delta_{kq} = \| 0\ 3\ 6\ 6\ 6\ 6 \| \cdot \begin{Vmatrix} \frac{6}{6EJ} \begin{Vmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{Vmatrix} & \\ & \frac{3}{6EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 4{,}5q \\ 18q \\ 18q \\ 18q \end{Vmatrix}.$$

Después de las simplificaciones:

$$4EJ\Delta_{kq} = \| 0\ 3\ 6\ 6\ 6\ 6 \| \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 4{,}5q \\ 18{,}0q \\ 18{,}0q \\ 18{,}0q \end{Vmatrix}. \qquad (A)$$

Despejamos la igualdad matriz de izquierda a derecha:

$$4EJ\Delta_{kq} = \| 0\ 12\ 6\ 36\ 36 \| \cdot [\{0\ 4{,}5q\ 18{,}0q\ 18{,}0q\ 18{,}0q\}] = 1458q.$$

Por cuanto en los diagramas de (M_q) y $(\bar{M}_k)$, en el punto b las ordenadas angulares son idénticas, para reducir los cálculos, las matrices $\boldsymbol{A}_{ab}$ y $\mathbf{A}_{bc}$ se pueden superponer con ángulos, una sobre otra, y emplear la fórmula (19.21), anotando las ordenadas

angulares de los diagramas una sola vez cada una:

$$4EJ\Delta_{kq} = \|0\ 3\ 6\ 6\| \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 4{,}5q \\ 18{,}0q \\ 18{,}0q \end{Vmatrix} =$$

$$= \|0\ 12\ 42\ 36\| \cdot [\{0,\ 4{,}5q\ 18q\ 18{,}0q\}] = 1458q.$$

Ejemplos 19.5. Determinar el desplazamiento vertical debido al momento $M = 5$ tfm en el punto A, en el sistema examinado en el ejemplo (8.4).

Los diagramas indispensables se representan en la fig. 8.5.

Convenimos en tomar los momentos, trazados por afuera del contorno, con el signo más.

Los diagramas son lineales, por eso empleamos las matrices A_i por (19.19).

Por la fórmula (19.14) tenemos:

$$\Delta_{km} = \|0\ 2\ 2\ -2\ -2\ 0\| \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \frac{2}{6RJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} & & \\ & \frac{3}{6EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} & \\ & & \frac{2}{6EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \end{Vmatrix}.$$

Después de realizar simplificaciones con superposición de los ángulos de las matrices, tenemos:

$$6EJ\Delta_{km} = \|0\ 2\ -2\ 0\| \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -5 \end{Vmatrix} =$$

$$= \|4\ 14\ -14\ -4\| \cdot |\{0\ 0\ -5\ -5\}| = 90.$$

3. Matrices de pesos elásticos

Para la construcción de los diagramas de los desplazamientos de una sola dirección, como, por ejemplo, los diagramas de las flechas de vigas y arcos de sección variable, se emplea la carga convencional q^* (fig. 19.6) en la viga, también *convencional*, con condiciones extremas (con apoyos) establecidas en función de las fijaciones del sistema dado (véanse los libros de texto).

La expresión de la carga convencional (ficticia) para los sistemas planos es:

$$q_m^* = -\frac{M_m}{EJ\cos\alpha} + \frac{d}{dz}\left(\frac{N_m \operatorname{tg}\alpha}{EF}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu\,\frac{Q_m}{GF}\right). \quad (19.29)^1)$$

Los desplazamientos Δ se determinan de la ecuación

$$\frac{d^2\Delta}{dz^2} = q^*. \quad (19.30)$$

Respectivamente,

$\frac{d\Delta}{dz} = Q^*$ (fuerza transversal convencional debida a la carga q^*);

$\Delta = M^*$ (momento flector convencional debido a la carga q^*).

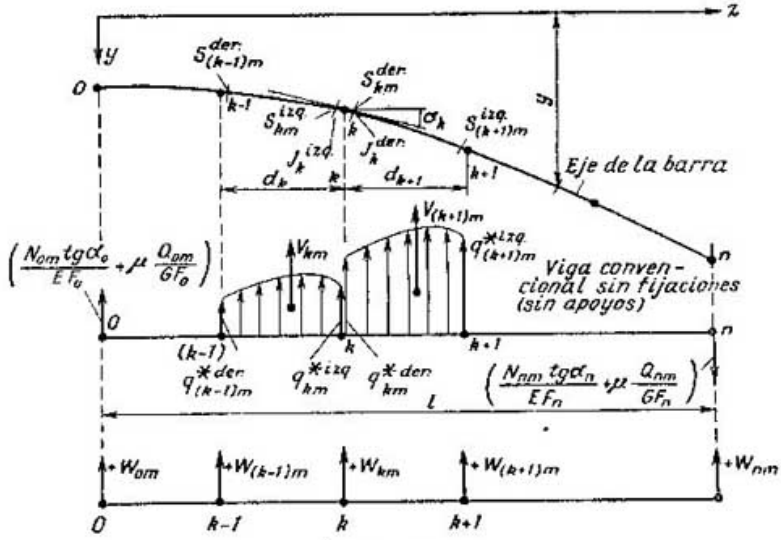


Fig. 19.6

Comúnmente, en lugar de la resolución de la ecuación (19.30), el diagrama de los desplazamientos Δ se obtiene, por los medios habituales, como diagrama de los momentos flectores M^* debidos a la carga convencional q^* en la viga convencional. Para esto, el diagrama curvilíneo de q_m^* se divide en partes y se sustituye por los pesos concentrados V_{km}, los cuales, por la ley de la palanca, se descomponen en fuerzas W_{km}, llamadas pesos elásticos (19.6), que actúan en el límite de las partes, los momentos M^* se calculan para los puntos que son límites de las partes. En cálculos aproximados, el diagrama curvilíneo q_m^* se aproxima a una recta o una parábola.

---

[1]) B. A. Kiseliov. Mecánica de construcción. Tomo I. Editorial Mir, Moscú, 1972, págs. 304–305.

Empleando (19.29) y tomando en cuenta N y Q, es necesario tener presente que en los extremos de la viga convencional, además de los pesos elásticos, deberán ser consideradas también las fuerzas concentradas complementarias:

$$Q^*(0) = \frac{N_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{EF_0} + \mu \frac{Q_0}{GF_0};$$

$$Q^*(l) = \frac{N_n \operatorname{tg} \alpha_n}{EF_n} + \mu \frac{Q_n}{GE_n},$$

(+ N es tracción).

En caso de que q_m^* se aproxime a líneas rectas, según (19.29) obtenemos la fórmula de los pesos elásticos.

1) Los pesos elásticos intermedios [$k = 1, 2, \ldots, (n-1)$], son:

$$W_{km} = \frac{d_0}{6EJ_*}\left[\dot{q}^{\text{der}}_{(k-1)\,m} + 2\dot{q}^{\text{izq}}_{km} + 2\dot{q}^{\text{der}}_{km} + \dot{q}^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}\right] +$$

$$+ 1/2\left[\frac{N^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}}{EF^{\text{izq}}_{k+1}} \operatorname{tg} \alpha^{\text{izq}}_{k+1} + \frac{N^{\text{der}}_{km}}{EF^{\text{der}}_{k}} \operatorname{tg} \alpha^{\text{der}}_{k} - \right.$$

$$\left. - \frac{N^{\text{izq}}_{km}}{EF^{\text{izq}}_{k}} \operatorname{tg} \alpha^{\text{izq}}_{k} - \frac{N^{\text{der}}_{(k-1)\,m}}{EF^{\text{der}}_{k-1}} \operatorname{tg} \alpha^{\text{der}}_{k-1}\right] +$$

$$+ 1/2\left[\mu_{k+1} \frac{Q^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}}{GF^{\text{izq}}_{k+1}} + \mu_k \frac{Q^{\text{der}}_{km}}{GF^{\text{der}}_{k}} - \mu_k \frac{Q^{\text{izq}}_{km}}{GF^{\text{izq}}_{k}} - \mu_{k-1} \frac{Q^{\text{der}}_{(k-1)\,m}}{GF^{\text{der}}_{k-1}}\right], \quad (19.31)$$

donde J_* es el momento de inercia de cualquier sección de la barra;

d_0, la longitud de cualquier parte;

$$\dot{q}^{\text{der}}_{(k-1)\,m} = -M^{\text{der}}_{(k-1)\,m} J_* d_k : J^{\text{der}}_{k-1} d_0 \cos \alpha^{\text{der}}_{k-1};$$

$$\dot{q}^{\text{izq}}_{km} = -M^{\text{izq}}_{km} J_* d_k : J^{\text{izq}}_{k} d_0 \cos \alpha^{\text{izq}}_{k};$$

$$\dot{q}^{\text{der}}_{km} = -M^{\text{der}}_{km} J_* d_{k+1} : J^{\text{der}}_{k} d_0 \cos \alpha^{\text{der}}_{k}; \quad (19.32)$$

$$\dot{q}^{\text{izq}}_{(k+1)\,m} = -M^{\text{izq}}_{(k+1)\,m} J_* d_{k+1} : J^{\text{izq}}_{k+1} d_0 \cos \alpha^{\text{izq}}_{k+1}.$$

2) Los pesos elásticos extremos son:

a) extremo izquierdo

$$W_{0m} = \frac{d_0}{6EJ_*}\left(2\dot{q}^{\text{der}}_{0m} + \dot{q}^{\text{izq}}_{1m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{N^{\text{izq}}_{1m}}{EF^{\text{izq}}_{1}} \operatorname{tg} \alpha^{\text{izq}}_{1} + \frac{N^{\text{der}}_{0m}}{EF^{\text{der}}_{0}} \operatorname{tg} \alpha^{\text{der}}_{0}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\mu_1 \frac{Q^{\text{izq}}_{1m}}{GF^{\text{izq}}_{1}} + \mu_0 \frac{Q^{\text{der}}_{0m}}{GF^{\text{der}}_{0}}\right); \quad (19.33)$$

b) extremo derecho

$$W_{nm} = \frac{d_0}{6EJ_*}\left(\dot{q}^{\text{der}}_{(n-1)\,m} + 2\dot{q}^{\text{izq}}_{nm}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{N^{\text{der}}_{(n-1)\,m}}{EF^{\text{der}}_{n-1}}\operatorname{tg}\alpha^{\text{der}}_{n-1} + \frac{N^{\text{izq}}_{nm}}{EF^{\text{izq}}_{n}}\operatorname{tg}\alpha^{\text{izq}}_{n}\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\mu_{n-1}\frac{Q^{\text{der}}_{(n-1)\,m}}{GF^{\text{der}}_{n-1}} + \mu_n\frac{Q^{\text{izq}}_{nm}}{GF^{\text{izq}}_{n}}\right). \qquad (19.34)$$

En las expresiones (19.31)—(19.34) y en adelante, el índice de la letra d corresponde al número de la parte y, el de las demás magnitudes, al número del punto (fig. 19.6).

La expresión de los pesos elásticos en la forma matriz es:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^{M}_{m} + \boldsymbol{W}^{(N)}_{m} + \boldsymbol{W}^{(Q)}_{m} = \boldsymbol{W}^{(M)}M_m + \boldsymbol{W}^{(N)}N_m + \boldsymbol{W}^{(Q)}Q_m, \qquad (19.35)$$

donde

1)
$$\boldsymbol{W}^{(M)} = -\frac{d_0}{6EJ_*}\begin{Vmatrix} 2a^{\text{der}}_0 & a^{\text{izq}}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{\text{der}}_0 & 2a^{\text{izq}}_1 & 2a^{\text{der}}_1 & a^{\text{izq}}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{\text{der}}_1 & 2a^{\text{izq}}_2 & 2a^{\text{der}}_2 & a^{\text{izq}}_3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\text{der}}_{n-2} & 2a^{\text{izq}}_{n-1} & 2a^{\text{izq}}_{n-1} & a^{\text{izq}}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\text{der}}_{n-1} & 2a^{\text{izq}}_n \end{Vmatrix} \qquad (19.36)$$

Aquí;

$$a^{\text{der}}_{k-1} = d_k J_* : J^{\text{der}}_{k-1} d_0 \cos\alpha^{\text{der}}_{k-1};$$

$$a^{\text{izq}}_{k} = d_k J_k : J^{\text{izq}}_{k} d_0 \cos\alpha^{\text{izq}}_{k};$$

$$a^{\text{der}}_{k} = d_{k+1} J_* : J^{\text{der}}_{k} d_0 \cos\alpha^{\text{der}}_{k};$$

$$a^{\text{izq}}_{k+1} = d_{k+1} J_* : J^{\text{izq}}_{k+1} d_0 \cos\alpha^{\text{izq}}_{k+1};$$

$$M_m = \left[\left\{M^{\text{der}}_{0m} M^{\text{izq}}_{1m} M^{\text{der}}_{1m} \ldots M^{\text{izq}}_{(n-1)\,m} M^{\text{der}}_{(n-1)\,m} M^{\text{izq}}_{nm}\right\}\right] \qquad (19.37)$$

(matriz columna de los momentos M_m):

$$W^{(N)} = \frac{1}{2EF_*} \times$$

2)
$$\times \begin{Vmatrix} b^{\text{der}}_0 & b^{\text{izq}}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b^{\text{der}}_0 & -b^{\text{izq}}_1 & b^{\text{der}}_1 & b^{\text{izq}}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^{\text{der}}_1 & -b^{\text{izq}}_2 & b^{\text{der}}_2 & b^{\text{izq}}_3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b^{\text{der}}_{n-2} & -b^{\text{izq}}_{n-1} & b^{\text{der}}_{n-1} & b^{\text{izq}}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b^{\text{der}}_{n-1} & -b^{\text{izq}}_n \end{Vmatrix}. \qquad (19.38)$$

$$b_i = EF_* \operatorname{tg}\alpha_i : E_i F_i;$$

$$\boldsymbol{N}_m = \left[\left\{N^{\text{der}}_{0m} N^{\text{izq}}_{1m} N^{\text{der}}_{1m} \ldots N^{\text{izq}}_{(n-1)\,m} N^{\text{der}}_{(n-1)\,m} N^{\text{izq}}_{nm}\right\}\right], \qquad (19.39)$$

3) Las matrices $W^{(Q)}$ y Q_m se obtienen de las matrices $W^{(N)}$ y N_m sustituyendo:
en la matriz (19.38), b_i por $c_i = \mu EF_* : G_i F_i$;
en la matriz columna (19.39), N_i por Q_i.

En aquellos casos cuando

$$M_k^{izq} = M_k^{der}; \quad N_k^{izq} = N_k^{der};$$

$$Q_k^{izq} = Q_k^{der}; \quad \alpha_k^{izq} = \alpha_k^{der}; \quad J_k^{izq} = J_k^{der}; \quad F_k^{izq} = F_k^{der}; \quad d_k = d_{k+1} = d,$$

las matrices serán:

$$W^{(M)} = \frac{-d}{6EJ_*} \begin{Vmatrix} 2a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & 4a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 4a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & 4a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & 2a_n \end{Vmatrix}; \quad (19.40)$$

$$a_k = J_* : J_k \cos \alpha_k;$$

$$M_m = |\{M_{0m} M_{1m} M_{2m} \ldots M_{(n-1)m} M_{nm}\}|; \quad (19.41)$$

$$W^{(N)} = \frac{1}{2EJ_*} \begin{Vmatrix} b_0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-2} & 0 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & b_n \end{Vmatrix}; \quad (19.42)$$

$$N_m = |\{N_{0m} N_{1m} N_{2m} \ldots N_{(n-1)m} N_{nm}\}|. \quad (19.43)$$

Si en estos mismos casos, la carga q^* se aproxima a una parábola, la matriz $W^{(M)}$ tendrá la siguiente forma:

$$W^{(M)} = \frac{-d}{12EJ_*} \begin{Vmatrix} 3{,}5a_0 & 3a_1 & -0{,}5a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & 10a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 10a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & 10a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5a_{n-2} & 3a_{n-1} & 3{,}5a_n \end{Vmatrix}. \quad (19.44)$$

Si la carga q^*, calculada por (19.29), considerando solamente los momentos flectores, describe una parábola o una recta a todo lo largo de la viga, en estas condiciones la matriz (19.44) determina los valores exactos de los pesos elásticos y, la matriz (19.40) da los valores exactos de los pesos elásticos solamente cuando q^* describe una recta.

Si la viga quebrada (fig. 19.7) o curva se sustituye, en forma aproximada, por una quebrada, los pesos elásticos se escriben, por lo común en la siguiente forma.

1. Los pesos intermedios [cuando $k = 1, 2, \ldots, (n = 1)$] son:

$$W_{km} = -\frac{d_k}{6\cos\alpha_k EJ_k}\left(M^{\text{der}}_{(k-1)\,m} + 2M^{\text{izq}}_{km}\right) -$$

$$-\frac{d_{k+1}}{6\cos\alpha_{k+1}EJ_{k+1}}\left(2M^{\text{der}}_{km} + M^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}\right) + \frac{N^{\text{der}}_{km} + N^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}}{2EF_{k+1}}\operatorname{tg}\alpha_{k+1} -$$

$$-\frac{N^{\text{izq}}_{km} + N^{\text{der}}_{(k-1)\,m}}{2EF_k}\operatorname{tg}\alpha_k + \mu_{k+1}\frac{Q^{\text{der}}_{km} + Q^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}}{2GF_{k+1}} - \mu_k\frac{Q^{\text{izq}}_{km} + Q^{\text{der}}_{(k-1)\,m}}{2GF_k}. \tag{19.45}$$

2. Los pesos extremos son:

a) extremo izquierdo

$$W_{0m} = -\frac{d_1}{6\cos\alpha_1 EJ_1}\left(2M^{\text{der}}_{0m} + M^{\text{izq}}_{1m}\right) +$$

$$+\frac{N^{\text{der}}_{0m} + N^{\text{izq}}_{1m}}{2EF_1}\operatorname{tg}\alpha_1 + \mu_1\frac{Q^{\text{der}}_{0m} + Q^{\text{izq}}_{1m}}{2GF_1}; \tag{19.46}$$

b) extremo derecho

$$W_{nm} = -\frac{d_n}{6\cos\alpha_n EJ_n}\left(M^{\text{der}}_{(n-1)\,m} + 2M^{\text{izq}}_{nm}\right) -$$

$$-\frac{N^{\text{izq}}_{nm} + N^{\text{der}}_{(n-1)\,m}}{2EF_n}\operatorname{tg}\alpha_n - \mu_n\frac{Q^{\text{izq}}_{nm} + Q^{\text{der}}_{(n-1)\,m}}{2GF_n}. \tag{19.47}$$

Las matrices (19.36)—(19.43) pueden ser fácilmente adaptadas también para los pesos elásticos (19.45)—(19.47).

Los desplazamientos Δ, por la dirección de los pesos elásticos, se determinan sobre la base de la igualdad matriz

$$\Delta = \boldsymbol{B}_M \boldsymbol{W}_m = \boldsymbol{B}_M\left[\boldsymbol{W}^{(M)}_m + \boldsymbol{W}^{(N)}_m + \boldsymbol{W}^{(Q)}_m\right] =$$

$$= \boldsymbol{B}_M\left(\boldsymbol{W}^{(M)}M_m + \boldsymbol{W}^{(N)}N_m + \boldsymbol{W}^{(Q)}Q_m\right), \tag{19.48}$$

donde $\boldsymbol{B}_M$ es la matriz de influencia de los momentos flectores en la viga convencional.

En los casos en que el diagrama de (M_i), debido a la fuerza $P_i = 1$, es un polígono con los vértices en los límites de las partes d (o más o menos aproximado a tal polígono), el desplazamiento por la dirección de la fuerza P_i, en el caso de considerar únicamente las deformaciones de flexión, se determina por la fórmula

$$\Delta_{im} = -\sum W^M_{km} \cdot \bar{M}_{ki}, \tag{19.49}$$

donde $\bar{M}_{ki}$ es el momento debido a la fuerza $P_i = 1$ en el punto k.

Ejemplo 19.6. Construir el diagrama de las flechas de una viga de sección variable (fig. 19.8) debidas a los pesos elásticos,

si su momento de inercia varía por la ley

$$J(z) = J_0 : \left[n + 4(1-n)\frac{z}{l} - 4(1-n)\frac{z^2}{l^2}\right], \qquad (a)$$

donde J_0 es el momento de inercia de la sección media de la viga, y $n = \frac{J_0}{J_{(0)}}$.

La resolución exacta de tal problema por medio de la integración de la ecuación (19.29), sin tomar en cuenta Q, dio

$$\Delta = v(z) = \frac{Pl^2}{16EJ_0}(5+n)z - \frac{Pn}{2EJ_0} \times$$
$$\times \frac{z^3}{3!} - \frac{4P(1-n)}{lEJ_0}\frac{z^4}{4!} + \frac{12P}{l^2EJ_0}(1-n)\frac{z^5}{5!}. \qquad (b)$$

Dividimos la viga en cuatro partes. Como J_* tomamos J_0. Entonces, a_i en el caso

$$J_{(0)} = \frac{J_0}{n};\ J\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{4J_0}{3+n} : a_0 = n;$$

$$a_1 = \frac{3+n}{4};\quad a_2 = 1.$$

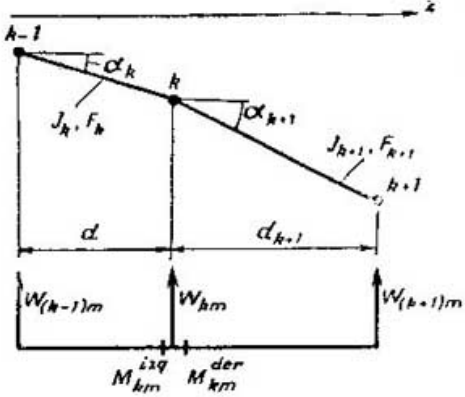


Fig. 19.7

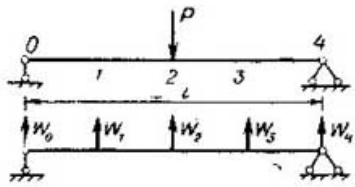


Fig. 19.8

Componemos la matriz de los pesos elásticos por (19.35) y (19.40).

$$W_m^{(M)} = \frac{-l}{24EJ_0} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 2n & \frac{3+n}{n} & 0 & 0 & 0 \\ n & (3+n) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3+n}{4} & 4 & \frac{3+n}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (3+n) & n \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3+n}{4} & 2n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{Pl}{8} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = -\frac{Pl^2}{768EJ_0} \begin{Vmatrix} 3+n \\ 20+4n \\ 38+2n \\ 20+4n \\ 3+n \end{Vmatrix}$$

La viga convencional, en nuestro caso, será igualmente una viga sobre dos apoyos.

Componemos la expresión (19.48) excluyendo los pesos elásticos que están sobre los apoyos y considerando positiva a la direc-

ción de los pesos elásticos que va hacia arriba:

$$\Delta = B_M W_m^{(M)} = -\frac{1}{16}\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \left(\frac{-Pl^2}{768}\right) \begin{Vmatrix} 20+4n \\ 38+2n \\ 20+4n \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{Pl^3}{3072EI_0} \begin{Vmatrix} 39+5n \\ 58+6n \\ 39+5n \end{Vmatrix}.$$

Los valores exactos, por (b), son:

$$\Delta = \frac{Pl^3}{3072EI_0} \begin{Vmatrix} 38{,}3+5{,}7n \\ 57{,}6+6{,}4n \\ 38{,}3+5{,}7n \end{Vmatrix}.$$

La reacción de apoyo de la viga convencional, igual a $-\sum W_m^{(M)} : 2$, determina el ángulo de inclinación de la tangente a la línea elástica en el apoyo: $-\frac{\sum W_m^{(M)}}{2} = \frac{Pl^2}{768EI_0}(42+6n)$ [el valor exacto, por (*b*), es $\frac{Pl^2}{768EI_0}(40+8n)$].

Para $n = 1$, cuando los pesos elásticos se hacen exactos, las flechas de la viga obtenidas por los pesos elásticos coinciden con los valores exactos.

4. Forma matriz del método de fuerzas

Las ecuaciones canónicas del método de fuerzas son

$$DX + D_P = 0 \tag{19.50}$$

donde

$$1)\quad D = \| \delta_{km} \| = \begin{Vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{Vmatrix} \tag{19.51}$$

en la matriz cuadrada de los coeficientes de las ecuaciones canónicas;

$$2)\quad X = |\{X_1 X_2 \dots X_n\}| \tag{19.52}$$

es la matriz columna (vector) de las incógnitas;

$$3)\quad D_P = |\{\Delta_k\}| = |\{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n\}| \tag{19.53}$$

es la matriz columna de los términos independientes

$$\Delta_k = \Delta_{kP} + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Delta}. \tag{19.54}$$

Si el sistema básico está dividido en t partes (para los pórticos — barras) y los desplazamientos se determinan considerando únicamente los momentos flectores, entonces

$$\boldsymbol{D} = \bar{\boldsymbol{M}}' \cdot \boldsymbol{A} \cdot \bar{\boldsymbol{M}}, \tag{19.55}$$

donde 1)
$$\bar{\boldsymbol{M}} = \begin{Vmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \dots & \bar{M}_{1n} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} & \dots & \bar{M}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{M}_{t1} & \bar{M}_{t2} & \dots & \bar{M}_{tn} \end{Vmatrix} \tag{19.56}$$

es la matriz rectangular de t líneas y n columnas; estas últimas están compuestas por columnas de momentos unitarios $\bar{M}_{ik}$ debidos a $X_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$), en la i^{ma} parte ($i = 1, 2, \dots, t$), determinados por (19.11) o (19.16), en función de las condiciones;

$$2)\ \boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A}_t \end{Vmatrix} \tag{19.57}$$

es la matriz diagonal de ductibilidad en bloque de las matrices de ductibilidad en distintas partes, escritas por (19.12), (19.17) o (19.19) en función de las condiciones;

3) $\bar{\boldsymbol{M}}'$ es la matriz transpuesta $\bar{\boldsymbol{M}}$ [véase (19.56)]. (19.58)

Por cuanto $\delta_{km} = \delta_{mk}$, entonces, para abreviar los cálculos, la segunda línea de la matriz (19.58) puede multiplicarse solamente por las columnas, menos la primera de la matriz (19.56); la tersera línea de la matriz (19.58) puede multiplicarse por las columnas excepto la primera y la segunda de la matriz (19.56), etc.

Señalemos, sin embargo, que la multiplicación completa de las matrices mencionadas da la verificación de los coeficientes recíprocos.

La verificación de la matriz **D** se efectúa por la igualdad

$$(\bar{M}_s) \cdot (\bar{M}_s) = \bar{\boldsymbol{M}}_s' \cdot \boldsymbol{A} \cdot \bar{\boldsymbol{M}}_s, \tag{19.59}$$

donde

$$1)\quad \bar{\boldsymbol{M}}_s = |\{\bar{M}_{1s}\bar{M}_{2s} \dots \bar{M}_{ts}\}| \tag{19.60}$$

es la matriz-columna de las matrices-columnas de los momentos sumantes unitarios en distantas partes, determinados en dependencia del tipo de la matriz $\boldsymbol{A}$ (19.57), por la fórmulas:

$$\bar{\boldsymbol{M}}_{is} = |\{\bar{M}_{is}^{izq} \cdot \bar{M}_{is}^{med} \cdot \bar{M}_{is}^{der}\}| \tag{19.61}$$

o bien,

$$\bar{\boldsymbol{M}}_{is} = |\{\bar{M}_{is}^{izq} \cdot M_{is}^{der}\}|, \tag{19.62}$$

$$\boldsymbol{D}_p = \bar{\boldsymbol{M}}' \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M}_p^0, \tag{19.63}$$

donde $\bar{M}$ y A lo son, respectivamente, por (19.56) y (19.57), y

$$M_P^0 = |\{M_{1P}^0 M_{2P}^0 \ldots M_{lP}^0\}| \qquad (19.64)$$

es la matriz-columna de las matrices-columnas de los momentos M_P^0 en las distintas partes del sistema básico, determinados por las fórmulas análogas a (19.61) o (19.62), sustituyendo $\bar{M}_{ls}$ por M_{lP}^0. La verificación de la matriz D_P es:

$$(M_P^0) \cdot (\bar{M}_s) = \bar{M}_s' \cdot A \cdot M_P^0, \qquad (19.65)$$

donde $\bar{M}_s$, A y M_P^0 son por (19.60), (19.57) y (19.64), respectivamente.

En concordancia con (19.50), (19.55) y (19.58),

$$\vec{X} = -D^{-1} D_p = -(\bar{M}' \cdot A \cdot \bar{M})^{-1} (\bar{M}' \cdot A \cdot M_P^0). \qquad (19.66)$$

La matriz inversa con cambio de signo es:

$$-D^{-1} = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{Vmatrix};$$

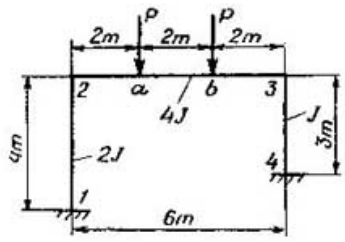


Fig. 19.9

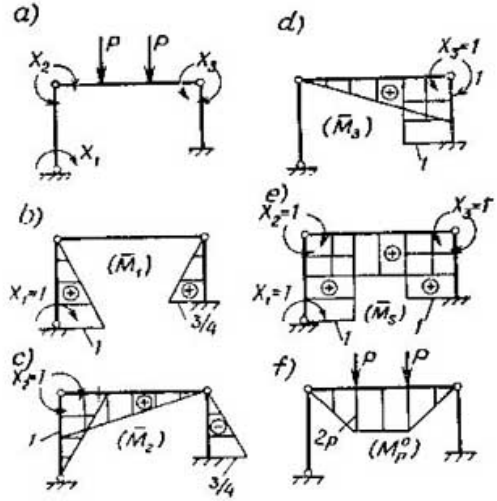


Fig. 19.10

β_{km} son los coeficientes de influencia por (10.13)—(10.15).

Los momentos flectores en el sistema dado, debidos a la carga, se determinan por la igualdad matriz

$$M_P = \bar{M} \cdot X + M_P^0, \qquad (19.67)$$

donde $\bar{M}$ es la matriz por (19.56);

X, la matriz columna por (19.66);

M_P^0, la matriz columna por (19.64).

La verificación del diagrama obtenido en la forma matriz es:

$$(M_P) \cdot (\bar{M}_s) = \bar{M}_s' \cdot A \cdot M_P, \qquad (19.68)$$

donde $\overline{M}'_s$ es la matriz transpuesta (19.60);
A, la matriz por (19.57);

$$M_P = \| \{M_{1P} M_{2P} \ldots M\} \| \qquad (19.69)$$

es la matriz-columna de las matrices-columnas de los momentos M_P en la i^{ma} parte, escritas como en (19.61) o (19.62), sustituyendo $\overline{M}_{is}$ por M_{iP}.

Si el cálculo se efectúa sobre varias cargas divididas, la matriz-columna M^0_P (19.64) se transforma en matriz rectangular, con el número de columnas igual al número de cargas.

Ejemplo 19.7. Construir el diagrama de los momentos flectores en el pórtico (fig. 19.9).

El sistema básico y los diagramas necesarios para el cálculo, en el caso de tener en cuenta solamente las deformaciones de flexión, se representan en la fig. 19.10.

Las ecuaciones canónicas por (19.50) son:

$$D \cdot X + D_P = 0.$$

Componemos la matriz D por (19.55), considerando a cada barra del pórtico como una parte y empleando para la matriz A_i la fórmula (19.19):

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{4}{12EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} & & \\ & \frac{6}{24EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} & \\ & & \frac{3}{6EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3/4 & -3/4 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Después de la simplificación del escrito tenemos:

$$D = \frac{1}{12EJ} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3/4 & -3/4 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (a)$$

Despejamos la igualdad matriz efectuando la multiplicación de izquierda a derecha:

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{12EJ}\begin{Vmatrix}8&4&0&0&4{,}5&9\\4&8&6&3&-4{,}5&-9\\0&0&3&6&18&18\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\\3/4&-3/4&1\end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{48EJ}\begin{Vmatrix}59&-11&54\\-11&83&-42\\54&-42&168\end{Vmatrix}. \qquad \text{(b)}$$

Por cuanto en los diagramas los momentos flectores son continuos, se puede superponer las matrices $\boldsymbol{A}_i$ en (a) con sus ángulos y escribir los momentos en los límites de las partes una sola vez.

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{12EJ}\begin{Vmatrix}1&0&0&3/4\\0&1&0&-3/4\\0&0&1&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}8&4&0&0\\4&14&3&0\\0&3&18&6\\0&0&6&12\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\3/4&-3/4&1\end{Vmatrix}; \qquad \text{(c)}$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{48EJ}\begin{Vmatrix}8&4&4{,}5&9\\4&14&-1{,}5&-9\\0&3&24&18\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\\3&-3&4\end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{48EJ}\begin{Vmatrix}59&-11&54\\-11&83&-42\\54&-42&168\end{Vmatrix} \text{ coincide con (b).}$$

Componemos la matriz $\boldsymbol{D}_P$ por (19.63).

Por cuanto el diagrama de $\boldsymbol{M}_P^0$ existe sólo en la barra (2-3), componemos la matriz $\boldsymbol{D}_P$ solamente por esta barra, dividiéndola en tres partes:

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_3=\frac{2}{24EJ}\begin{Vmatrix}2&1\\1&2\end{Vmatrix};$$

$$D_P = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{12EJ}\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 2P \\ 2P \\ 2P \\ 2P \\ 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{36EJ}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 2P \\ 2P \\ 2P \\ 2P \\ 0 \end{Vmatrix} = \frac{1}{36EJ}\begin{Vmatrix} 0 \\ 36P \\ 36P \end{Vmatrix}.$$

Las ecuaciones canónicas en cifras son:

$$\begin{Vmatrix} 59 & -11 & 54 \\ -11 & 83 & -42 \\ 54 & -42 & 168 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 48P \\ 48P \end{Vmatrix} = 0.$$

La matriz inversa $-D^{-1}$, hallada por (10.13), será:

$$-D^{-1} = \frac{1}{506160}\begin{Vmatrix} -12180 & 420 & -4020 \\ 420 & -6996 & 1884 \\ -4020 & -6996 & 4776 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -0{,}024063 & 0{,}0008297 & 0{,}007942 \\ 0{,}0008297 & -0{,}013821 & -0{,}003722 \\ 0{,}007942 & -0{,}003722 & -0{,}0094357 \end{Vmatrix}.$$

Los valores de las incógnitas son:

$$\vec{X} = \begin{Vmatrix} -0{,}024063 & 0{,}0008297 & 0{,}007942 \\ 0{,}0008297 & -0{,}013821 & -0{,}003722 \\ 0{,}007942 & -0{,}003722 & -0{,}0094357 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 48P \\ 48P \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0{,}4210416P \\ -0{,}842064P \\ -0{,}06315696P \end{Vmatrix}.$$

Calculamos los momentos M_P en los puntos *1*, *2*, *a*, *b*, *3*, *4* por (19.67):

$$M_P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3/4 & -3/4 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0{,}42104P \\ -0{,}84206P \\ -0{,}63157P \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2P \\ 2P \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}42104P \\ -0{,}84206P \\ 1{,}22811P \\ 1{,}29826P \\ -0{,}63157P \\ 0{,}31580P \end{Vmatrix}.$$

El diagrama se construyó en la fig. 19.11.
La verificación del diagrama obtenido por (19.68) es

$$(M_P) \cdot (\bar{M}_s) = \| 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \| \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \frac{4}{12EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} & & & & \\ & \frac{2}{24EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} & & & \\ & & \frac{2}{24EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} & & \text{(ceros)} \\ & \text{(ceros)} & & \frac{2}{24EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} & \\ & & & & \frac{3}{6EJ} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 0{,}421P \\ -0{,}842P \\ -0{,}842P \\ 1{,}228P \\ 1{,}228P \\ 1{,}298P \\ 1{,}298P \\ -0{,}632P \\ -0{,}632P \\ 0{,}316P \end{Vmatrix}.$$

Después de la superposición de los valores angulares de la matriz A_i y la exclusión de la escritura doble de los momentos M_P en los

límites de las partes tenemos:

$$(M_p)\cdot(M_s)=\|1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\|\cdot\frac{1}{12EJ}\begin{Vmatrix}8&4&0&0&0&0\\4&10&1&0&0&0\\0&1&4&1&0&0\\0&0&1&4&1&0\\0&0&0&1&14&6\\0&0&0&0&6&12\end{Vmatrix}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix}0{,}421P\\-0{,}842P\\1{,}228P\\1{,}298P\\-0{,}632P\\0{,}316P\end{Vmatrix}=25{,}896P-25{,}906P\approx 0.$$

5. Forma matriz de cálculo de los arcos no articulados

El cálculo de los arcos a la carga fija, en la forma matriz, se diferencia poco del cálculo análogo a tal carga de los pórticos. Por eso, aquí se examina solamente la construcción de las líneas de influencia de las incógnitas básicas X_1, X_2 y X_3 (fig. 19.12).

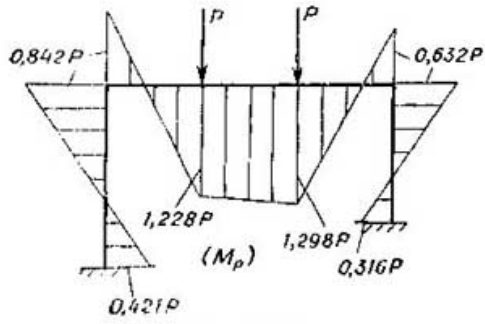


Fig. 19.11

La posición del centro elástico se determina por la condición $\delta_{13}=\delta_{31}=0$ y corresponde al centro de gravedad de la carga convencional $q^*=\frac{ds}{EJ}$, aplicada al arco y orientada en forma horizontal.

Luego exponemos el cálculo por los pesos elásticos. Aquí mismo señalamos que, hablando en general, el cálculo por los pesos elásticos es **aproximado.** Sólo en algunos casos, cuando los pesos elásticos se calculan con exactitud, aquél puede ser un cálculo exacto. Según (19.49)

$$\delta_{31}=-\sum W_{k1}^{(M)}\cdot\bar{M}_3=-\sum W_{k1}^{(M)}\cdot 1=0, \qquad (19.70)$$

donde $W_{k1}^{(M)}$ son los pesos elásticos debidos a $X_1=1$, calculados **solamente** de los momentos flectores $\bar{M}_1=1\ (y-c)$:

$$\delta_{13}=-\sum W_{k3}^{(M)}\cdot\bar{M}_{k1}=-\sum W_{k3}^{(M)}(y_k-c)=0, \qquad (19.71)$$

donde W_{k3} son los pesos elásticos debidos a $X_3 = 1$, cuando $\bar{M}_3 = 1$. Estas expresiones se pueden escribir así:

$$\sum W_{k1}^{(M)} = \sum (W_{ky}^{(M)} - W_{kc}^{(M)}) = \sum W_{ky}^{(M)} - c \sum W_{k1}^{(M)} = 0, \quad (19.72)$$

donde $\bar{W}_{ky}^{(M)}$ son los pesos elásticos debidos a $\bar{M}_y = 1 \cdot y$.

$$\sum W_{k3}^{(M)} \cdot y_k - c \sum W_{k1}^{(M)} = 0. \quad (19.73)$$

De aquí obtenemos dos expresiones para la determinación del centro elástico:

$$c = \sum W_{ky}^{(M)} : \sum W_{k3}^{(M)}; \quad (19.74)$$

$$c = \sum W_{k3}^{(M)} y_k : \sum W_{k3}^{(M)} \quad (19.75)$$

En caso de interpolación lineal de la carga q^*, ambas fórmulas (19.74) y (19.75) son aproximadas y dan respuestas iguales solamente en los casos cuando entre los puntos $i-1$ e i en la i^{ma} parte, la magnitud $1 : EJ \cos\alpha$ se toma constante.

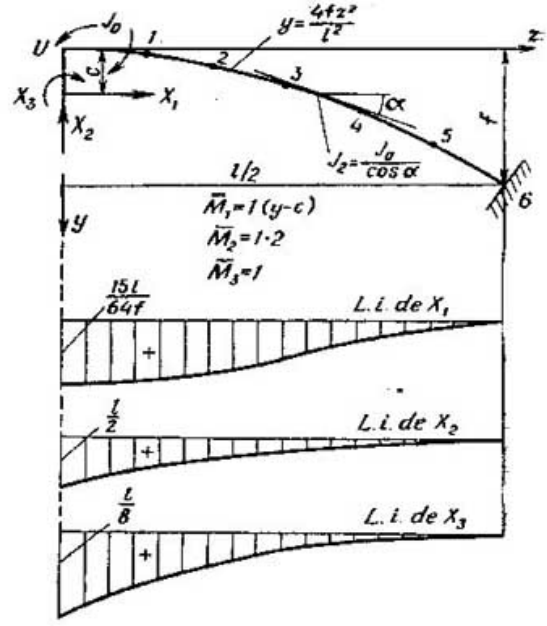


Fig. 19.12

En estos casos, los pesos elásticos (19.35), calculados, considerando solamente los momentos flectores, van a coincidir con los pesos elásticos (19.45).

Ya que la matriz de los pesos elásticos (19.44) en el caso de aproximación parabólica de la carga q^* no es más compleja que la matriz (19.40) en el caso de aproximación lineal de la carga, y de aquélla es de esperar un cálculo más exacto, es precisamente necesario emplearla.

Los pesos elásticos W_1 pueden ser calculados por los momentos $\bar{M}_1 = 1\ (y - c)$ o por la fórmula

$$M_{k1}^{(M)} = W_{ky}^{(M)} - cW_{k3}^{(M)}. \quad (19.76)$$

En este caso, si la posición del centro elástico se determinó por (19.74), siempre $\sum W_{k1}^{(M)} = \delta_{31} = 0$.

Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0; \quad \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0; \quad \delta_{33}X_3 + \delta_{3P} = 0. \quad (19.77)$$

Los desplazamientos propios, por medio de los pesos elásticos, por (19.49), considerando **solamente** las deformaciones de flexión, son:

$$\frac{1}{2}\delta_{11} = -\sum W_{k1}^{(M)}\bar{M}_{k1} = -\sum W_{k1}^{(M)}(y_k - c) = -\sum W_{k1}^{(M)}y_k; \quad (19.78)$$

$$\frac{1}{2}\delta_{22} = -\sum W_{k2}^{(M)}\bar{M}_{k2} = -\sum W_{k2}^{(M)}z_k; \quad (19.79)$$

$$\frac{1}{2}\delta_{33} = -\sum W_{k3}^{(M)}\bar{M}_{k3} = -\sum W_{k3}^{(M)}\cdot 1. \quad (19.80)$$

Los diagramas de los desplazamientos debidos a $X_i = 1$ ($i = 1$, 2 y 3), $\delta_{Pi} = \delta_{iP}$, se determinan por la ecuación diferencial (19.30), o en el caso general, aproximadamente, por los pesos elásticos.

La matriz de los pesos elásticos, tomando en cuenta **sólo** los momentos flectores, para n divisiones del semitramo del arco, es

$$W = \| W_y W_2 W_3 \| = W^{(M)} \left\| \frac{f}{n^2} \right\| \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ \cdot \\ n^2 \end{Vmatrix} \left\| \frac{1}{2n} \right\| \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ 1 \end{Vmatrix} \quad (19.81)$$

donde $W^{(M)}$ es la matriz por (19.40) o, mejor, por (19.44).

Según (19.76)

$$W_1^{(M)} = \begin{Vmatrix} W_{0y}^{(M)} \\ W_{1y}^{(M)} \\ \\ W_{ny}^{(M)} \end{Vmatrix} - c \begin{Vmatrix} W_{03} \\ W_{13} \\ \\ W_{n3} \end{Vmatrix} \quad (19.82)$$

$$\sum W_1^{(M)} = 0. \quad (19.83)$$

Ejemplo 19.8. Construir las líneas de influencia de las incógnitas básicas en el arco parabólico, si $J(z) = \frac{J_0}{\cos\alpha}$ (fig. 19.12).

Con fines de estudio, dividimos el semitramo del arco, solamente en seis partes iguales ($n = 6$, $d = l/12$).

Como J_* tomamos a J_0, lo que da $a_k = \frac{J_0}{J_k \cos\alpha_k} = 1$. Componemos la matriz de los pesos elásticos (19.81) empleando para $W^{(M)}$ la matriz (19.44) en el caso de aproximación parabólica de

la carga q^*.

$$\| W_y^{(M)} W_2^{(M)} W_3^{(M)} \| = -\frac{l}{144EJ_0} \begin{Vmatrix} 3{,}5 & 3 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & 3 & 3{,}5 \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \frac{f}{36} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \\ 36 \end{Vmatrix} & \frac{l}{12} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} =$$

$$= -\begin{Vmatrix} \frac{lf}{144 \cdot 36EJ_0} \begin{Vmatrix} 1 \\ 14 \\ 50 \\ 110 \\ 194 \\ 302 \\ 193 \end{Vmatrix} & \frac{l^2}{144 \cdot 12EJ_0} \begin{Vmatrix} 2 \\ 12 \\ 24 \\ 36 \\ 48 \\ 60 \\ 34 \end{Vmatrix} & \frac{l}{144 \cdot EJ_0} \begin{Vmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 6 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix}.$$

$$\overline{\Sigma = 864} \qquad \overline{\Sigma = 216} \qquad \overline{\Sigma = 72}$$

El centro elástico, por la fórmula (19.74), es:

$$c = [(lf864) : (144 \cdot 36EJ_0) : (l : 2EJ_0) = \frac{l}{3}.$$

Hemos obtenido la posición exacta del centro elástico, a consecuencia de que $EJ \cos\alpha = EJ_0$, de que el arco es parabólico y de que la aproximación de la carga $q_y^* = -\frac{y}{EJ_0}$ ha sido tomada parabólica.

Por la fórmula (19.75) se ha obtenido que

$$c = [(lf876) : (144 \cdot 36EJ_0)] : (l : 2EJ_0) = 876f : 2592 > \frac{l}{3}.$$

Calculamos los pesos elásticos W_i por (19.76):

$$W_i^{(M)} = -\frac{lf}{144 \cdot 36EJ_0}\begin{Vmatrix} 1 \\ 14 \\ 50 \\ 110 \\ 194 \\ 302 \\ 193 \end{Vmatrix} + \frac{lf}{144 \cdot 3EJ_0}\begin{Vmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 6 \end{Vmatrix} = \frac{lf}{144 \cdot 36EJ_0}\begin{Vmatrix} 71 \\ 130 \\ 94 \\ 34 \\ -50 \\ -158 \\ -121 \end{Vmatrix}.$$

$$\sum W_i^{(M)} = 0$$

Los desplazamientos propios, por (19.78)—(19.80), son:

$$\frac{\delta_{11}}{2} = -\frac{lf}{144 \cdot 36EJ_0} \| 71 \quad 130 \quad 94 \quad 34 \quad -50 \quad -158 \quad -121 \| \times$$

$$\times \frac{l}{36} | \{0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36\} | = 2lf^2 : 45{,}002EJ_0$$

(el valor exacto es $2lf^2 : 45EJ_0$);

$$\frac{\delta_{22}}{2} = \frac{l^2}{144 \cdot 12EJ_0} \| 2 \quad 12 \quad 24 \quad 36 \quad 48 \quad 60 \quad 34 \| \times$$

$$\times \frac{l}{12} | \{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6\} | = l^3 : 24EJ_0;$$

$$\frac{\delta_3}{2} = \frac{l}{144EJ_0} \| 6 \quad 12 \quad 12 \quad 12 \quad 12 \quad 12 \quad 6 \| \times$$

$$\times | \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} | = l : 2EJ_0.$$

Los desplazamientos δ_{22} y δ_{33} coincidieron con sus valores exactos. Esto fue consecuencia de un cálculo preciso de los pesos elásticos W_2 y W_3. La viga convencional para el semiarco derecho será volada, con un empotramiento en el extremo izquierdo. Componemos la matriz de los desplazamientos:

$$\overline{D}_P = \| \delta_{Pi} \| = B_M \cdot W_m^{(M)} = \frac{l}{12}\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \left\| \frac{fl}{144 \cdot 36EJ_0} \right\| \begin{matrix} 71 \\ 130 \\ 94 \\ 34 \\ -50 \\ -158 \\ -121 \end{matrix} \left\| \left(\frac{-l^2}{72 \cdot 12EJ_0} \right) \right\| \begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 18 \\ 24 \\ 30 \\ 17 \end{matrix} \left\| \left(\frac{-l}{24EJ_0} \right) \right\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{fl^2}{48 \cdot 1296EJ_0} \right\| \begin{matrix} -1296 \\ -1225 \\ -1024 \\ -729 \\ -400 \\ -121 \\ 0 \end{matrix} \left\| \frac{l^3}{72 \cdot 144EJ_0} \right\| \begin{matrix} -432 \\ -325 \\ -224 \\ -135 \\ -64 \\ -17 \\ 0 \end{matrix} \left\| \frac{l^2}{288EJ_0} \right\| \begin{matrix} -36 \\ -25 \\ -16 \\ -9 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

Todos los δ_{P1}, δ_{P2} y δ_{P3} coinciden con sus valores exactos por los motivos explicados anteriormente:

$$\text{l. i. de } X_1 = -\delta_{P1} : \delta_{11};$$
$$\text{l. i. de } X_2 = -\delta_{P2} : \delta_{22};$$
$$\text{l. i. de } X_3 = -\delta_{P3} : \delta_{33}.$$

En la fig. 19.12 se muestran las líneas de influencia en el semiarco derecho. Las matrices de las ordenadas de las líneas de influencia de X_1, X_2 y X_3 son:

$$\| \text{l. i. de } X \| = \left\| \frac{15l}{64f \cdot 1296} \right\| \begin{matrix} 1296 \\ 1225 \\ 1024 \\ 729 \\ 400 \\ 121 \\ 0 \end{matrix} \left\| \frac{1}{864} \right\| \begin{matrix} 432 \\ 325 \\ 224 \\ 135 \\ 64 \\ 17 \\ 0 \end{matrix} \left\| \frac{1}{288} \right\| \begin{matrix} 36 \\ 25 \\ 16 \\ 9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

Ahora, efectuemos el cálculo en el caso de aproximación lineal de la carga q^*. No es difícil convencerse de que los pesos elásticos $W_2^{(M)}$ y $W_3^{(M)}$ serán iguales tanto en el caso de la aproximación parabólica de la carga q^*, como en la lineal, por cuanto las cargas q_2^* y q_3^* son lineales y, para ellas, la aproximación parabólica se

transforma en lineal. Efectuamos el cálculo de la matriz de los pesos elásticos $W_{ij}^{(M)}$:

$$W_{ij}^{(M)} = \frac{-l}{72EJ_0} \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \frac{f}{36} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \\ 36 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{-lf}{72 \cdot 36EJ_0} \begin{Vmatrix} 1 \\ 8 \\ 26 \\ 56 \\ 98 \\ 152 \\ 97 \end{Vmatrix}$$

$$\sum \overline{W}_{ij} = 438.$$

La posición del peso elástico es:

$$c = \frac{lf \cdot 438}{72 \cdot 36EJ_0} : \frac{l}{2EJ_0} = \frac{876f}{72 \cdot 36} \left(\text{próximo a } \frac{f}{3}\right).$$

Ahora, los pesos elásticos $W_{i}^{(M)}$ por (19.76) son:

$$W_{i}^{(M)} = -\frac{lf}{72 \cdot 36EJ_0} \begin{Vmatrix} 1 \\ 8 \\ 26 \\ 56 \\ 98 \\ 152 \\ 97 \end{Vmatrix} + \frac{876f}{72 \cdot 36} \cdot \frac{l}{72EJ_0} \begin{Vmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{fl}{144 \cdot 36EJ_0} \begin{Vmatrix} 71 \\ 130 \\ 94 \\ 34 \\ -50 \\ -158 \\ -121 \end{Vmatrix}.$$

Los pesos elásticos $W_1^{(M)}$ coinciden con sus valores exactos, calculados con anterioridad.

Se pueden calcular $W_1^{(M)}$ debidos a los momentos $\bar{M}_1 = 1 \times (y - c)$:

$$W_1^{(M)} = \frac{-l}{72EJ_0} \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \frac{f}{144 \cdot 3} \begin{Vmatrix} -146 \\ -134 \\ -98 \\ -38 \\ 46 \\ 154 \\ 286 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{fl}{144 \cdot 36EJ_0} \begin{Vmatrix} 71 \\ 130 \\ 94 \\ 34 \\ -50 \\ -158 \\ -121 \end{Vmatrix}$$

En el caso dado, $W_1^{(M)}$ coincidieron con los calculados anteriormente.

6. Forma matriz del método de desplazamientos

Las ecuaciones canónicas del método son:

$$\boldsymbol{R} \cdot Z + \boldsymbol{R}_P = 0, \tag{19.84}$$

donde

$$1)\ \boldsymbol{R} = \| r_{km} \| = \begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{Vmatrix} \tag{19.85}$$

es la matriz de las reacciones debidas a los desplazamientos unitarios en el sistema básico, o sea, los coeficientes de las ecuaciones canónicas (matriz de rigidez):

$$2)\ \vec{\boldsymbol{Z}} = | \{ Z_1 Z_2 \dots Z_n \} | \tag{19.86}$$

es la matriz columna (vector) de las incógnitas;

$$3)\ \vec{\boldsymbol{R}}_P = \| R_k \| = | \{ R_1 R_2 \dots R_n \} | \tag{19.87}$$

es la matriz columna de los términos independientes de las ecuaciones canónicas, o sea, de las reacciones debidas a las solicitaciones en el sistema básico, para

$$R_k = R_{kP} + R_{kt} + R_{k\Delta}. \tag{19.88}$$

La resolución (19.84) en la forma matriz es:

$$\boldsymbol{Z} = -\boldsymbol{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_P, \tag{19.89}$$

donde

$$-R^{-1} = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{Vmatrix}; \tag{19.90}$$

β_{km} son los coeficientes de influencia por (10.13—10.15) con la sustitución de los símbolos δ_{km} por los r_{km}.

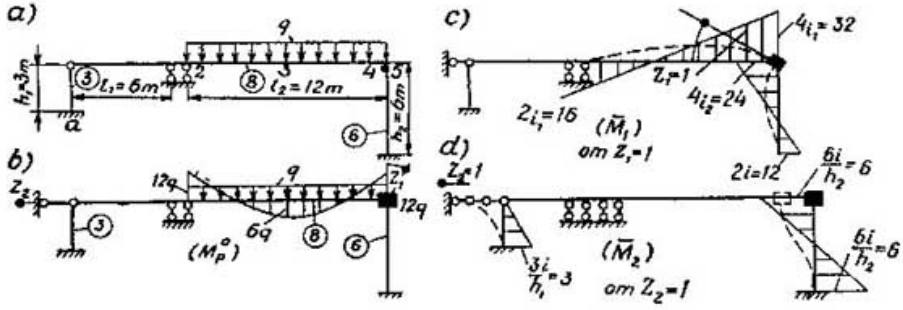


Fig. 19.13

La composición del diagrama de (M), en el sistema dado, puede ser efectuada por la siguiente expresión:

$$M_P = \begin{Vmatrix} M_{01} & M_{02} & \dots & M_{0n} \\ M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{t1} & M_{t2} & \dots & M_{tn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} M_{0P}^0 \\ M_{1P}^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{tP}^0 \end{Vmatrix}. \tag{19.91}$$

Ejercicio 19.9. Construir el diagrama de los momentos flectores en el pórtico (fig. 19.13*a*).

Las rigideces lineales se indican dentro de círculos.

El sistema básico con el diagrama debido a la carga (M_P^0) se representa en la fig. 19.13*b* y los demás diagramas indispensables de $(\bar{M}_1)$ y $(\bar{M}_2)$, en la fig. 19.13*c* — *d*.

Componemos la matriz R (19.85) sobre la base de los diagramas unitarios de $(\bar{M}_1)$ y $(\bar{M}_2)$:

$$R = \begin{Vmatrix} 56 & 6 \\ 6 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Componemos la matriz R_P (19.87) por el diagrama de (M_P^0):

$$R_P = \begin{Vmatrix} 12q \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Los coeficientes de la matriz inversa (19.90), con el signo cambiado, por (10.13), son:

$$\beta_{11} = (-1)^{(1+1+1)} \frac{3}{132} = -\frac{3}{132};$$

$$\beta_{12} = (-1)^{(1+2+1)} \frac{6}{132} = \frac{6}{132};$$

$$\beta_{22} = (-1)^{(1+2+2)} \frac{56}{132} = -\frac{56}{132};$$

$$-R^{-1} = \frac{1}{132} \begin{Vmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -56 \end{Vmatrix}.$$

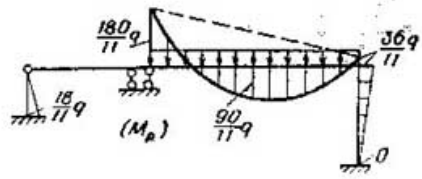


Fig. 19.14

Las incógnitas, por (19.89), son:

$$Z = \frac{1}{132} \begin{Vmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -56 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 12q \\ 0 \end{Vmatrix} \frac{1}{132} \begin{Vmatrix} -36 \\ 72q \end{Vmatrix}.$$

Calculamos los momentos flectores por (19.91), en los puntos $0 = a$, 1, 2, 3, 4, 5 y $t = b$.

Convenimos en considerar que los momentos flectores, marcados en la zona traccionada, dentro del contorno del pórtico, son positivos:

$$M_P = \begin{Vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 16 & 0 \\ -8 & 0 \\ -32 & 0 \\ 24 & 6 \\ -12 & -6 \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{11} \begin{Vmatrix} -3q \\ 6q \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -12q \\ 6q \\ -12q \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \frac{1}{11} \begin{Vmatrix} 8q \\ 0 \\ -180q \\ 90q \\ -36q \\ -36q \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

El diagrama está construido en la fig. 19.14.

CAPITULO 20 * ELEMENTOS DE PROGRAMACION DE LOS PROBLEMAS DE LA MECANICA DE CONSTRUCCIÓN

Las computadoras digitales (numéricas) electrónicas son las que permiten efectuar con rapidez y efectividad cálculos muy grandes y complejos, para la resolución de los problemas de la mecánica de construcción.

Los problemas complejos, así como los que son simples, pero requieren numerosas variantes de resoluciones deben prepararse para el cálculo en las computadoras. Muchos problemas, en general, no pueden ser resueltos sin las máquinas computadoras electrónicas.

El hombre, al efectuar los cálculos a mano, trabaja de acuerdo con el esquema que se muestra en la fig. 20.1. La máquina computadora electrónica trabaja, en principio, al igual que el hombre, pero, a diferencia de éste, a gran velocidad, efectuando desde varios miles hasta millones de operaciones por segundo. En la fig. 20.2, se da el esquema de trabajo de la máquina computadora electrónica.

La máquina computadora electrónica posee un órgano de entrada, el cual lee la información de entrada (los programas y datos numéricos iniciales) en las cintas o tarjetas perforadas. Las cintas o tarjetas perforadas son preparadas por el operador en dispositivos de teclado especiales, antes de comenzar el cálculo, y representan los textos de los programas y datos iniciales, registrados en forma de orificios por un código especial.

Los programas y datos iniciales provenientes del órgano de entrada se registran en un dispositivo de memoria de la computadora.

La computadora tiene también un bloque de cálculo aritmético en que se efectúan diferentes operaciones aritméticas y lógicas con los números y códigos; un dispositivo de mando que asegura el trabajo coordinado de todos los mecanismos básicos de la computadora; un panel de señalamientos con un tablero de mando; y órganos de salida.

Para la resolución de cualquier problema son indispensables programas. Una parte de éstos se refiere al fondo matemático de la computadora. Si el problema puede ser resuelto por medio de estos programas, no se requiere ninguna programación especial. En este caso, de los programas que se tienen en el fondo matemático se introducen solamente los que son indispensables y los datos iniciales. Luego, por medio de las teclas que hay en el tablero de mando se realiza la pasada del programa necesario y, en el órgano de salida se imprime la solución.

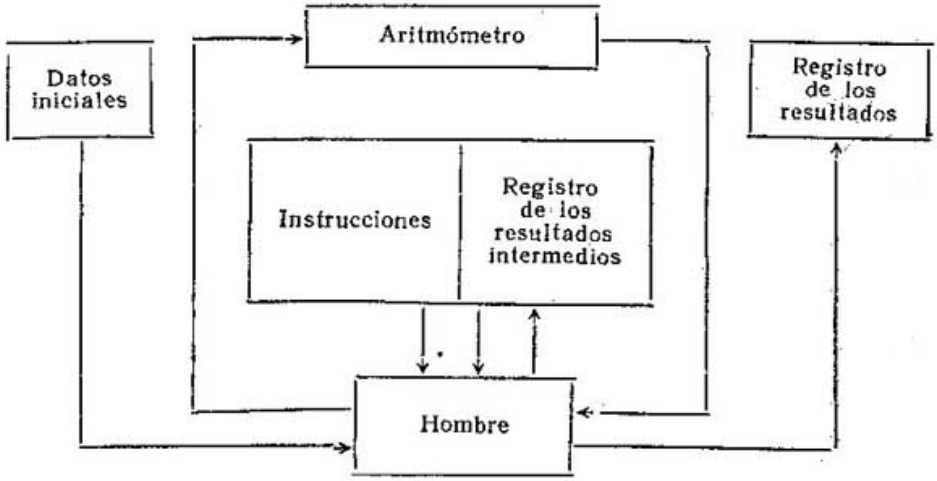
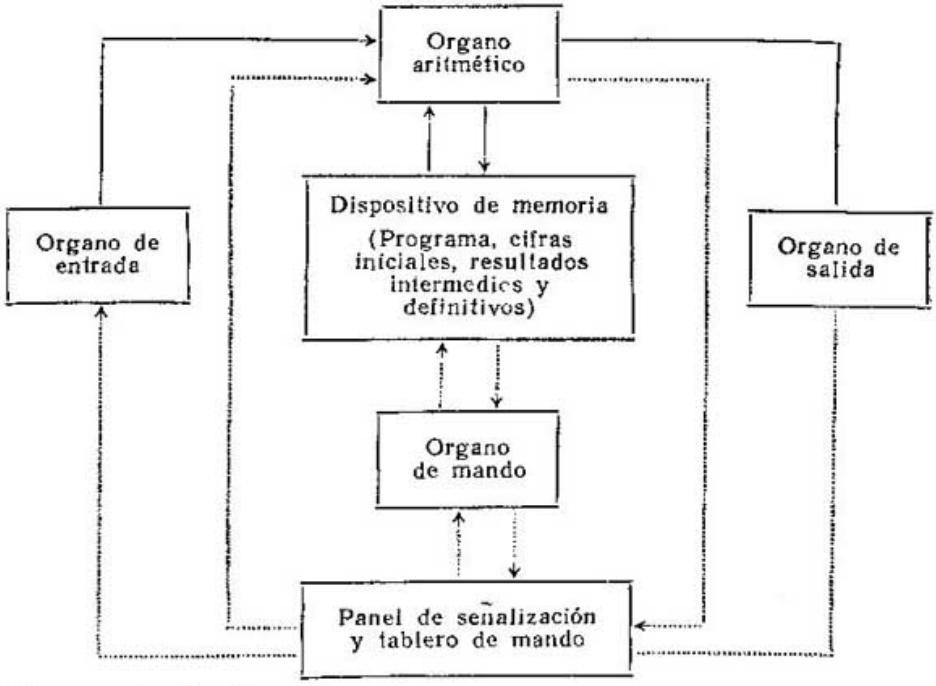


Fig. 20.1



Signos convencionales:

——→ Flujo de información

·····→ Señales de mando

Fig. 20.2

En la mayoría de los casos, para resolver un problema se requiere componer el programa. Este programa toma en cuenta las particularidades concretas del problema dado y ordena a la calculadora todas las operaciones indispensables para la obtención del resultado. El programa compuesto utiliza también, como norma, los programas standard que entran en el fondo matemático de la computadora. De tal modo, la resolución del problema se reduce a la pasada del programa introducido en la computadora, por consecuencia de que ésta realiza todas las operaciones matemáticas y lógicas ordenadas y entrega el resultado.

Cada computadora, electrónica de determinado tipo tiene, como norma, su propio sistema de instrucciones (lenguaje interno) distinto del de los otros tipos de computadoras. El programa escrito en el sistema de instrucciones de una computadora de un tipo no es apto para las computadoras de otros tipos. Además, los programas en el lenguaje interno son muy voluminosos y complejos.

Lo más cómodo es la composición de los programas en lenguajes algorítmicos y codificación automática especiales. Estos lenguajes y codificación automática son próximos, por su forma al lenguaje matemático común, y aquellas operaciones que pueden ser escritas por el texto matemático con explicaciones verbales, pueden ser escritas también en estos lenguajes, en forma de texto.

El programa escrito en lenguaje algorítmico se introduce en la computadora, en forma codificada, por medio de la cinta perforada o las tarjetas perforadas. Antes de efectuar la resolución de los problemas por ese programa la computadora lo traduce al lenguaje interno por medio de otro programa especial (traductor) y, luego, la resolución del problema sigue por la vía ordinaria. El programa del traductor entra en el fondo matemático de la computadora.

Un mismo lenguaje algorítmico puede servir a máquinas computadoras de los más diversos tipos, con distintos lenguajes internos. Naturalmente, para cada tipo de computadora deberá existir su traductor.

Entre los diferentes lenguajes algorítmicos existentes, ALGOL-60 es el que tuvo más amplia difusión. El lector que desee familiarizarse más detalladamente con este lenguaje puede hacer uso de la literatura existente [1])

El lenguaje ALGOL-60 tiene estructura complicada y es rica en posibilidades. En el presente capítulo solamente examinaremos algunas construcciones simples de ALGOL-60 y sus aplicaciones a algunos problemas de la mecánica de construcción.

---

[1]) *Revised report on the algorithmik language ALCOL-60* by J. W. Backus, F. L. Bauer, J. Green, C. Katz, J. McCarthy, P. Naur, A. J. Perlis, H. Rutishauser, K. Samelson, B. Vauquois, J. H. Wegstein, A. Van Wingaarden, M. Woodger. Edited by Peter Naur. International Federation for Information Processing, 1962.

El lenguaje algorítmico está destinado para la escritura de algorítmos. *Algoritmo* se llama a la descripción exacta del proceso del cálculo.

En el lenguaje ALGOL-60 se emplean letras latinas comunes, cifras y signos de las operaciones aritméticas (+ suma, — resta, × multiplicación, / división y ↑ elevación a potencia). También se emplean los signos de relaciones ($<$, $\leqslant$, $=$, $\geqslant$, $>$, $\neq$) y los de las operaciones lógicas ($\equiv$ coincide, $\supset$ arrastra, $\vee$ lógico o $\wedge$ lógico y $\neg$ no). Los paréntesis poseen el sentido habitual. Los corchetes se utilizan para la escritura de los índices.

En el algol existen palabras auxiliares especiales. Para los programas examinados aquí, nos limitaremos a las palabras que siguen:

go to — pasar a, **if** — si, **then** — entonces, **else** — otra manera, **for** — para, **do** — ciclo, **step** — paso, **until** — hasta, **while** — mientras, **begin** — comienzo, **end** — fin, **integer** — entro, **real** — real, **array** — grupo, **procedure** — procedimiento, **value** — valor.

Estas palabras cumplen diferentes funciones en los programas. Algunas de ellas sirven para establecer relaciones entre las partes del programa principalmente entre las de cálculo. Cada palabra del algol se considera como un símbolo.

En el algol existen también separadores (, coma, . punto, : dos puntos, ; punto y coma, := signo de pertenencia). El signo de pertenencia se considera como un solo símbolo y no como la combinación de dos puntos y el signo de igualdad.

Todos los símbolos del algol se escriben en el renglón. El pase a otro renglón es posible en cualquier sitio, no siendo necesario colocar ningún guión. Los espacios en el algol no tienen ningún sentido, pero, para facilitar la lectura, se recomienda hacerlos.

Las variables se designan por medio de identificadores. Cualquier conjunto de letras y cifras que comience con una letra es un identificador. En la fig. 20.3 se muestran algunas magnitudes y sus identificadores.

En el algol existen dos tipos de números. Los del tipo **integer** se escriben como números comunes, por ejemplo, 12 ó — 123. Los números reales del tipo **real** se escriben con o sin el punto decimal, por ejemplo: 0·0, 0, 12, 0.123.

Por medio de los identificadores, paréntesis y signos de operaciones aritméticas, se pueden formar expresiones aritméticas simples, por ejemplo:

$$((a+b)\times(cd\uparrow 2+f)+g))/h.$$

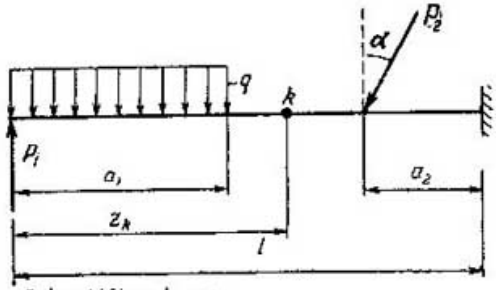
En una escritura matemática común esto se representa así:

$$\frac{(a+b)\left(c_d^2+f\right)+g}{h}.$$

Las reglas básicas de escritura de las expresiones aritméticas simples son las siguientes.

1. Dos signos de operaciones aritméticas nunca se escriben seguidos.
2. No se puede omitir el signo de multiplicación.
3. Cuando no hay paréntesis, el orden de las operaciones es:
   1) ↑,
   2) × 0 /,
   3) + 0 −.

Si la sucesión es igual, las operaciones se efectúan de izquierda a derecha.



Identificadores:
p1, p2, q, a1, a2, l, zk, alpha.

Fig. 20.3

Cualquier programa en el lenguaje ALGOL-60 está compuesto de operadores. El operador más elemental es el de pertenencia, cuya forma, por ejemplo, es:

$$a := b + c \times (e - f).$$

Esto significa que a la variable a se le apropia el valor

$$b + c \cdot (e - f).$$

Después de cada operador se coloca el signo; (punto y coma), la palabra **end** o la **else.**

El grupo de operadores se puede unir en un operador llamado operador compuesto. El operador compuesto tiene la estructura:

operador compuesto

begin S; S; S; ...; S; S; **end**, (20.1)

fin del compuesto

aquí, S es el operador.

Al operador compuesto se lo puede emplear igual que al simple.

Comúnmente, el programa en lenguaje ALGOL-60 representa un bloque. El bloque, a diferencia del operador compuesto, tiene descripciones.

Las descripciones son indispensables para que el traductor pueda asignar sitios en la memoria de la computadora para todas

las variables que intervienen en el proceso del cómputo y, también, para diferenciar las variables según el tipo. Más frecuentemente figuran descripciones de la forma (20.2) y (20.3):

descripción del tipo

integer *a, b, c, ..., n* (20.2)

tipo — lista del tipo

descripción del tipo

real *a, b, c, ..., n* (20.3)

tipo — lista del tipo

Si el tipo es **integer**, todas las magnitudes enumeradas en la lista del tipo son números enteros, pero, si el tipo es **real**, entonces son números reales.

La estructura general del bloque tiene la forma:

bloque

begin *D*; *D*; ...; *D*; *S*; *S*; *S*; ...; *S*; *S* **end**, (20.4)

comienzo del bloque — separador — final del compuesto

aquí *D* es la descripción,
S, el operador.

En el lenguaje ALGOL-60 se emplean ampliamente los procedimientos. Es indispensable distinguir entre la descripción del procedimiento y el operador del procedimiento.

La descripción del procedimiento representa un programa independiente (subprograma), el cual, por medio del operador del procedimiento, puede ser utilizado en cualquier sitio del programa básico.

La descripción del procedimiento tiene aproximadamente la siguiente estructura:

descripción del procedimiento

procedure *pr* (*a, b, c, d, e*); **value** *a, b*; **real** *a, b, c*; **integer** *d, e, S*;

identificador del procedimiento — conjunto de parámetros formales — lista de valores — conjunto de especificaciones — cuerpo del procedimiento (20.5)

La descripción del procedimiento se ubica en el principio del bloque, junto con las otras descripciones, o sea, en el lugar de la letra D en la fórmula (20.4). El operador o bloque es el cuerpo del procedimiento. El conjunto de parámetros formales está compuesto por la lista de parámetros formales, colocada entre paréntesis. Estos parámetros formales se emplean como variantes en el cuerpo del procedimiento. Cuando se cumple el operador del procedimiento, los parámetros formales se sustituyen por los reales. La cantidad de parámetros formales es arbitraria.

Los parámetros formales que entran en la lista de valores, al recurrir al procedimiento, se sustituyen, en el cuerpo del procedimiento, por los valores de estas magnitudes y, los que no entran, se sustituyen por los respectivos parámetros reales, de acuerdo con la denominación.

El operador del procedimiento tiene la forma:

operador del procedimiento

$$\overline{pr\ (u,\ v,\ w,\ x,\ y)} \qquad (20.6)$$

conjunto de parámetros reales

identificador del procedimiento

El operador del procedimiento se ubica en el final del compuesto, o sea, en lugar de cualquier operador, designado en la fórmula (20.4) con la letra S.

Además de los procedimientos que tienen descripciones se pueden emplear los procedimientos cuyas descripciones, en la lengua interna de la computadora, integran el fondo matemático. Trátase de procedimientos no descriptos. En los programas, éstos se emplean sólo como operador del procedimiento. Estos procedimientos son: de introducción

$$read\,(a,\ b,\ c,\ \ldots,\ n), \qquad (20.7)$$

de evacuación

$$print\,(a,\ b,\ c,\ \ldots,\ n),\ \text{y} \qquad (20.8)$$

de parada

$$stop. \qquad (20.9)$$

Las funciones standard son también procedimientos no descriptos:

$$abs\,(a),\ sign\,(a),\ sqrt{(a)},$$
$$sin\,(a),\ cos\,(a),\ arctan\,(a),$$
$$ln\,(a),\ exp\,(a).$$

Examinemos el ejemplo de un programa simple.

Ejemplo 20.1. Para una viga (fig. 20.4),) es necesario calcular los momentos flectores en los puntos K_1 y K_2.

El programa para este problema tiene la forma:

```
begin real p, q, a, l, ra mk1, mk2;
read (p, q, a, l);
ra: = (q × a × (l — a/2) + p × (l — a)/l;
mk1 = ra× a/2 — q × (a/2)↑2/2;
mk2: = ra × a — q × a↑2/2;
print (mk1, mk2); stop.
end
```

Este programa tiene una sola descripción y seis operadores; incluso *read*, *print* y *stop* que son operadores de los procedimientos no desriptos.

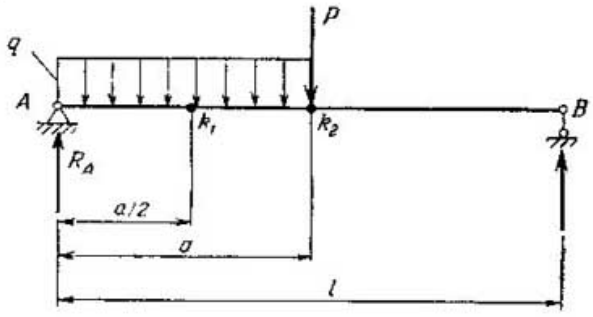


Fig. 20.4

En el algol, cualquier operador o bloque puede tener una marca o signo. La marca está delante del operador o bloque y está separada de ellos por dos puntos. Habitualmente, la marca representa un identificador. No influye de ningún modo en la ejecución del operador, pero permite pasar a la ejecución de cualquier otro operador que tenga marca en lugar del operador siguiente Para el paso a un operador arbitrario sirve el operador de salto incondicional, que tiene la forma

$$\textbf{go to } \underbrace{\text{m1}}_{\text{marca}}. \qquad (20.10)$$

En los programas suficientemente complejos pueden haber varios bloques, entre los que pueden también estar los bloques incorporados dentro de otro bloque. El operador de salto tiene cierta limitación, por la que del bloque externo no se puede pasar al operador que se encuentra en el bloque interno.

Además del salto incondicional también es posible el condicional. El esquema de trabajo de los operadores, en el caso de salto condicional, tiene la forma:

if *B* **then** *S1*; *S2*; (20.11)

donde *B* es la relación,

S1, el operador incondicional.

Por relación se entienden dos expresiones aritméticas simples ligadas por el signo de la operación de relación. Si en el proceso del trabajo del programa la relación *B* resulta verdadera, se cumple el operador *S1* y, luego, el *S2* si (*S1* no es del tipo **go to**). Si *B* es ficticia, el operador *S1* se omite y se cumple directamente el *S2*.

El salto condicional puede ser cumplido también por el operador condicional, cuyo esquema de trabajo tiene la forma:

if *B* **then** *S1* **else** *S2*; *S3*. (20.12)

Aquí, si la relación *B* es verdadera, entonces se cumple el operador *S1* y el *S2* se omite. Luego, se cumple el *S3*. Si *B* es ficticia, *S1* se omite y se cumple directamente el *S2* y, después, el *S3*. El operador S1 tiene que ser incondicional. El *S2* puede ser cualquiera, incluso convencional.

Durante la construcción de los programas es muy conveniente el operador de ciclo que permite el empleo múltiple de un mismo grupo de operadores. Examinaremos tres formas del operador del ciclo.

La primera forma del operador de ciclo tiene la forma:

for *V*:= *a*, *b*, *c*, ... *n* **do** *S1*; *S2*; (20.13)

(*V*: variable; *a*, *b*, *c*, ... *n*: elemento de la lista de ciclo; lista del ciclo; *S1*: operador)

Aquí, el operador *S1* se cumple tantas veces, cuantas estén escritos los elementos de la lista del ciclo y, cada vez la variable *V* toma el valor del respectivo elemento de la lista del ciclo. La cantidad de elementos de la lista del ciclo puede ser cualquiera. El operador *S2* se cumple después de agotar todos los elementos de la lista del ciclo.

La segunda forma del operador de ciclo se escribe así:

for *V*:= *A* **step** *B* **until** *C* **do** *S1*; *S2*; (20.14)

Aquí, *A*, *B*, *C*, en el caso general, son expresiones matemáticas, sin embargo, en muchos programas éstas son variables o números.

El trabajo del operador (21.14) se puede describir por medio del algol. Escribimos (20.14) así:

for $V:=A$ **step** B **until** C **do** $S1$; $L2:S2$;.

Entonces, el trabajo de este operador corresponde al siguiente grupo de operadores:

$V:=A$;
$L1$: **if** $(V-C)$ x **sign** $(B)>0$ **then go to** $L2$;
$S1$;
$V:=V+B$;
go to $L1$;
$L2$: $S2$;.

Aquí, sign $(B)=\begin{cases} +1, \text{ si } B>0, \\ 0, \text{ si } B=0, \\ -1, \text{ si } B<0. \end{cases}$

La tercera forma del operador de ciclo tiene la forma:

for $V:=E$ **while** F **do** $S1$; $S2$; (20.15)

Aquí, E es la expresión aritmética;
F, la expresión lógica (en el caso particular esto puede ser una relación).

El operador trabaja así:

$L1$: $V:=E$;
if $\neg F$ **then go to** $L2$;
$S1$;
go to $L1$;
$L2$: $S2$;.

En las tres formas, el efecto de la palabra **do** se extiende a un solo operador ($S1$). A su vez, el operador $S1$ puede ser operador del ciclo. Entonces, resulta un ciclo dentro de otro.

En el algol se pueden emplear variables con índices, por ejemplo,

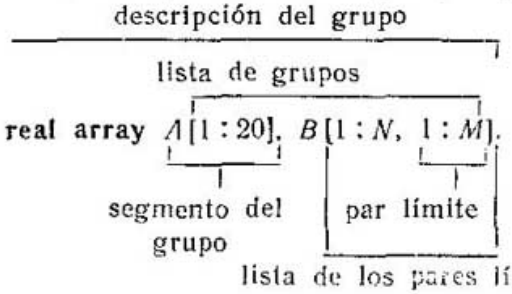
$a[4]$, $b[i, j]$, $c[i, j, k]$

identificador de grupo — lista de índices

Los índices se consideran como variables de tipo **integer.**

Todo el conjunto de variables con índices, poseedor de igual identificador, forma un grupo, y las variables sueltas son elementos de este grupo. El grupo puede ser unidimensional (con un índice), bidimensional, tridimensional, etc. Los grupos bidimensionales son muy cómodos de emplear para la programación de las operaciones con matrices.

Cada grupo debe tener una descripción del grupo. El grupo de elementos de tipo real puede ser descripto, por ejemplo, así:



(20.16)

La descripción del grupo se ubica en el comienzo del bloque. En el propio bloque externo pueden ser descriptos sólo los grupos de límites constantes.

En el lenguaje algorítmico ALGOL-60 se pueden programar, en forma de procedimiento, todas las operaciones básicas del álgebra matriz. Por estos procedimientos se pueden componer diferentes programas para la resolución de los problemas de la mecánica de construcción.

Examinemos el cálculo de los pórticos hiperestáticos por el método de fuerzas. Este problema puede ser resuelto por la fórmula matriz

$$M_P = M_P^0 - \bar{M} \cdot (\bar{M}' \cdot A \cdot \bar{M})^{-1} \cdot (\bar{M}' \cdot A \cdot M_P^0). \qquad (20.17)$$

Aquí, M_P es la matriz buscada de los momentos flectores en el sistema dado;

M_P^0, la matriz de carga en el sistema básico;

$\bar{M}$, la matriz unitaria en el sistema básico;

A, la matriz de ductilidad o maleabidad,

$\bar{M}'$, la matriz transpuesta debida a $\bar{M}$.

Más adelante se expone en programa que incluye los procedimientos matrices básicos; los procedimientos de entrada e impresión de las matrices y, también, el cálculo de los pórticos en la forma matriz, por la fórmula (20.17).

En el programa citado se emplean los seis grupos bidimensionales *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, siendo que cada grupo puede tener hasta 20 renglones y 20 columnas y, de tal modo, tendrá no más de 400 elementos. Si la máquina calculadora tiene una memoria suficientemente grande, en lugar de los pares límite 1 : 20 se pueden

escribir, por ejemplo, los 1 : 40 y, entonces, se hace posible resolver pórticos con gran cantidad de tramos.

Los números de tipo **integer** *a1*, *a2*, *b1*, *b2*, *c1*, *c2*, *d1*, *d2*, *e1*, *e2*, *f1* y *f2* significan el número de líneas y columnas de las matrices respectivas.

Programas

```
begin integer a1, a2, b1, b2, c1, c2, d1, d2, e1, e2, f1, f2;
  real array a, b, c, d, e, f, [1:20, 1:20];
  procedure pr1 (g1, g2, g);
    integer g1, g2; real array g;
    begin integer i, j;
      read (g1, g2);
      begin real array h[1 : g1, 1:g2];
        read (h);
        for i:=1 step 1 until g1 do
        for j:=1 step 1 until g2 do
        g[i,j] := h[i,j]
      end
    end;
  procedure pr 2 (g1, g2, g);
    integer g1, g2; real array g;
    begin integer i, j, k;
      read (g1, g2);
      begin real array h [1:g2];
        read (h);
        for i: =1 step 1 until g1 do
        for j: =1 step 1 until g1 do
        g[i, j] := 0;
        k := g1 - 1;
        for i : = 1 step 1 until g1 do
        g[i, i] : = h [i];
        for i:=1 step 1 until k do
        g[i, i + 1]: =h [g1 + i];
        for i : = 1 step 1 until k do
        g[i + 1, i]: = h[2 × g1 - 1 + i]
      end;
      g2 : = g1
    end;
```

```
procedure pr3 (g1, g2, g);
  value g1, g2; integer g1, g2; real array g;
  begin integer i, j; real array h[1 : g1, 1 : g2];
    for i : = 1 step 1 until g1 do
    for j : = 1 step 1 until g2 do
    h[i, j] : = g [i, j]; print (g1, g2, h)
  end;
procedure pr4 (g1, g2, g, h1, h2, h);
  value g1, g2; integer g1, g2, h1, h2; real array g, h;
  begin integer i,j;
    h1 : = g1 ; h2 : = g2;
    for i : = 1     step 1 until g1 do
    for j : = 1     step 1 until g2 do
    h [i, j] : = g[i, j]
  end;
procedure pr5 (g1, g2, g, h1, h2, h, r1, r2, r);
  value g1, g2, h1, h2; integer g1, g2, h1, h2, r1, r2;
  real array g, h, r;
  begin integer i, j;
    if g1 ≠ h1∧g2 ≠h2 then stop;
    r1 : = g1; r2 : = g2;
    for i : = 1 step 1 until g1 do
    for j : = 1 step 1 until g2 do
    r[i, j] : = g[i, j] + h[i, j]
  end;
procedure pr6 (g1, g2, g, h1, h2, h, r1, r2, r);
  value g1, g2, h1, h2; integer g1, g2, h1, h2, r1, r2;
  real array g, h, r;
  begin integer i, j;
    if g1 ≠ h1∨ g2 ≠ h2 then stop;
    r1 : = g1; r2 : = g2;
    for i : = 1 step 1 until g1 do
    for j: = 1 step 1 until g2 do
    r[i, j] : = g [i, j] − h [i, j]
  end;
procedure pr7 (g1, g2, g, h1, h2, h);
  value g1, g2; integer g1, g2, h1, h2; real array g, h;
  begin integer i, j;
    for i : = 1 step 1 until g1 do
    for j : = 1 step 1 until g2 do
    h[j, i]: = g[i, j]; h1 : = g2; h2 : = g1
  end;
```

```
procedure pr8 (s, g1, g2, g, h1, h2, h);
  value s, g1, g2; integer g1, g2, h1, h2; real s;
  real array g, h;
  begin integer i, j;
    h1 := g1; h2 := g2;
    for i := 1 step 1 until g1 do
    for j := 1 step 1 until g2 do
    h[i, j] := s × g[i, j]
  end;
procedure pr9 (g1, g2, g, h1, h2, h, r1, r2, r);
  value g1, g2, h1, h2; integer g1, g2, h1, h2, r1, r2;
  real array g, h, r;
  begin integer i, j, k;
    if g2 ≠ h1 then stop;
    for i := 1 step 1 until g1 do
    for j := 1 step 1 until h2 do
    begin r[i, j] := 0;
      for k := 1 step 1 until g2 do
      r[i, j] := r[i, j] + g[i, k]×h[k, j]
    end;
    r1 := g1; r2 := h2
  end;
procedure pr10 (g1, g2, g, h1, h2, h);
  value g1, g2; integer g1, g2, h1, h2;
  real array g, h; real s;
  begin integer i, j, k;
    if g1 ≠ g2 then stop; h1 := g1; h2 := g1; i := 1;
    for j := 1 step 1 until g1 do h[i, j] := g[i, j];
    for i := 2 step 1 until g1 do
    begin for j := 1 step 1 until i-1 do
      g[i, j] := -h[j, i]/h[j, i];
      for j := 1 step 1 until g1 do
        begin h[i, j] := g[i, j];
          for k := 1 step 1 until i-1 do
          h[i, j] := h[i, j] + g[i, k] × h[k, j]
        end;
      end;

 for i := g1 step -1 until 1 do
 for j := g1 step -1 until i do
 if i = j then
   begin s := 0;
```

```
            for k : = i + 1 step 1 until g1 do
            s : = s + g[k, i] × h[i, k]; h[i, i] : = s − 1/h[i, i]
          end;
        else
          begin s : = 0;
            for k : = i + 1 step 1 until g1 do
          s : = s + g[k, i] × h[j, k]; h[i, j] : = h[j, i] : = s
          end;
        for i : = 2 step 1 until g1 do
        for j : = 1 step 1 until i − 1 do g[i, j] : = g [j, i];
        for i : = 1 step 1 until g1 do
        for j : = 1 step 1 until g1 do h[i, j] : = −h [i, j]
      end;
    pr1 (d1, d2, d); pr2 (a1, a2, a); pr1 (e1, e2, e);
    pr7 (e1, e2, e, c1, c2, c); pr7 (d1, d2, d, b1, b2, b);
    pr9 (d1, d2, d, a1, a2, a, e1, e2, e); pr9 (e1, e2, e, b1, b2,b, d1, d2, d);
    pr3 (d1, d2, d); pr10 (d1, d2, d, f1, f2, f); pr3 (f1, f2, f);
    pr9 (e1, e2, e, c1, c2, c, d1, d2, d); pr3 (d1, d2, d);
    pr9 (f1, f2, f, d1, d2, d, e1, e2, e); pr8 (−1, e1, e2, e, d1, d2, d);
    pr3 (d1, d2, d); pr9 (b1, b2, b, d1, d2, d, f1, f2, f);
    pr5 (c1, c2, c, f1, f2, f, e1, e2, e); pr3 (e1, e2, e); stop
end
```

La estructura del programa examinado tiene la forma

begin *D*; *D*; *D*1; *D*2; *D*3; *D*4; *D*5; *D*6; *D*7; *D*8; *D*9; *D*10;
*S*1; *S*2; *S*3; *S*4; *S*5; *S*6; *S*7; *S*8; *S*9; *S*10; *S*11;
*S*12; *S*13; *S*14; *S*15; *S*16; *S*17; *S*18; *S*19
end

Al principio del programa van las descripciones de los números enteros y la descripción de los grupos. Luego, siguen las descripciones de los procedimientos. *D1* corresponde a la descripción del procedimiento *pr1*, *D2* a la del *pr* 2, etc.

El procedimiento *pr 1* introduce en la memoria de la calculadora una matriz rectangular. Si introducimos, por ejemplo, la matriz

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{Vmatrix},$$

los números en las tarjetas perforadas o cinta perforada deberán estar ubicados en el siguiente orden: $g1\ g2\ g_{11}\ g_{12}\ g_{13}\ g_{21}\ g_{22}\ g_{23}$. Primero se introducen los números $g1 = 2$ y $g2 = 3$ y luego, todos los elementos de la matriz.

El procedimiento *pr 2* se destina para la introducción de la matriz cuasidiagonal. En la matriz cuasidiagonal todos los elementos, excepto los elementos de la diagonal principal y, también,

de las codiagonales superior e inferior, son iguales a cero. Si nosotros tenemos, por ejemplo, la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1,1 & 1,2 & 0 & 0 & 0 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 0 & 0 \\ 0 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 0 \\ 0 & 0 & 4,3 & 4,4 & 4,5 \\ 0 & 0 & 0 & 5,4 & 5,5 \end{Vmatrix},$$

en las tarjetas perforadas o cinta perforada de entrada, debemos perforar los números

5 13 1,1 2,2 3,3 4,4 5,5
1,2 2,3 3,4 4,5
2,1 3,2 4,3 5,4.

Aquí, $g1 = 5$ es la medida de la matriz cuadrangular y $g2 = 13$, la cantidad de elementos que entran (diferentes de cero).

El prosedimiento *pr 3* sirve para la impresión de la matriz rectangular. Si tenemos, por ejemplo, la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 \end{Vmatrix},$$

entonces, en la impresión, ella se da así:

3 4 1,1 1,2 1,3 1,4 2,1 2,2 2,3 2,4
3,1 3,2 3,3 3,4.

El procedimiento *pr 4* efectúa la traslación de la matriz del grupo *g* al *h*.

El procedimiento *pr 5* realiza la adición de matrices de los grupos *g* y *h*. El resultado se obtiene en el grupo *r*.

El procedimiento *pr 6* efectúa la sustracción de matrices.

El procedimiento *pr 7* efectúa la transposición de la matriz. La matriz inicial se halla en el grupo *g*, el resultado se obtiene en el grupo *h*.

El procedimiento *pr 8* efectúa la multiplicación del número *s* por la matriz *g*. El resultado se obtiene en el grupo *h*.

El procedimiento *pr 9* efectúa la multiplicación de la matriz *g* por la *h*. El resultado se obtiene, en forma de matriz, en el grupo *r*.

El procedimiento *pr 10* efectúa la inversión de la matriz simétrica. La matriz original es cuadrática y se halla en el grupo *g*. La matriz inversa se obtiene en el grupo *h*.

Detrás del procedimiento *pr 10* van los operadores del programa. El operador *S1* corresponde al operador del procedimiento *pr 1*, *S2* al del *pr 2* y *S3*, nuevamente, al del *pr 1*, pero, con otros parámetros reales, etc. El programa de cálculo del pórtico

hiperestático, por el método de fuerzas, fue compuesto mediante los operadores de los procedimientos y por la fórmula matriz (20.17). Los primeros tres operadores (*S1*, *S2* y *S3*) efectúan la introducción de las matrices $\bar{M}'$, A y $(M_P^0)'$ en la computadora. La impresión de las matrices D, D^{-1}, D_P, X y M_P se efectúa por el

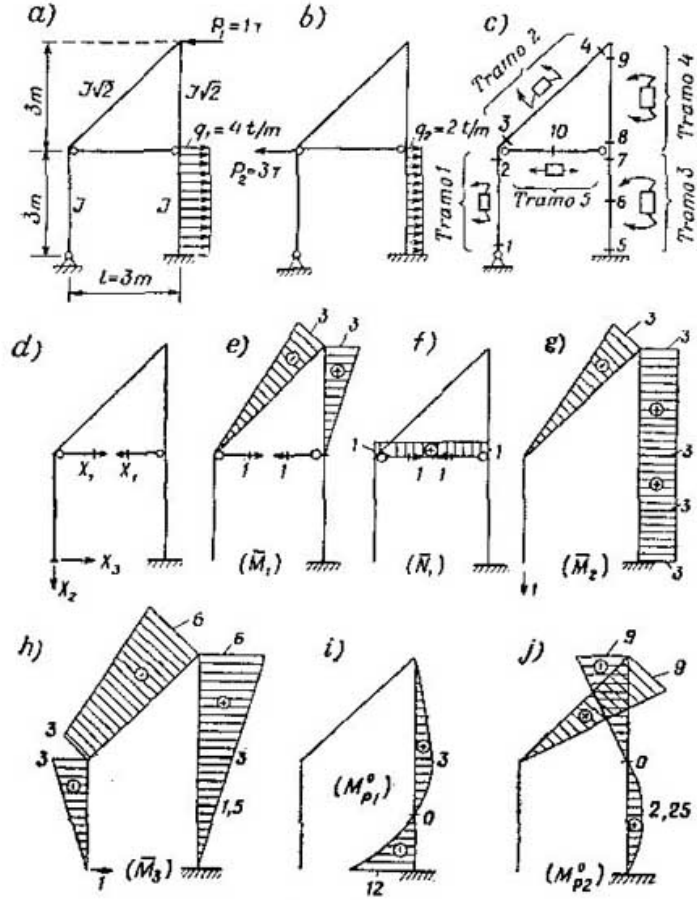


Fig. 20.5

operador del procedimiento *pr 3*. El trabajo del programa se termina con el operador *S19 — stop*.

Ejemplo 20.2. Examinemos el pórtico hiperestático plano bajo dos cargas distintas (fig. 20.5*a*, *b*). Las dimensiones del pórtico y las magnitas de las cargas se exponen en las figuras. Los momentos de inercia de todos los tramos son constantes, aunque distintos en los distintos tramos. Los números de los tramos y de las secciones y las reglas de los signos para M y N se exponen

en la fig. 20.5*c*. El sistema básico del pórtico se da en la fig. 20.5*d*. Al calcular los desplazamientos unitarios y de carga, la fuerza longitudinal se considera solamente en el quinto tramo, cuya área es

$$F = \frac{J}{l^2}.$$

En los tramos restantes consideramos solamente los momentos flectores.

Los diagramas unitarios y de carga se dan en la fig. 20.5*e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*.

La matriz inicial M' en las tarjetas perforadas (o cinta perforada) de entrada se escribe así:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 3 & 10 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ & & 0 & -3 & -3 & -6 & 0 & 1{,}5 & 3 & 3 & 6 & 0. \end{array} \qquad (20.18)$$

La primera línea de esta matriz se obtuvo de los diagramas de $\bar{M}_1$ y $\bar{N}_1$, la segunda línea, del diagrama de $\bar{M}_2$ y la tercera, del de $\bar{M}_3$.

Al componer la matriz de ductilidad tomamos EJ_* igual a J.

Hallamos la matriz de ductilidad de los distintos tramos. En el caso de interpolación cuadrática, empleamos la fórmula

$$A_i = \frac{d_i}{6EJ_*} \begin{Vmatrix} a_i^{izq} & 0 & 0 \\ 0 & 4a_i^{med} & 0 \\ 0 & 0 & a_i^{der} \end{Vmatrix},$$

donde $a_i^{izq} = \frac{J_*}{J_i^{izq}}$; $a_i^{med} = \frac{J_*}{J_i^{med}}$ y $a_i^{der} = \frac{J_*}{J_i^{der}}$.

En el caso de interpolación lineal, cuando el momento de inercia en el tramo es constante, la matriz de ductilidad tiene la forma:

$$A_i = \frac{d_i \cdot a_i}{6EJ_*} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Aquí, $a_i = \frac{J_*}{J_i}$.

Para el quinto tramo empleamos la fórmula

$$A_i = \frac{d_i \cdot a_i}{EJ_*}.$$

Hallamos los coeficientes de ductilidad para todos los tramos:

$$a_1 = \frac{J_*}{J_1} = \frac{J}{J} = 1; \quad a_2 = \frac{J_*}{J_2} = \frac{J\sqrt{2}}{J} = \sqrt{2};$$

$$a_3 = \frac{J_*}{J_3} = \frac{J}{J} = 1; \quad a_4 = \frac{J_*}{J_4} = \frac{J}{\left(\frac{J}{2}\right)} = 2;$$

$$a_5 = \frac{J_*}{F_5} = \frac{J}{\left(\frac{J}{l^2}\right)} = l^2 = 3^2 = 9.$$

Por fin, hallamos las matrices de ductilidad para todos los tramos:

$$A_1 = \frac{3}{6 \cdot 1} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A_2 = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{6 \cdot 1} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$A_3 = \frac{3}{6 \cdot 1} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{Vmatrix},$$

$$A_4 = \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 1} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$A_5 = \frac{3 \cdot 9}{1} = 27.$$

La matriz general de ductilidad para todo el pórtico toma la siguiente forma:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 \end{Vmatrix}.$$

En las tarjetas perforadas de entrada, los elementos de la matriz de ductilidad A se escriben en el siguiente orden:

```
10  28  1    1  2  2  0,5  2  0,5  2  2  27
        0,5  0  1  0  0    0  0    0  1  0.
        0,5  0  1  0  0    0  0    0  1  0.
```
(20.19)

La matriz de carga (véase los diagramas en la fig. 20.5*i*, *j*) en las tarjetas perforadas de entrada se escribe así:

```
2  10  0  0  0  0  −12  0     3  3   0  0
       0  0  0  9    0  2,25  0  0  −9  0.
```
(20.20)

El orden de resolución del problema en la computadora es el siguiente.

Al principio se introduce en la computadora el programa del traductor para el lenguaja ALGOL-60. Luego, en la máquina se introduce el programa de los procedimientos matrices, examinados aquí, y el de cálculo del pórtico hiperestático. Este programa, por medio del traductor, se traduce al lenguaje interno de la computadora. Prosiguiendo, en la entrada de la computadora se

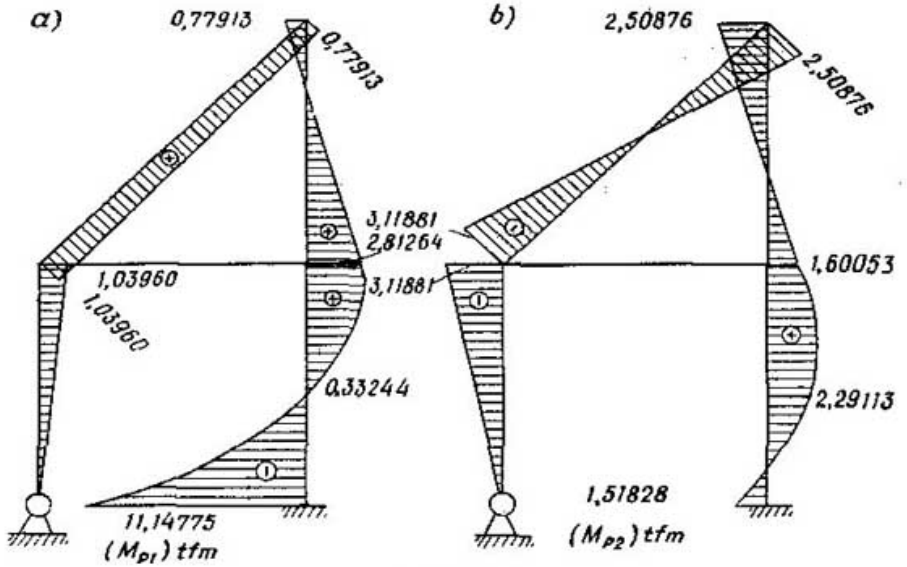


Fig. 20.6

colocan las tarjetas perforadas con los datos iniciales (20.18), (20.19) y (20.20). Por fin, se pone en marcha la computadora para la resolución del problema.

Como resultado de la resolución del problema, la computadora imprime los siguientes cifras.

3	3	3	3	10	—1,51828
3	3	2	2	2	0,33244
63	0,030380	9	0,14928	0	2,29113
45	0,001692	—108	0,59063	0	2,81264
90	—0,011001	13,5	0,28408	1,03960	1,60053
45	0,001692	—121,5	—0,50609	—3,11881	2,81264
99	0,037234	40,5	—0,34653	1,03960	1,60053
139,5	—0,019802	—263,25	1,03960	—3,11881	—0,77913
90	—0,011001			0,77913	—2,50876
139,5	—0,019802			2,50876	0,14928
270	0,017602			—11,14775	0,59063

En la forma matriz, el resultado de la resolución del problema puede ser escrito así:

$$\boldsymbol{D} = \begin{Vmatrix} 63 & 45 & 90 \\ 45 & 99 & 139{,}5 \\ 90 & 139{,}5 & 270 \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}030380 & 0{,}001692 & -0{,}011001 \\ 0{,}001692 & 0{,}037234 & -0{,}019802 \\ -0{,}011001 & -0{,}019802 & 0{,}017602 \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_P = \begin{Vmatrix} 9 & -108 \\ 13{,}5 & -121{,}5 \\ 40{,}5 & -263{,}25 \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{Vmatrix} 0{,}14928 & 0{,}59063 \\ 0{,}28408 & -0{,}50609 \\ -0{,}34653 & 1{,}03960 \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_P = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1{,}03960 & -3{,}11881 \\ 1{,}03960 & -3{,}11881 \\ 0{,}77913 & 2{,}50876 \\ -11{,}14775 & -1{,}51828 \\ 0{,}33244 & 2{,}29113 \\ 2{,}81264 & 1{,}60053 \\ 2{,}81264 & 1{,}60053 \\ -0{,}77913 & -2{,}50876 \\ 0{,}14928 & 0{,}59063 \end{Vmatrix}.$$

Los diagramas de los momentos flectores en el pórtico hiperestático dado, construidos por la resolución de la computadora, se presentan en la fig. 20.6*a*, *b*.

Por el programa examinado aquí pueden hacerse los cálculos de diversos pórticos hiperestáticos, siendo que el número de incógnitas puede ser considerablemente mayor que tres. Para calcular nuevos problemas es indispensable preparar los respectivos datos iniciales, empero, el texto del programa no varía.

CAPITULO 21 * CALCULO DE SISTEMAS PLANOS POR EL ESTADO DEFORMADO

Las particularidades fundamentales del cálculo por el estado deformado consisten en que la determinación de las fuerzas internas se efectúa tomando en cuenta la variación del esquema del sistema bajo la acción de la carga; en este caso se rompe la dependencia lineal entre las fuerzas y los desplazamientos y el principio de independencia de acción de las fuerzas ya no puede emplearse. Al efectuar el cálculo por el estado deformado la mayoría de los problemas llegan a ser hiperestáticos.

La no linealidad entre las cargas y los desplazamientos (no linealidad geométrica) origina grandes dificultades durante el cálculo. La resolución exacta de tales problemas, que exige se establezca la dependencia lineal entre las cargas y los desplazamientos, incluso en el caso del cálculo de sistemas simples de forma cerrada, no es fácil y requiere frecuentemente el empleo de un aparato matemático especial. El cálculo por el estado deformado puede también efectuarse por el método de aproximaciones sucesivas. El orden de tal cálculo es el siguiente:

1) por el estado no deformado se efectúa el cálculo ordinario y se determinan M, N y Q, por los cuales se determina el estado deformado de la primera aproximación;

2) por el estado deformado de la primera aproximación se hallan las fuerzas internas de la primera aproximación M_1, N_1 y Q_1 y se calculan sus incrementos $\Delta M_1 = M_1 - M$, etc.;

3) el sistema no deformado se calcula al incremento de las fuerzas internas ΔM_1 ΔN_1, ΔQ_1 y se establece el estado deformado de la segunda aproximación (para acelerar la convergencia del proceso de aproximación a veces es útil, aúnque más complejo, examinar el estado deformado de la primera aproximación y, por éste, obtener el estado deformado de la segunda aproximación);

4) por el estado deformado de la segunda aproximación se hallan las fuerzas internas de la segunda aproximación y sus incrementos; análogamente a los pts. 3 y 4 se efectúan las siguientes aproximaciones; para muchas estructuras (arcos rebajados, sistemas colgantes, etc.), el cálculo por el esquema deformado es imprescindible, dado que permite efectuar la determinación de las fuerzas internas y tensiones con gran exactitud, con lo que se asegura la fiabilidad de la estructura sin consumo superfluo de material. El ejemplo de cálculo de un arco por el estado deformado, expuesto más abajo, ilustra la aplicación del método de aproximaciones sucesivas y da la posibilidad de valorar, para los problemas particulares, la diferencia entre las magnitudes de las fuerzas internas y las tensiones, al calcularlas por el estado no deformado y el deformado.

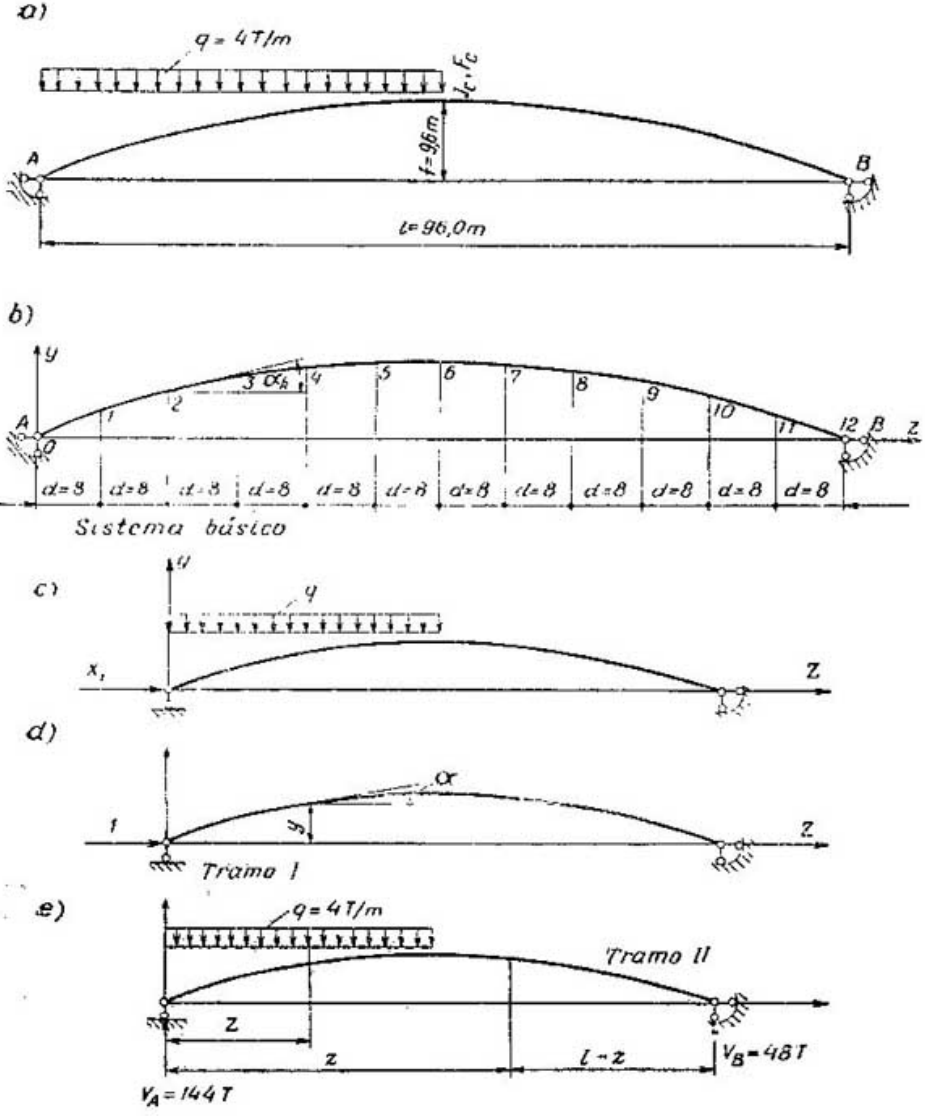

a)
q = 4T/m
J_c, F_c
f=96m
A
B
l=96,0m
b)
y
3 α_k
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
A
B
z
d=8
Sistema básico
c)
y
q
x_1
z
d)
α
1
y
z
Tramo I
e)
q = 4T/m
Tramo II
z
z
l - z
V_A = 144 T
V_B = 48 T

Fig. 21.1

Ejemplo 21.1. Se exige efectuar el cálculo de verificación (determinar M, N y σ) del arco de articulación doble, representado en la fig. 21.1*a*, por el estado deformado (la carga repartida es $q = 4$ tf/m). El eje del arco está dibujado por la parábola cuadrangular, $l = 96$ m y $f = 9{,}6$ m. Las áreas de la sección transversal y los momentos de inercia, a lo largo del arco, varian por la ley: $F = F_C \cos\alpha$ y $J = J_C \cos\alpha$, la altura del arco en la llave es 1,2 m, la relación $\frac{J_C}{F_C} = \frac{1}{20}$ (para la expresión de F_C en m^2 y de J_C en m^4), $J_C = 0{,}026$ m^4; $E = 2{,}1 \cdot 10^7$ tf/m^2.

Resolución

El arco biarticulado dado, en el caso de su cálculo por el estado no deformado, por el método de fuerzas, tiene el grado de hiperestaticidad igual a la unidad. Por cuanto el cálculo ordinario por un esquema no deformado, en el caso de la resolución del problema por el método de aproximaciones sucesivas, es la primera etapa del cálculo por el estado deformado, empleamos un sistema básico en el cual tomamos como incógnita el empuje horizontal del arco (fig. 21.1*c*). La ecuación canónica del método de fuerzas tendrá la forma:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

La determinación de los coeficientes de la ecuación canónica se efectúa por las fórmulas de los desplazamientos, tomando en cuenta el momento flector y las fuerzas longitudinales:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ}\, ds + \sum \int \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_1}{EF}\, ds =$$

$$= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1\, dz}{EJ_C \cos^2\alpha} + \sum \int \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_1\, dz}{EF_C \cos^2\alpha};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ}\, ds + \sum \int \frac{\bar{N}_1 N_P}{EF}\, ds =$$

$$= \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P\, dz}{EJ_C \cos^2\alpha} + \sum \int \frac{\bar{N}_1 N_P\, dz}{EF_C \cos^2\alpha}.$$

El cálculo de las integrales que entran en la fórmula de los desplazamientos puede ser efectuado por la fórmula de Simpson, si son conocidos los valores de los momentos y de las fuerzas axiles en varios puntos del eje del arco. Cuando el número de partes es par, la fórmula de Simpson tiene la forma:

$$\int \eta\, dz = \frac{d}{3}[\eta_0 + 4(\eta_1 + \eta_3 + \ldots + \eta_{n-1}) + 2(\eta_2 + \eta_4 + \ldots + \eta_{n-2}) + \eta_n],$$

donde $\eta = \bar{S}_k \frac{S_m}{B \cos\alpha}$.

En nuestro caso, $\bar{S}_k$ son las fuerzas internas $\bar{M}_1$ o $\bar{N}_1$;

S_m, las fuerzas internas M_P o N_P (M o N);

B es la rigidez EJ o EF ($EJ = EJ_C \cos\alpha$ y

$$EF = EF_C \cos\alpha);$$

α, el ángulo de giro de la tangente al eje del arco.

Para la determinación de las fuerzas internas es indispensable calcular las ordenadas de los puntos del eje del arco, los valores de sen α y cos α. Con este fin, dividimos el arco en partes, cuyas proyecciones horizontales son $d = 8$ m (fig. 21.1*b*).

La ecuación del eje del arco trazado por la parábola cuadrangular, para el origen de coordenadas en el apoyo izquierdo, tiene la forma:

$$y = \frac{4f}{l^2}(l - z)\,z,$$

e

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \frac{8f}{l^2}\left(\frac{l}{2} - z\right).$$

Por $y' = \operatorname{tg}\alpha$ se efectúa el cálculo del sen α y cos α:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Los valores de y, y', sen α, cos α, y $\cos^2\alpha$, calculados por las fórmulas mencionadas, se dan en la tabla 21.1.

El momento flector y la fuerza longitudinal en el sistema básico, debidos a la fuerza unitaria aplicada en la dirección de X_1

Tabla 21.1

N° del punto	z, m	y, m	$y' = \operatorname{tg}\alpha$	$\lvert\operatorname{sen}\alpha\rvert$	$\lvert\cos\alpha\rvert$	$\cos^2\alpha$
0	0	0	0,400	0,37140	0,92850	0,8621
1	8	2,933	0,333	0,31593	0,94876	0,9001
2	16	5,333	0,267	0,25797	0,96618	0,9335
3	24	7,2	0,200	0,19607	0,98039	0,9612
4	32	8,54	0,133	0,13183	0,99128	0,9826
5	40	9,333	0,067	0,06685	0,99780	0,9956
6	48	9,6	0,000	0,00000	1,0000	1,0000
7	56	9,333	—0,067	0,06685	0,99780	0,9956
8	64	8,54	—0,133	0,13183	0,99128	0,9826
9	72	7,2	—0,200	0,19607	0,98039	0,9612
10	80	5,333	—0,267	0,25797	0,96618	0,9335
11	88	2,933	—0,333	0,31593	0,94876	0,9001
12	96	0	—0,400	0,37140	0,92850	0,8621

(fig. 21.1*d*), en la forma general, se escriben del siguiente modo:

$$\bar{M}_1 = -1 \cdot y; \quad \bar{N}_1 = 1 \cos \alpha.$$

La fuerza longitudinal comprimente se considera positiva. Las fuerzas internas debidas a la carga en el sistema básico son:

en la parte

$$0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2} \quad M_{P\,(I)} = V_A z - \frac{qz^2}{2}$$

$$N_{P\,I} = (V_A - qz) \operatorname{sen} \alpha;$$

en la parte

$$\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant l \quad M_{P\,(II)} = V_B (l - z);$$

$$N_{P\,(II)} = -V_B \operatorname{sen} \alpha.$$

Los valores de las fuerzas interiores, calculados por las fórmulas expuestas, se dan en la tabla 21.2.

El cálculo de δ_{11} y Δ_{1P} se efectuó por la fórmula de Simpson, para la cual los valores de $B_c \eta = \frac{\bar{S}_k S_m}{\cos^2 \alpha}$ se exponen en la tabla 21.2 (columnas 7, 8, 9 y 10). B_C es la rigidez del arco en la llave:

$$EJ_C \delta_{11} = EJ_C \delta_{11}^{(M)} + EJ_C \delta_{11}^{(N)} = 4\,829{,}6959 + 4{,}8006 = 4\,834{,}4965;$$

$$EJ_C \Delta_{1P} = EJ_C \Delta_{1P}^{(M)} + EJ_C \Delta_{1P}^{(N)} = -1\,158\,975{,}883 + 61{,}267 =$$

$$= -1\,158\,914{,}616.$$

Tomando en cuenta M y N en Δ_{1P} y δ_{11}, el empuje horizontal es igual a:

$$X_1 = \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{(-1\,158\,914{,}616)}{4834{,}4965} = 239{,}718 \text{ tf}.$$

El momento y la fuerza longitudinal en el sistema dado, determinados como resultado del cálculo por el esquema no deformado, se calculan por las expresiones

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_P;$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + N_P$$

y se dan en la tabla 21.3.

La verificación del cálculo de X_1 y de los valores de M y N en las secciones del arco se efectúa por el procedimiento adoptado en el método de fuerzas

$$\sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_1 N}{EF} ds = 0.$$

El cálculo de las integrales en el ejemplo dado se efectuó por la fórmula de Simpson (el resultado del control no se da).

Tabla 21 2

N° del punto	z, m	$\overline{M}_1$, m	$\overline{N}_1$	M_P, tfm	N_P, tf	$\frac{\overline{M}_1\overline{M}_1}{\cos^2\alpha}$	$\frac{\overline{N}_1\overline{N}_1}{\cos^2\alpha}$	$\frac{\overline{M}_1 M_P}{\cos^2\alpha}$	$\frac{\overline{N}_1 N_P}{\cos^2\alpha}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0,9285	0	53,4816	0	1	0	57,598
1	8	−2,933	0,94876	1 024	35,3842	9,5572	1	−3336,468	37,294
2	16	−5,333	0,96618	1 792	20,6376	30,466	1	−10237,176	21,36
3	24	−7,20	0,98039	2 304	9,4114	53,933	1	−17257,329	9,599
4	32	−8,54	0,99128	2 560	2,1093	74,223	1	−22249,364	2,128
5	40	−9,333	0,9978	2 560	−1,0696	87,489	1	−23997,607	−1,072
6	48	−9,60	1	2 304	0	92,160	1	−22118,4	0
7	56	−9,333	0,9978	1 920	3,2088	87,489	1	−17998,205	3,216
8	64	−8,54	0,99128	1 536	6,3278	74,223	1	−13349,619	6,384
9	72	−7,20	0,98039	1 152	9,4114	53,933	1	−8628,664	9,599
10	80	−5,333	0,96618	768	12,3826	30,466	1	−4387,361	12,816
11	88	−2,933	0,94876	384	15,1646	9,5572	1	−1251,176	15,984
12	96	0	0,9285	0	17,8272	0	1	0	19,2

Tabla 21.3

Nº del punto	z, m	M, tfm	N, tf	Nº del punto	z, m	M, tfm	N, tf
0	0	0	276,06	7	56	—317,29	242,40
1	8	320,91	262,81	8	64	—511,19	243,96
2	16	513,58	252,25	9	72	—573,97	244,43
3	24	578,03	244,43	10	80	—510,42	243,99
4	32	512,81	239,74	11	88	—319,09	242,59
5	40	322,71	238,12	12	96	0	240,41
6	48	2,71	239,72				

Teniendo los valores de M y N del calculado por el estado no deformado, determinamos el estado deformado de la primera aproximación.

La determinación de los desplazamientos verticales de los puntos del eje del arco puede ser efectuada por diferentes procedimientos. Los desplazamientos pueden determinarse más simplemente por medio de los pesos elásticos, cuya expresión general, tomando en cuenta M y N (la influencia de Q sobre los desplazamientos es pequeña y, en el caso dado se la puede despreciar), tiene la forma [véase (19.31)]:

$$W_{km} = \frac{d_0}{6EJ_*}\left[\dot{q}^{\text{der}}_{(k-1)\,m} + 2\dot{q}^{\text{izq}}_{km} + 2\dot{q}^{\text{der}}_{km} + \dot{q}^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}\right] +$$

$$+ \frac{l}{2}\left[\frac{N^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}}{EF^{\text{izq}}_{k+1}}\operatorname{tg}\alpha^{\text{izq}}_{k+1} + \frac{N^{\text{der}}_{km}}{EF^{\text{der}}_{k}}\operatorname{tg}\alpha^{\text{der}}_{k} - \right.$$

$$\left. - \frac{N^{\text{izq}}_{km}}{EF^{\text{izq}}_{k}}\operatorname{tg}\alpha^{\text{izq}}_{k} - \frac{N^{\text{der}}_{(k-1)\,m}}{EF^{\text{der}}_{k-1}}\operatorname{tg}\alpha^{\text{der}}_{k-1}\right],$$

donde

$$\dot{q}^{\text{der}}_{(k-1)\,m} = -\frac{M^{\text{der}}_{(k-1)\,m}J_* d_k}{J^{\text{der}}_{k-1}d_0\cos\alpha^{\text{der}}_{k-1}};$$

$$\dot{q}^{\text{izq}}_{km} = \frac{M^{\text{izq}}_{km}J_* d d_k}{J^{\text{izq}}_{k}d_0\cos\alpha^{\text{izq}}_{k}};$$

$$\dot{q}^{\text{der}}_{km} = -\frac{M^{\text{der}}_{km}J_* d_{k+1}}{J^{\text{der}}_{k}d_0\cos\alpha^{\text{der}}_{k}};$$

$$\dot{q}^{\text{izq}}_{(k+1)\,m} = -\frac{M^{\text{izq}}_{(k+1)\,m}J_* d_{k+1}}{J^{\text{izq}}_{k+1}d_0\cos\alpha^{\text{izq}}_{k+1}}.$$

donde J_* es el momento de inercia de cualquier sección del arco;
d_0, la longitud de cualquier proyección horizontal de una parte del arco;

J_k, J_{k+1}, los momentos de inercia k, $k+1$ de las secciones del arco;

d_k, d_{k+1}, las longitudes de las proyecciones horizontales k, $k+1$ de las partes del arco;

M_{km}, N_{km}, el momento y la fuerza longitudinal en la sección k, debidos a la solicitación m.

La dirección de los pesos elásticos positivos es hacia arriba.

Para el ejemplo examinado, las fórmulas para los pesos elásticos, considerando que $J_* = J_C$, $d_0 = d$, $J_k = J_C \cos\alpha_k$; $F_k = F_C \cos\alpha_k$ y los datos de la tabla 21.1, serán:

$$W_{1m} = \frac{d}{6EJ_C}\left[-M_{0m}\frac{J_C d}{J_C d\cos^2\alpha_0} - 2M_{1m}\frac{J_C d}{J_C d\cos^2\alpha_1} - \right.$$

$$\left. - 2M_{1m}\frac{J_C d}{J_C d\cos^2\alpha_1} - M_{2m}\frac{J_C d}{J_C d\cos^2\alpha_2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{N_{2m}\operatorname{tg}\alpha_2}{EF_C\cos\alpha^2} - \frac{N_{0m}\operatorname{tg}\alpha_0}{EF_C\cos\alpha_0}\right] =$$

$$= \frac{8}{6EJ_C}\left[-\frac{M_{0m}}{0{,}821} - \frac{4M_{1m}}{0{,}9001} - \frac{M_{2m}}{0{,}9335}\right] +$$

$$+ \frac{1}{40EJ_C}\left[N_{2m}\frac{0{,}267}{0{,}9918} - N_{0m}\frac{0{,}400}{0{,}9285}\right],$$

en definitiva,

$$W_{1m} = \frac{1{,}333}{EJ_C}(-1{,}1599M_{0m} - 4{,}4438M_{1m} - 1{,}0712M_{2m}) +$$

$$+ \frac{0{,}025}{EJ_C}(0{,}276N_{2m} - 0{,}431N_{0m});$$

$$W_{2m} = \frac{1{,}333}{EJ_C}(-1{,}1109M_{1m} - 4{,}2848_{2m} - 1{,}0403M_{3m}) +$$

$$+ \frac{0{,}025}{EJ_C}(0{,}204N_{3m} - 0{,}351N_{1m}); \quad W_{3m} = \ldots, \text{ etc.}$$

Los pesos elásticos W_k se calcularon por las fórmulas específicas para esto, para la determinación del estado deformado de la primera aproximación (los valores de M y N se toman del cálculo por el estado no deformado).

Las magnitudes de los pesos elásticos W_k se dan en la tabla 21.4.

El diagrama de los desplazamientos verticales del eje del arco (diagrama de las flechas y_1) se obtuvo como diagrama de los momentos ficticios debidos a los pesos elásticos W_k. El sistema ficticio y el diagrama de y_1 se dan en la fig. 21.2*a*, *b*.

Por los valores hallados de y_1 se calcularon los incrementos del momento de las secciones del arco $\Delta M_1 = X_1 y_1$ (las variaciones de N debidas a la deformación del eje del arco son pequeñas y se las puede despreciar).

Si al momento M, hallado durante el cálculo del arco por el estado no deformado, le agregamos ΔM_1, obtenemos el momento M_1 de la primera aproximación. La variación del momento en las secciones del arco originará una deformación complementaria del eje del arco y una nueva variación del momento.

Efectuando el segundo cálculo de los pesos elásticos debidos a ΔM_1 determinemos los desplazamientos verticales adicionales del eje del arco

$$y_2 y\ \Delta M_2 = X_1 y_2.$$

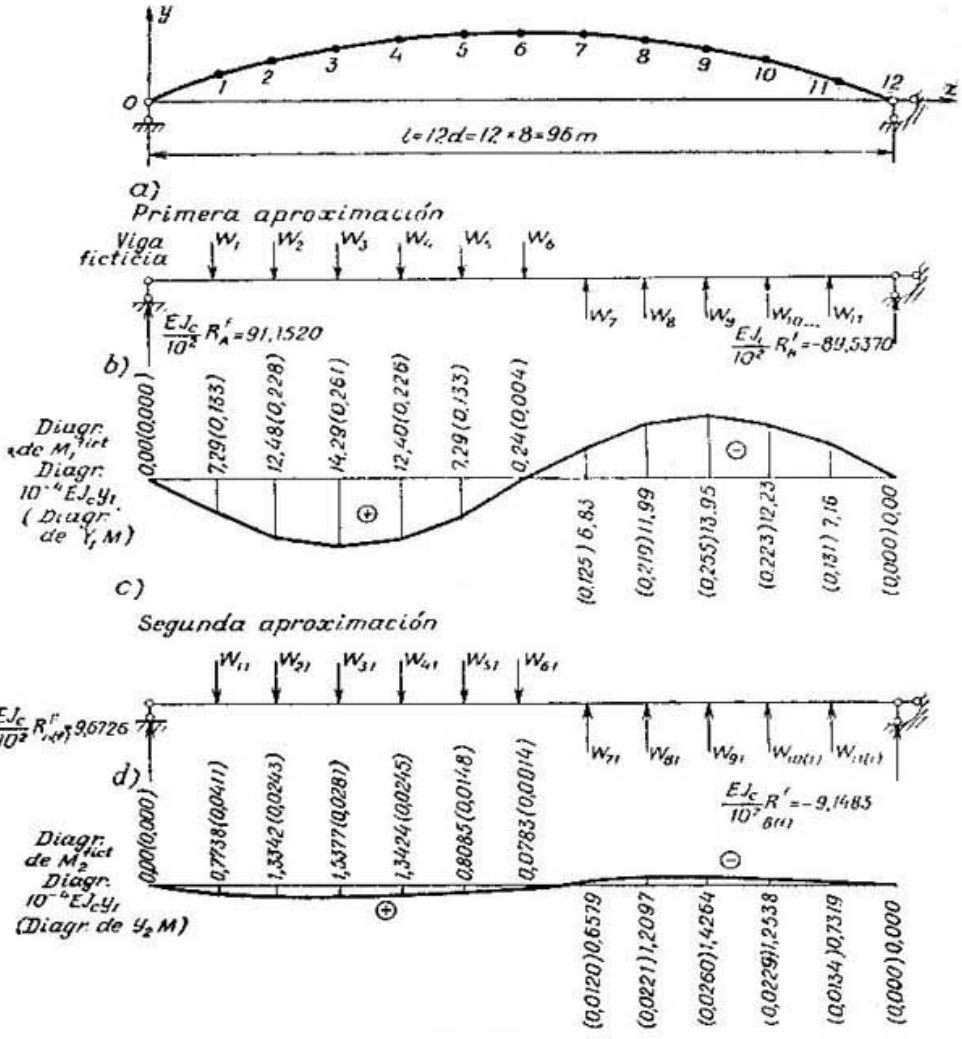


Fig. 21.2

Tabla 21.4

N° del punto	$10^{-2}EI_C W_k$
0	—
1	—26,3552
2	—42,1122
3	—46,3622
4	—40,1718
5	—24,2835
6	—0,2247
7	23,8828
8	39,9375
9	46,0518
10	41,8291
11	26,1941
12	—

Tabla 21.5

N° del punto	$10^{-2}EI_C W_{k1}$
0	—
1	—2,6681
2	—4,4606
3	—4,9846
4	—4,2329
5	—2,454
6	—0,0754
7	—2,3056
8	4,188
9	4,8673
10	4,3664
11	2,624
12	—

Tabla 21.6

N° del punto	z, m	Momentos, tfm					Fuerza axil, tf N
		M	$\Delta M_1 = x_1 y_1$	M_1 1ª aproximación	$\Delta M_2 = x_1 y_2$	M_2 2ª aproximación	
0	0	0	0	0	0	0	276,06
1	8	320,91	31,88	352,79	3,38	356,17	262,81
2	16	513,58	54,66	568,24	5,83	574,07	252,25
3	24	578,03	62,57	640,6	6,74	647,34	244,43
4	32	512,81	54,18	566,99	5,87	572,86	239,74
5	40	322,71	31,88	354,59	3,55	358,14	238,12
6	48	2,71	0,96	3,67	0,34	4,01	239,72
7	56	—317,29	—29,96	—347,25	—2,88	—350,13	242,4
8	64	—511,19	—52,5	—563,69	—5,3	—568,99	243,96
9	72	—573,97	—61,13	—635,1	—6,23	—641,33	244,43
10	80	—510,42	—53,46	—563,88	—5,49	—569,37	243,99
11	88	—319,09	—31,4	—350,49	—3,21	—353,7	242,59
12	96	0	0	0	0	0	240,41

El momento de la segunda aproximación es $M_2 = M_1 + \Delta M_2$. Las magnitudes de los pesos elásticos W_{k1}, para la determinación de y_2, se calculan por las mismas fórmulas que las de W_k y se dan en la tabla 21.5. El sistema ficticio y el diagrama de y_2 se dan en la fig. 21.2*c*, *d*.

Los resultados de los cálculos del momento ΔM_k en las secciones del arco, debido a la deformación en su eje, y las magnitudes de los momentos de las primera y segunda aproximaciones M_1 y M_2 y, también, los valores de N se dan en la tabla 21.6.

De los datos dados en la tabla 21.6 se deduce que en una cuarta parte del tramo los momentos de la segunda aproximación superan a los momentos obtenidos durante el cálculo por el estado no deformado en un 12% y, en el centro del tramo, en un 48%.

Sin embargo, la considerable variación de los pequeños valores absolutos del momento en el medio del tramo varía poco las magnitudes de las tensiones normales en la sección.

En un cuarto del tramo, las tensiones normales, por el borde inferior de la sección, superan casi en un 10% a las tensiones determinadas en el cálculo por el estado no deformado. El ejemplo examinado de cálculo del arco por el estado deformado muestra que, en el caso de cálculo por el estado no deformado, son posibles errores considerables al determinar las magnitudes de las fuerzas y tensiones internas, y pone de manifiesto la necesidad de calcular las construcciones, tomando en cuenta las deformaciones de los sistemas bajo carga.

A NUESTROS LECTORES:

"MIR" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a EDITORIAL "MIR", 1 Rizhski per. 2, GSP 1—110, Moscú 129820, URSS.